ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: GÓRNICTWO z. 190 Nr kol. 1088

Anna WALASZEK-BABISZEWSKA

ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA FRAKCJI GĘSTOŚCIOWYCH I KLAS ZIARNOWYCH W PRÓBACH MATERIAŁÓW UZIARNIONYCH

Streszczenie. Zaprezentowano udziały wagowe (wychody) ziarn o różnych gęstościach i rozmiarach, w szczególności zawartość substancji niepalnej, wyznaczone na podstawie bilansu masy ziarn w próbie materiału uziarnionego. Uzyskana ogólna formuła wiąże udział wagowy badanego składnika z ilością ziarn badanego typu oraz ogólną ilością ziarn w próbie. Opierając się na probabilistycznych schematach losowań, przyjęto rozkłady prawdopodobieństwa dla wychodów poszczególnych składników oraz łączny rozkład dla zmiennej losowej wielowymiarowej. Stwierdzono, że formuła rozkładów i wariancja zależą od ilości ziarn pobranych do próby.

Ukazane w referacie podstawy teoretyczne dotyczące opisu procesu próbobrania są istotne dla badań symulacyjnych i stochastycznych procedur kontroli i sterowania procesów przeróbki surowców mineralnych.

1. WSTĘP

Dla wielu materiałów uziarnionych, w tym dla węgla i niektórych rud, podstawowe charakterystyki: densymetryczną i granulometryczną wyznacza się na podstawie prób. Informacja o jakości materiału, uzyskana tą drogą służy np. do sterowania procesami w zakładach przeróbki surowców. Istnieją współzależności pomiędzy przewidywaną, średnią charakterystyką badanego materiału uziarnionego, masę pobranej próby oraz oszacowaniem zawartości badanego składnika w materiale na podstawie próbobrania. Niniejsze opracowanie jest przyczynkiem do ukazania tych powiązań.

2. BILANS MASY ZIAREN W POBRANEJ PRÓBIE MATERIAŁU UZIARNIONEGO

Dla dalszych rozważań zostanie przyjęte, że pobrana próba materiału o masie m, zawiera n ziarn. Wyróżnionymi cechami ziaren są: objętość V i gęstość (masa właściwa) δ. Ponadto przypuśćmy, że w wyniku analizy sitowej materiału zawartego w próbie uzyskano l klas ziarnowych, w których średnie objętości ziarn wynoszą odpowiednio: $V_1, \ldots V_i, \ldots V_l$ oraz, że w wyniku analizy w cieczach ciężkich dokonano rozdziału całej próby na r frakcji gęstościowych, w których średnie gęstości ziarn wynoszą odpowiednio: $\delta_1, \ldots, \delta_j, \ldots \delta_r$. Masa m_{ij} ziarn, które należą jednocześ-

nie do j-tej frakcji gęstościowej oraz i-tej klasy ziarnowej, może być wyrażona zależnością

$$m_{ij} = V_i \delta_j n_{ij}, \tag{1}$$

gdzie:

n_{ij} - liczba ziarn należących jednocześnie do j-tej frakcji gęstościowej oraz i-tej klasy ziarnowej,

$i = 1,2,\ldots,l; \quad j = 1,2,\ldots,r.$

Masę m_i ziarn stanowiących i-tą klasę można wyznaczyć przez sumowanie po wszystkich j (frakcjach gęstościowych) elementarnych mas m_{ij}, danych wzorem (1), to znaczy, że:

$$m_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij} = V_i \sum_{j=1}^{r} \delta_j n_{ij}. \tag{2}$$

Masa m_j ziaren stanowiących j-tę frakcję gęstościową jest sumą (sumowanie po wszystkich klasach ziarnowych) elementarnych mas m_{ij}, czyli

$$m_j = \sum_{i=1}^{l} m_{ij} = \delta_j \sum_{i=1}^{l} V_i n_{ij} \tag{3}$$

Jednocześnie, masa ziarn w i-tej klasie może być wyrażana iloczynem:

$$m_i = V_i \bar{\delta}_i n_i, \tag{4}$$

gdzie n_i jest liczbą ziaren w danej klasie, taką, że

$$n_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ij} \tag{5}$$

a $\bar{\delta}_i$ jest pewną średnią gęstością ziaren w i-tej klasie.

