

Władysław Morytko, Maciej Brunne
Instytut Metalurgii

RÓWNANIA PARAMETRYCZNE WZBUDNIKÓW URZĄDZEŃ ELEKTROMETALURGICZNYCH

Streszczenie: Ostatnio w inżynierii materiałowej, jak również w metalurgii coraz większą rolę odgrywają pola magnetyczne o różnych konfiguracjach wytwarzane przez wzbudniki (cewki indukcyjne). W związku z tym konieczna jest znajomość ich powierzchni. Pierwszym przybliżeniem rzeczywistych równań wzbudników nawiniętych na różne profile, są równania linii nawiniętych na nie. W niniejszym artykule stanowiącym wstęp do geometrii wzbudników, wyprowadzono parametryczne równania linii nawiniętych na walec, stożek, kulę i torus. Otrzymane wyniki pozwolą na dokładniejsze określenie parametrów wzbudników elektrycznych.

1. Wstęp.

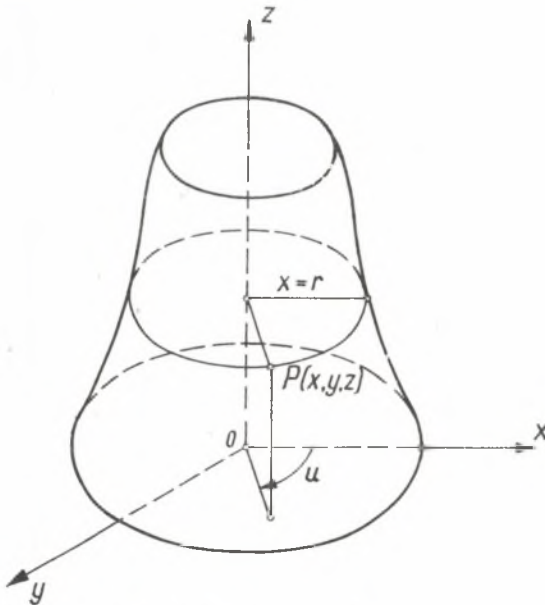
W nowoczesnej metalurgii coraz większą rolę odgrywają pola magnetyczne o różnych konfiguracjach, które zależą głównie od kształtu wzbudnika i kształtu wsadu. Najbardziej tradycyjne zastosowanie w elektrotechnice znajdowały wzbudniki walcowe jedno i wielozwojowe, wykonywane przeważnie z drutu. Natomiast w metalurgii z uwagi na stosowanie dużych prądów, a w związku z tym na konieczność chłodzenia wodą, wzbudniki produkuje się z rurek o przekrojach okrągłych, prostokątnych oraz profilowych. Obecnie bardzo rozwijają się magnetohydrodynamiczne urządzenia metalurgiczne, tzn pompy do ciekłych metali, ryny, dozowniki, urządzenia do mieszania i formowania ciekłych metali. W pompach i dozownikach kondukcyjnych, oraz w pompach indukcyjnych płaskich jedno i dwustronnych, spiralnych i śrubowych stosowane są wzbudniki nawinięte z rurek okrągłych lub prostokątnych. W pompach cylindrycznych oraz w urządzeniach do formowania i mieszania ciekłych metali w polu magnetycznym, używane są wzbudniki walcowe lub prostokątne, natomiast w dozownikach elektrodynamicznych stosowane są cewki spiralne płaskie. W fizyce atomowej znajdują zastosowanie wzbudniki nawinięte na torusie okrągłym, ósemkowym itp. Do lewitacyjnego podnoszenia ciekłych metali przy pomocy pola magnetycznego stosuje się wzbudniki stożkowe lub kuliste, w których pole magnetyczne tworzy tzw. pułapkę magnetyczną, w której utrzymuje się ciekły metal. W nowoczesnej inżynierii materiałowej wykonały się metody obróbki metali w polu magnetycznym, gdzie przez stosowanie stałego lub przemiennego pola magnetycznego uzyskuje si

poprawę własności wytrzymałościowych materiałów. Dla tych celów stosuje się wzbudniki o rozmaitych kształtach dobieranych do profilu gotowego. W związku z powyższymi zastosowaniami wzbudników w różnych dziedzinach techniki, konieczna jest znajomość równań ich powierzchni.

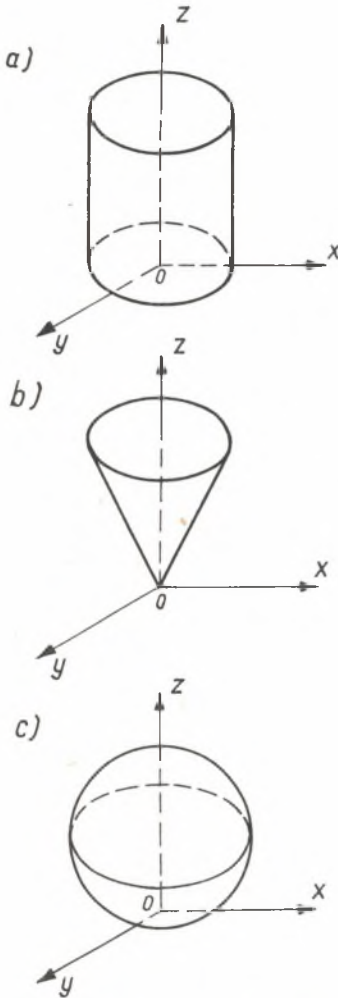
Artykuł niniejszy jest pierwszym traktującym o geometrii wzbudników. Wyprowadzono i zestawiono w nim równania linii wzbudników nawiniętych na różnych profilach. W wielu dotychczasowych obliczeniach technicznych zaniedbywano grubość przewodu, jak i kąt wznoszenia się zwojów wzbudnika. Natomiast wyniki otrzymane w niniejszym artykule pozwolą na dokładniejsze określenie parametrów wzbudników.

2. Równania parametryczne powierzchni obrotowych

W paragrafie tym wyprowadzimy równanie powierzchni powstałej przez obrót krzywej płaskiej leżącej w płaszczyźnie (xz) , wokół osi z , a następnie zilustrujemy to równanie przykładami, z których skorzystamy w dalszym ciągu naszych rozważań. Niech w układzie przestrzennym $Oxyz$ będzie dana krzywa o równaniach parametrycznych $x = \varphi(v)$, $z = \psi(v)$. Jeżeli tę krzywą obrócimy wokół osi z (rys. 1), wówczas dowolny jej punkt $P(x,y,z)$ zakreśli okrąg o promieniu r . Równania tego okręgu będą miały postać: $x = r \cdot \cos u$, $y = r \cdot \sin u$, $z = \psi(v)$, gdzie parametr u jest kątem obrotu liczonym od płaszczyzny (xz) . Ale ponieważ $r = \varphi(v)$, więc równania parametryczne tej powierzchni będą miały postać:



Rys. 1 Bryła obrotowa



Rys. 2. Walec, stożek, kula

$$\begin{aligned} x &= \varphi(v) \cdot \cos u \\ y &= \varphi(v) \cdot \sin u \\ z &= \psi(v) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie parametr v należy do pewnego przedziału, zaś parametr $u \in [0, 2\pi]$. Jeżeli teraz przyjmiemy jako szczególne przypadki $\varphi(v) = R$, $\psi(v) = v$ wówczas równania (1) otrzymają postać:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos u \\ y &= R \cdot \sin u \\ z &= v \end{aligned} \quad (2a)$$

które są równaniami powierzchni walca kołowego o promieniu R . Jeżeli zaś przyjmiemy $\varphi(v) = a \cdot v$, $\psi(v) = v$, wtedy (1) są postaci:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot v \cdot \cos u \\ y &= a \cdot v \cdot \sin u \\ z &= v \end{aligned} \quad (2b)$$