Z porównania wyrażeń (2) i (4) wynika postać zależności na średnią gęstość ziarn w danej klasie:

$$\bar{\delta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} \delta_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^{r} n_{ij}} \tag{6}$$

Podobnie, przyjmując ogólną zależność na masę m_j ziaren j-tej frakcji gęstościowej

$$m_j = \bar{V}_j \delta_j n_j, \tag{7}$$

gdzie:

$$n_j = \sum_{i=1}^{l} n_{ij} \tag{8}$$

Z porównania wyrażeń (3) i (7) otrzymujemy wzór na średnią objętość ziaren w j-tej frakcji gęstościowej

$$\bar{V}_j = \frac{\sum_{i=1}^{l} V_i n_{ij}}{\sum_{i=1}^{l} n_{ij}}. \tag{9}$$

Masa ziarn całej próby może być obliczana na kilka równoważnych sposobów, jak suma mas wszystkich frakcji i klas ziarnowych

$$m = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} m_{ij} = \sum_{i=1}^{l} m_i = \sum_{j=1}^{r} m_j. \tag{10}$$

Ponadto, przyjmując pewną średnią gęstość $\bar{\delta}$ oraz średnią objętość $\bar{V}$ ziaren w próbie, masę próby można wyrazić zależnością

$$m = \bar{V}\bar{\delta}n. \tag{11}$$

Jeśli średnie gęstości $\bar{\delta}_i$ ziarn w poszczególnych klasach ziarnowych są jednakowe i równe średniej gęstości $\bar{\delta}$ ziarn w próbie, czyli

$$\bar{\delta}_i = \bar{\delta}, \qquad \text{dla } i = 1,2,\ldots,l \tag{12}$$

to średnia objętość $\bar{V}$ ziaren w próbie na podstawie wyrażeń (4), (10) i (11) wynosi

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^{l} V_i n_i}{n}. \tag{13}$$

Natomiast, przy założeniu, że objętość średnia $\overline{V}_j$ ziaren w każdej frakcji gęstościowej jest taka sama i równa średniej objętości ziaren $\overline{V}$ w próbie, to znaczy, że:

$$\overline{V}_j = \overline{V}, \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots,r \tag{14}$$

oraz uwzględniając (7), (10) i (11) można wyznaczyć średnią gęstość ziarn w próbie zgodnie ze wzorem:

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \delta_j n_j}{n}. \tag{15}$$

3. UDZIAŁY WAGOWE KLAS ZIARNOWYCH I FRAKCJI GĘSTOŚCIOWYCH W PRÓBIE MATERIAŁU

Charakterystyka granulometryczna danego materiału określa udziały wagowe lub procentowe ziarn o różnych rozmiarach. Na podstawie próby o masie m, wychody poszczególnych klas ziarnowych określa się jako ilorazy mas

$$\gamma_i = \frac{m_i}{m} \qquad i = 1,2,\ldots,l, \tag{16}$$

przy czym na podstawie (10)

$$\sum_{i=1}^{l} \gamma_i = 1.$$

Uwzględniając zależności (1), (2), (4), (10), (11), charakterystyka (16) składu ziarnowego może być zapisana następująco:

$$\gamma_i = \frac{V_i \sum_{j=1}^{r} \delta_j n_{ij}}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} V_i \delta_j n_{ij}} = \frac{V_i \overline{\delta}_i n_i}{\overline{V}\overline{\delta} n}, \qquad i = 1,2,\ldots,l. \tag{17}$$

Jeśli średnia gęstość $\overline{\delta}_i$ ziarn w i-tej klasie jest równa średniej gęstości $\overline{\delta}$ ziarn w próbie (warunek 12), to wzór (17), opisujący charakterystykę granulometryczną, upraszcza się do postaci:

$$\gamma_i = \frac{V_i n_i}{\overline{V}\, n}, \qquad i = 1,2,\ldots,l. \tag{18}$$

Charakterystyka densymetryczna materiału określa udziały wagowe lub procentowe poszczególnych frakcji gęstościowych. Na podstawie próbobrania, określa się odpowiednie ilorazy mas

$$\gamma_j = \frac{m_j}{m}, \qquad j = 1,2,\ldots,r, \tag{19}$$

przy czym

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_j = 1.$$

Na podstawie zależności (1), (3), (7), (10) i (11) wychody frakcji gęstościowych w próbie określa wyrażenie:

$$\gamma_j = \frac{\delta_j \sum_{i=1}^{l} v_i n_{ij}}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} v_i \delta_j n_{ij}} = \frac{\bar{v}_j \bar{\delta}_j n_j}{\bar{v}\bar{\delta} n}, \qquad j = 1,2,\ldots,r. \tag{20}$$