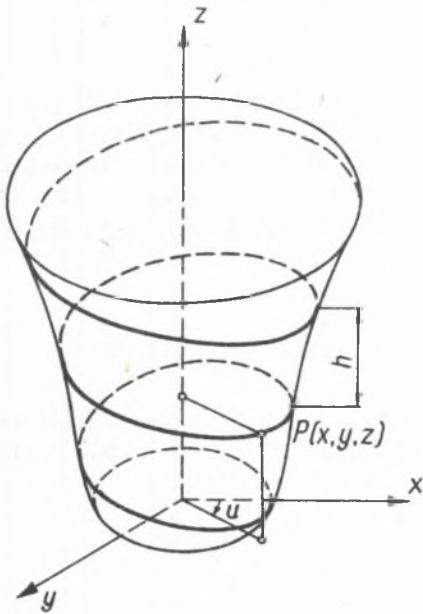
które są równaniami stożka. Jeżeli natomiast przyjmiemy $\varphi(v) = \sqrt{R^2 - (v-R)^2}$, $\psi(v) = v$, wówczas będzie

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{R^2 - (v-R)^2} \cdot \cos u \\ y &= \sqrt{R^2 - (v-R)^2} \cdot \sin u \\ z &= v \end{aligned} \quad (2c)$$

gdzie parametr $v \in (0, 2R)$. Równania te przedstawiają powierzchnie kuli o promieniu R i o środku $S(0, 0, R)$. Powierzchnie o równaniach (2a), (2b) i (2c) ilustrują rysunki 2a, 2b i 2c.

3. Równania parametryczne linii nawiniętych na powierzchnie obrotowe

Napiżemy teraz równania linii nawiniętych na powierzchnie omówione w poprzednim paragrafie, które nazwiemy pseudośrubowymi. Przez linię pseudo-



Rys. 3. Linia pseudośrubowa na bryle obrotowej

śrubową będziemy rozumieć tu linię nawiniętą na pewną powierzchnię obrotową o osi p , której każdy punkt ma tę własność, że jego odległość od pewnej płaszczyzny prostopadłej do osi p jest proporcjonalna do kąta obrotu wokół tej osi. Równania tych linii napiszemy przyjmując oś z jako oś obrotu, zaś płaszczyzną o której mowa powyżej będzie płaszczyzna xy . Skoro współrzędna z ma być proporcjonalna do kąta obrotu u , więc przyjmijmy $z = \frac{h}{2\pi} u$, ale ponieważ $z = v$, więc równania linii pseudośrubowych otrzymamy, gdy w równaniach (1) uwzględnimy związek $v = \frac{h}{2\pi} u$, gdzie wielkość h jest skokiem tej linii. Równania te mają postać:

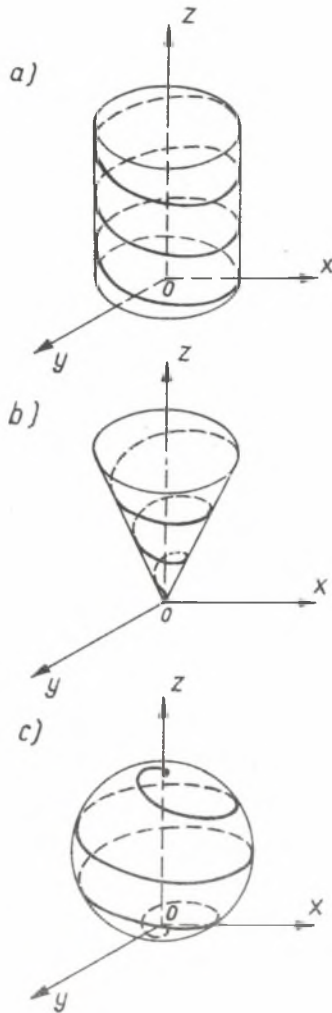
$$\begin{aligned}x &= \varphi\left(\frac{h}{2\pi}u\right) \cdot \cos u \\y &= \varphi\left(\frac{h}{2\pi}u\right) \cdot \sin u \\z &= \frac{h}{2\pi} u\end{aligned}\quad (3)$$