Po uwzględnieniu warunku (14), równanie (20) upraszcza się do postaci:

$$\gamma_j = \frac{\delta_j n_j}{\bar{\delta} n}, \qquad j = 1,2,\ldots,r. \tag{21}$$

Często określa się wychody frakcji gęstościowych w stosunku do masy ziaren danej klasy, mianowicie:

$$\gamma_{j/i} = \frac{m_{ij}}{m_i}, \qquad j = 1,2,\ldots,r; \quad i = 1,2,\ldots,l, \tag{22}$$

przy czym

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_{j/i} = 1.$$

Można wykazać, że

$$\gamma_{j/i} = \frac{v_i \delta_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^{r} v_i \delta_j n_{ij}} = \frac{\delta_j n_{ij}}{\bar{\delta}_i n_i}, \qquad j = 1,2,\ldots,r \quad i = 1,2,\ldots,l. \tag{23}$$

4. ZAWARTOŚĆ POPIOŁU W PRÓBIE WĘGLA

Zawartość substancji niepalnej w węglu może być rozpatrywana jako efekt obecności ziarn skały płonej o gęstości ziaren δ_p, znacznie większej niż gęstość ziarn substancji węglowej ($\delta_p > \delta_j$, $j = 1,2,\ldots,r$) oraz o objętościach V_i, $i = 1,2,\ldots,l$.

Zawartość substancji niepalnej α_{ij} wśród ziaren należących jednocześnie do i-tej klasy ziarnowej i j-tej frakcji gęstościowej, wyraża się następującym ilorazem mas

$$\alpha_{ij} = \frac{V_i \delta_p k_{ij}}{m_{ij}} = \frac{\delta_p k_{ij}}{\delta_j n_{ij}}, \qquad i = 1,1,\ldots,l; \quad j = 1,2,\ldots,r, \tag{24}$$

gdzie:

k_{ij} - ilość ziarn substancji niepalnej w j-tej frakcji gęstościowej, i-tej klasy ziarnowej.

Zawartość popiołu α_i w i-tej klasie ziarnowej zależy od obecności ziarn skały wśród populacji ziaren należących do i-tej klasy, stanowiących sumę r frakcji, więc:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} V_i \delta_p k_{ij}}{m_i} = \frac{\delta_p k_i}{\bar{\delta}_i n_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,l, \tag{25}$$

gdzie:

k_i - ilość ziarn substancji niepalnej w i-tej klasie ziarnowej,

$$k_i = \sum_{j=1}^{r} k_{ij}.$$

Zawartość popiołu w próbie o masie m wyraża się stosunkiem masy wszystkich ziaren niepalnych do ogólnej masy m całej próby

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} V_i \delta_p k_{ij}}{m} = \frac{\delta_p \sum_{i=1}^{l} V_i k_i}{\bar{V}\,\bar{\delta} n}. \tag{26}$$

Jeśli

$$\sum_{i=1}^{l} V_i k_i = \bar{V} k,$$

gdzie:

k - ogólna ilość ziaren substancji niepalnej w pobranej próbie,

to

$$\alpha = \frac{\delta_p k}{\delta n}. \tag{27}$$

5. UDZIAŁY WAGOWE BADANEGO SKŁADNIKA W POBRANEJ PRÓBIE

Wykazano powyżej, że wagowe udziały frakcji gęstościowych i ziarnowych, zawartość substancji niepalnej w próbach materiałów uziarnionych można przedstawić w postaci ogólnej

$$\vartheta = a \frac{K}{N}, \tag{28}$$

gdzie:

ϑ - udział wagowy badanego składnika,

K - liczba ziaren badanego składnika,

N - ogólna liczba ziaren w populacji,

a - współczynnik zależny od gęstości i objętości ziarn, zgodnie ze wzorami (17)-(27).

Zależności te wiążą wychody wagowe ze stosunkien liczby ziaren badanego składnika i populacji odniesienia.

6. ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA BADANEGO SKŁADNIKA W PRÓBIE MATERIAŁU UZIARNIONEGO

Przy wielokrotnym pobieraniu próby z materiału uziarnionego stwierdza się pewien rozrzut badanej cechy w poszczególnych próbach. Udział wagowy, bądź masa badanego składnika w próbie jest wielkością losową. Rozkłady prawdopodobieństwa tych zmiennych losowych można próbować określić w świetle pewnych schematów losowań znanych w rachunku prawdopodobieństwa. Schemat losowań Bernoulliego stosuje się do opisu n-krotnego losowania po jednym elemencie z pewnej zbiorowości generalnej, przy czym wyniki każdego doświadczenia są niezależne, prawdopodobieństwo sukcesu w każdym doświadczeniu jest stałe i równe p, a prawdopodobieństwo porażki równe $q = 1-p$.

Jeśli materiał podlegający opróbowaniu jest starannie wymieszany oraz znacznie przewyższa masą (ilością ziaren) pobieraną próbę, to można przyjąć założenie, że prawdopodobieństwo p wylosowania ziarna o żądanych własnościach jest stałe podczas pobierania próby i w dowolnej części ma-

teriału. Prawdopodobieństwo p jest określone ilorazem ilości ziarn posiadających żądaną cechę do ogólnej ilości ziaren w populacji podlegającej opróbowaniu. Przy tych założeniach zmienna losowa X, określająca liczbę żądanych ziarn wśród N ziarn pobranych do próby, może przyjmować wartości $X = 0,1,2,\ldots,N$ z prawdopodobieństwem określonym rozkładem dwumianowym

$$P_N(X=K) = \binom{N}{K} p^K q^{N-K} = \frac{N!}{K!(N-K)!} p^K q^{N-K} \tag{29}$$

Średnia ilość ziarn o żądanych własnościach w próbach N-elementowych wynosi

$$E(X) = Np, \tag{30}$$

a wariancja

$$D^2(X) = Npq. \tag{31}$$

Zmienna losowa $Y = X/N$, określona przez iloraz ilości ziaren o poszukiwanych własnościach i ogólnej liczby ziaren w próbie, przyjmującą dla stałej ilości ziaren N wartości:

$$Y = K/N = 0,\ 1/N,\ 2/N,\ \ldots\ (N-1)/N,\ 1 \tag{32}$$

ma również rozkład dwumianowy, określony wzorem (29), gdyż

$$P(Y = \frac{K}{N}) = P(X=K)$$

Parametry rozkładu zmiennej losowej Y są następujące:

$$E(Y) = p, \quad D^2(Y) = pq/N. \tag{33}$$

Na mocy prawa wielkich liczb Bernoulliego, dla dostatecznie dużej liczby N ziaren w próbie częstość K/N pojawienia się ziaren danego typu będzie dowolnie mało różnić się od p, z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności.

Ostatecznie jednak interesują nas rozkłady prawdopodobieństwa wychodów klas ziarnowych, frakcji gęstościowych, zawartości popiołu w próbie materiału uziarnionego. Wyprowadzone w punktach 3 i 4 zależności i zapisane wzorem ogólnym (28) stanowią zmienne losowe postaci $\vartheta = aY$, w których parametr a, zależny od gęstości i objętości ziarn, można dla uproszczenia rozważań przyjąć jako stały dla danego typu ziarn. Wówczas zmienna losowa ϑ, reprezentująca udział wagowy wybranego składnika w próbie materiału uziarnionego ma również rozkład dwumianowy (29) o parametrach

$$E(\vartheta) = ap, \quad D^2(\vartheta) = a^2pq/N. \tag{34}$$

Wariancja rozkładu zależy od ilości ziaren pobranych do próby. Rozkład dwumianowy jest symetryczny dla $p = 0,5$ oraz ma asymetrię lewostronną dla $p < 0,5$ i prawostronną dla $p > 0,5$. Zmienna losowa $\vartheta = aK/N$ dla dużych prób (duże wartości K i N) może przyjmować wartości z przedziału $\langle 0,a \rangle$ dowolnie gęsto. Jest to jedna z przyczyn, że w praktyce przyjmuje się na ogół rozkłady ciągłych zmiennych losowych dla opisu frakcji gęstościowych i ziarnowych.

Sumaryczny wychód kilku frakcji gęstościowych i ziarnowych, jako suma zmiennych losowych o rozkładach dwumianowych, posiada uogólniony rozkład dwumianowy. Dla dwóch frakcji ma on postać:

$$P_n(X_1 + X_2 = j) = \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} p_1^i q_1^{n-i} \binom{n}{j-i} p_2^{j-i} q_2^{n-(j-i)} \tag{35}$$

$$j = 0,1,2,\ldots,n$$

gdzie:

n - liczność próby,

p_1 - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna pierwszej frakcji,

$q_1 = 1-p_1$,

p_2 - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna drugiej frakcji,

$q_2 = 1-p_2$.