Gdy w równaniach tych parametr u zmienia się od 0 do 2π , wtedy otrzymamy jeden zwój tej linii. Szczególne przypadki tych linii na walcu, stożku i kuli otrzymamy, gdy w równaniach (2a), (2b) i (2c) uwzględnimy związek $v = \frac{h}{2\pi} u$, który dla skrótowania oznaczymy przez $v = b \cdot u$. Po uwzględnieniu tego w równaniach (2a) otrzymamy klasyczną linię śrubową na walcu o równaniach:

$$\begin{aligned}x &= R \cdot \cos u \\y &= R \cdot \sin u \\z &= b \cdot u\end{aligned}\quad (3a)$$

Równania linii pseudośrubowej na stożku będą miały postać:

$$\begin{aligned}x &= a \cdot b \cdot u \cdot \cos u \\y &= a \cdot b \cdot u \cdot \sin u \\z &= b \cdot u\end{aligned}\quad (3b)$$

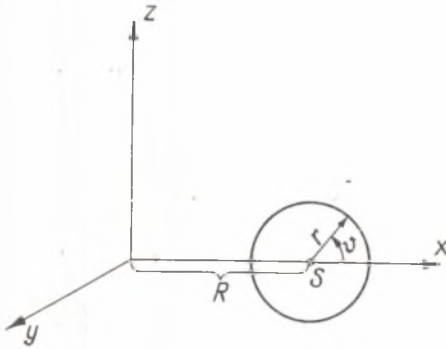


Rys. 3. a, b, c. Linie pseudośrubowe na walcu, stożku i kuli

Analogicznie z równań (2) otrzymamy linię pseudośrubową na kuli

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{R^2 - (bu-R)^2} \cdot \cos u \\
 y &= \sqrt{R^2 - (bu-R)^2} \cdot \sin u \\
 z &= bu
 \end{aligned}
 \tag{3c}$$

Linie te pokazane są na rys. 3a, 3b i 3c.

4. Równania linii nawiniętych na torus

Rys. 4. Okrąg generujący torus

W paragrafie tym napiszemy równania parametryczne linii nawiniętych na torus. Torus jak wiadomo jest to powierzchnia jaka powstaje przez obrót okręgu wokół osi nie przecinającej tego okręgu i leżącej w jego płaszczyźnie. Wyprowadzimy jego równanie. Niech w płaszczyźnie (xz) będzie dany okrąg o promieniu r i o środku w punkcie $S(R,0,0)$, przy czym $0 < r < R$, (rys. 4). Jego równania parametryczne będą miały postać:

$$\begin{aligned} x &= R + r \cdot \cos v \\ z &= r \cdot \sin v \end{aligned} \quad (4)$$

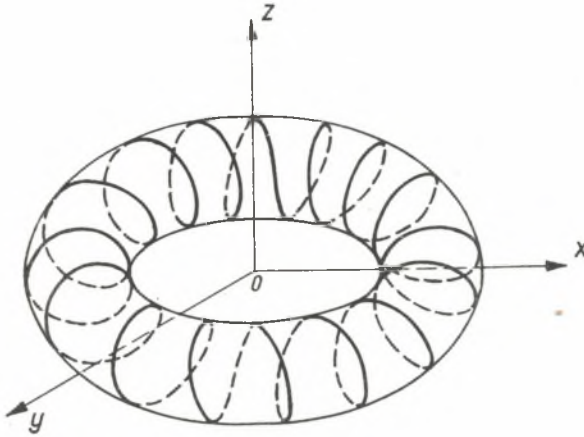
przy czym parametr $v \in (0, 2\pi)$. Ponieważ torus jest bryłą obrotową, więc równania (4) są jeszcze jednym szczególnym przypadkiem funkcji $\varphi(v)$ i $\psi(v)$ w równaniach (1). Aby więc otrzymać równania torusa wystarczy je uwzględnić w (1). Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cdot \cos v) \cdot \cos u \\ y &= (R + r \cdot \cos v) \cdot \sin u \\ z &= r \cdot \sin v \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym u i $v \in (0, 2\pi)$. Jeżeli w równaniach (5) uwzględnimy związek $v = p \cdot u$, wówczas otrzymamy linię o równaniach:

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \cos u \\ y &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \sin u \\ z &= r \cdot \sin pu \end{aligned} \quad (6)$$

Linia ta jest pokazana na rys. 5. Aby początek tej linii (dla $u=0$) pokrywał się z jej końcem (dla $u=2\pi$), współczynnik p winien być wielokrotnością kąta 2π . Gdy np. $p=2n\pi$ wówczas liczba n jest ilością zwojów tej linii na torusie.