Jednoczesne zdarzenie losowe polegające na tym, że w próbie n-elementowej znajduje się n_1 ziarn pierwszego typu, ... n_k ziarn k-tego typu, wystąpi z prawdopodobieństwem

$$P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}, \tag{36}$$

gdzie $p_1,\ldots,p_k$ są nieujemnymi liczbami o sumie 1, a $(n_1,\ldots,n_k)$, są układami po k liczb całkowitych, dających w sumie n. Zmienna losowa k-wymiarowa, reprezentująca liczby ziarn poszczególnych typów, ma rozkład wielomianowy (36).

W rozważaniach tego rozdziału zakładano, że liczba ziaren N w próbach jest stała. Na ogół jednak tak nie jest, ponieważ łatwiej jest zachować stałą masę poszczególnych prób, podczas gdy liczba ziaren pozostaje zmienną losową. Ponadto parametr a, zależny od średnich gęstości i wymiarów ziarn, zmienia swą wartość dla różnych prób. Zatem, każda zmienna losowa przedstawiająca udział wagowy ziaren badanego typu, suma wychodów różnych frakcji lub dowolnie utworzona zmienna losowa wielowymiarowa reprezentująca stochastyczną charakterystykę materiału mają tzw. rozkłady złożone

$$P(\vartheta = a\frac{K}{N}, N=n, a=A) = P(\vartheta = a\frac{K}{N} \Big/ N=n, a=A)P(N=n, a=A), \tag{37}$$

w których rozważane rozkłady (34), (35), (36) są rozkładami warunkowymi, wyznaczonymi przy ustalonych wartościach N i a.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na zbieżność rozkładów binomalnych do innych rozkładów. Przy dużej liczbie N ziaren w próbie oraz niezbyt dużej wartości iloczynu $Np = \lambda$, rozkład dwumianowy (29) o parametrach N, p, K jest zbieżny do rozkładu Poissona

$$\lim_{N\to\infty} P(N,p,K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}. \tag{38}$$

Jeśli warunek dla λ nie jest spełniony, wówczas dla dużych N stosuje się przybliżenie następujące

$$P(K_1 \leq X \leq K_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{K_1}^{K_2} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \tag{39}$$

gdzie $m = Np$, $\sigma^2 = Np(1-p)$.

Wzory (38) i (39) pozwalają w prosty sposób obliczać wartości prawdopodobieństw, co z definicyjnego wzoru (29) jest dość uciążliwe.

7. ZAKOŃCZENIE

Wskazane w referacie podstawy teoretyczne pozwalają przyjąć ogólne formuły rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych cech w próbach materiałów uziarnionych. Pozwalają wiązać parametry tych rozkładów z licznością próby i średnią charakterystyką materiału, reprezentującą udziały wagowe poszczególnych składników materiału.

Przedstawione zależności mogą znaleźć bezpośrednie zastosowanie w stochastycznych algorytmach kontroli i sterowania procesów przeróbki minerałów, a także w badaniach symulacyjnych tych procesów.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ФРАКЦИИ ПО ПЛОТНОСТИ И КЛАССОВ ЗЕРНИСТОСТИ В ПРОБАХ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Р е з ю м е

Представлены массовые содержания (выходы) зерен разных плотности и размеров, тоже содержание невоспламеняющегося вещества, решены на основе баланса массы зерен в образце зернистого материала. Получена общая формула связывает массовое содержание исследуемой составляющей с количеством исследуемых зерен и общего количества зерен в пробе. На основе вероятностных схем пробоотбора были приняты распределения вероятности для выходов отдельных составляющих и общее распределение вероятности многомерной случайной величины. Доказано, что формула распределения вероятности и дисперсия зависят от числа зерен принятых в пробу.

Указанные в реферате теоретические основы касающиеся описания процесса пробоотбора особенно важеы для симуляционных исследовании и стохастических алгорифмов контроля и управления процессов переработки полезных ископаемых.

DISTRIBUTION FUNCTIONS OF DENSITY FRACTIONS AND SIZE GRADES IN SAMPLES OF GRAINY MATERIALS

S u m m a r y

Mass contents (yields) of grains of various density and sizes, particularly content of incombustible matter, calculating on the ground of the mass balance of grains in the sample, have been presented in the paper. A general formula connects the mass content of the selected component with grain number of component being examined and total number of grains in the sample. On the basis of random schems of sampling the distribution functions of contents of particular components and distribution function of multi-dimensional random variable have been given. It has been found that a form of the distribution functions and the variations depended on a number of grains sampled.

Theoretical principles of the description of the sampling process are important for simulation investigations and stochastic measuring and control procedures of mineral enrichment processes.