Rys. 5. Linia nawinięta na torus

5. Potencjał wektorowy i indukcja magnetyczna

Obecnie oprócz szeroko stosowanych wzbudników nawiniętych na walcu, stożku, czy też kuli, coraz większą rolę odgrywają wzbudniki nawinięte na torusie. Znajdują one mianowicie zastosowanie w miernictwie magnetycznym przy dokładnych pomiarach parametrów magnetycznych ciał (materiałów). Wzbudniki toroidalne są również wykorzystywane do budowy transformatorów telemetrycznych i wzmacniaczy magnetycznych (transduktorów). W związku z tym, w paragrafie tym wyprowadzimy wzory na potencjał wektorowy i indukcję magnetyczną w oparciu o równania wyprowadzone w paragrafie trzecim. Prąd o natężeniu I płynący we wzbudniku nawiniętym na torusie jest źródłem pola magnetycznego. Interesujące nas równania potencjału wektorowego i indukcji w dowolnym punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ mają postać:

$$A_x = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds_x}{r}$$

$$A_y = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds_y}{r} \quad (7)$$

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds_z}{r}$$

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_y ds_x - r_x ds_y}{r^3} \\
 B_y &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_z ds_y - r_y ds_z}{r^3} \\
 B_z &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_x ds_z - r_z ds_x}{r^3}
 \end{aligned} \tag{8}$$

s_x, s_y, s_z są współrzędnymi dowolnego punktu linii przepływu prądu, które zgodnie ze wzorem (6) określone są równaniami:

$$\begin{aligned}
 s_x &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \cos u \\
 s_y &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \sin u \\
 s_z &= r \cdot \sin pu
 \end{aligned} \tag{9}$$

zaś ds_x, ds_y, ds_z są to współrzędne wektora stycznego do strugi prądowej, których równania można otrzymać przez zróżniczkowanie związków (9) względem zmiennej u . Mają one postać:

$$\begin{aligned}
 ds_x &= - [r \cdot p \cdot \sin pu \cdot \cos u + (R + r \cdot \cos pu) \cdot \sin u] du \\
 ds_y &= [-r \cdot p \cdot \sin pu \cdot \sin u + (R + r \cdot \cos pu) \cdot \cos u] du \\
 ds_z &= r \cdot p \cdot \cos pu \cdot du
 \end{aligned} \tag{10}$$

Wielkości r_x, r_y, r_z są współrzędnymi wektora r , którego początek leży w dowolnym punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$, a koniec na wzbudniku toroidalnym, a zatem wyrażone są wzorami:

$$\begin{aligned}
 r_x &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \cos u - x_0 \\
 r_y &= (R + r \cdot \cos pu) \cdot \sin u - y_0 \\
 r_z &= r \cdot \sin pu - z_0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Natomiast r we wzorach (7) i (8) jest długością tego wektora. Po podstawieniu związków (9) - (11) do równań (7) i (8) otrzymuje się wyrażenia na potencjał wektorowy i indukcję magnetyczną.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИНДУКТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УСТРОЙСТВА

Р е з ю м е

В статье, являющейся вступлением к геометрии индукторов, выведены параметрические уравнения намотанных линий на цилиндр, конус, шар и тор. Полученные итоги дадут возможность определить параметры электрических индукторов.

THE PARAMETRICAL EQUATIONS OF THE INDUKTORS

S u m m a r y

The parametrical equations concerning the lines rolled on the cylinder the cone, the ball and the disk have been worked out in the following article. The obtained results will enable the more exact qualification of the parametrs of the inductors. The article is treated as the introduction to the geometry of the inductors.