

Władysław Morytko
Instytut Matematyki
Maciej Brunne
Instytut Metalurgii

RÓWNANIA PARAMETRYCZNE WZBUDNIKÓW W POSTACI WĘŻOWNIC

Streszczenie. W artykule wyprowadzono równania parametryczne powierzchni wzbudników rzeczywistych przy założeniu, że przekrój pionowy przewodów wzbudników jest okręgiem. Otrzymane wzory zilustrowano obliczeniem potencjału wektorowego i indukcji dla wzbudnika nawiniętego na walec. Uwzględnienie rzeczywistych wymiarów wzbudników pozwala na dokładniejsze określenie parametrów pola elektrycznego i magnetycznego, co w rezultacie pozwala na bardziej precyzyjne określenie współzależnych parametrów w procesach metalurgicznych.

Wstęp

Artykuł niniejszy stanowi drugą część ogólnej teorii powierzchni wzbudników stosowanych w nowoczesnych urządzeniach elektrometalurgicznych. W części pierwszej zostały wyprowadzone uproszczone równania parametryczne wzbudników nawiniętych na różnych profilach. Uproszczenie to polegało na zaniedbaniu grubości przewodu wzbudnika, co sprowadziło jego powierzchnię do linii. Dla celów technicznych przybliżenie takie jest w pewnych przypadkach zadowalające. Powyższe zostało opracowane w artykule [1]. Dalszym rozwinięciem teorii wzbudników jest niniejszy artykuł. Wyprowadzono w nim równania parametryczne powierzchni wzbudników rzeczywistych przy założeniu, że przekrój pionowy jest okręgiem. Przewody tych wzbudników nawinięte są na takie powierzchnie obrotowe, jak walec, stożek, kula i torus. Uwzględnienie rzeczywistych wymiarów wzbudników pozwala na potrzebne do pewnych zastosowań w metalurgii dokładniejsze określenie parametrów pola elektrycznego i magnetycznego, a co za tym idzie, bardziej precyzyjne określenie współzależnych parametrów w procesach metalurgicznych. Szczególnie precyzyjne określenie parametrów pola magnetycznego jest niezbędne w regulowanych przy pomocy tego pola procesach krystalizacji ciekłych metali oraz w procesach dyfuzji dodatków stopowych i w uzyskiwaniu żądanej struktury metalograficznej. W urządzeniach stosowanych w fizyce atomowej wymagana jest również duża precyzja w określaniu parametrów pola elektrycznego i magnetycznego. Wyprowadzenie równań parametrycznych powierzchni wzbudników wypełnia lukę istniejącą dotychczas w literaturze dotyczącej teorii wzbudników, a w szczególności ich geometrii.

1. Ogólne równania wężownicy

W artykule [1] wyprowadziliśmy i omówiliśmy równania linii pseudośrubowych nawiniętych na różne powierzchnie obrotowe. Równania tych linii wykorzystano do obliczenia potencjału wektorowego i indukcji magnetycznej wzbudników elektromagnetycznych. W artykule niniejszym wyprowadzimy i omówimy równania pewnych powierzchni, które będą dalszym uogólnieniem teorii wyżej wspomnianych wzbudników.

Niech w przestrzennym układzie współrzędnych OXYZ będzie dana krzywa o równaniach:

$$\begin{aligned}x &= x(u) \\y &= y(u) \\z &= z(u)\end{aligned}\quad (1)$$

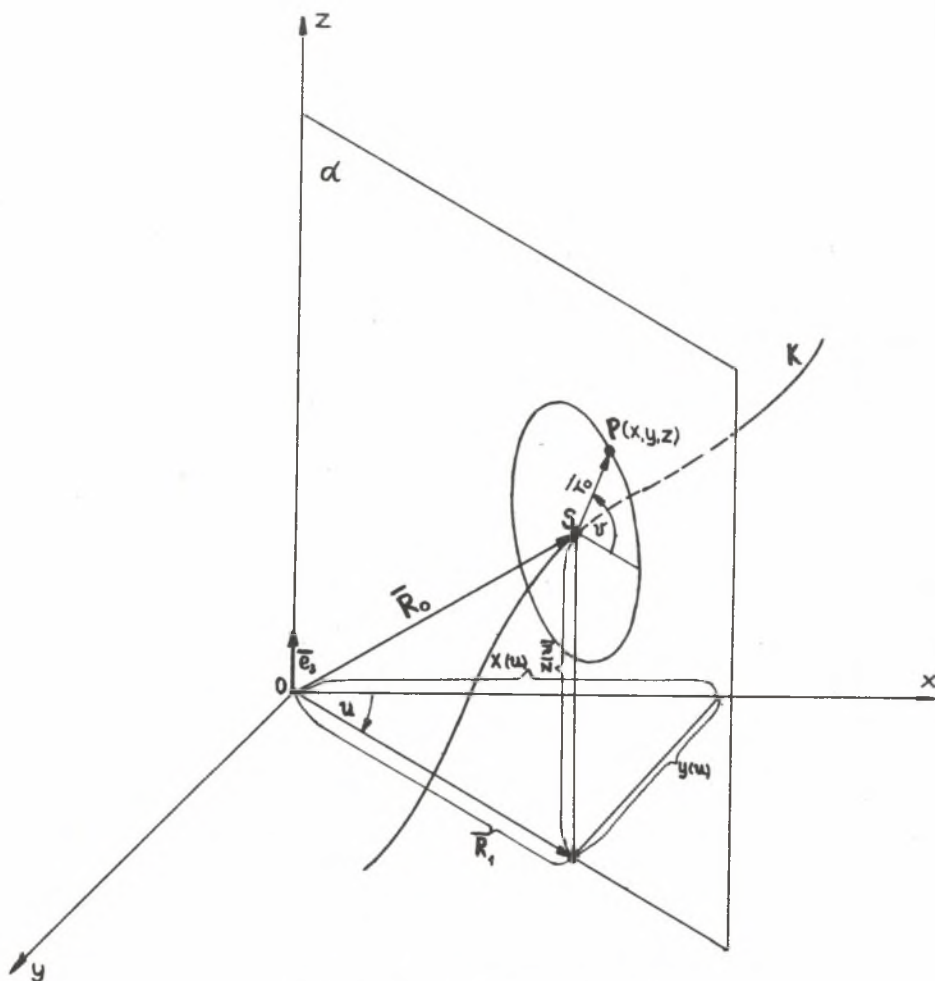
gdzie $u \in (\alpha, \beta)$ jest, zgodnie z rys. 1, kątem jaki tworzy płaszczyzna α z płaszczyzną układu (xz). Rozważmy okrąg o promieniu r_0 , którego środek S leży na tej krzywej i który leży w płaszczyźnie α przechodzącej przez oś z. Jeżeli płaszczyzna ta obraca się wokół osi z, wtedy okrąg ten, którego środek stale pozostaje na tej krzywej, wyznacza pewną powierzchnię. Napiшем jej równanie. Wektor wodzący dowolnego punktu tej powierzchni $P(x, y, z)$ jest sumą wektorów \overline{OS} i \overline{SP} , czyli $\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{r}_0$. Ale $R_0 \{x(u), y(u), z(u)\}$ i $\overline{r}_0 \{r_0 \cos v \cdot \cos u; r_0 \cos v \cdot \sin u; r_0 \sin v\}$, gdzie v jest kątem, jaki tworzy wektor \overline{r}_0 ze swoim rzutem na płaszczyznę układu (xy). A zatem: $\overline{R}(u, v) \{x(u) + r_0 \cos u \cdot \cos v; y(u) + r_0 \sin u \cdot \cos v; z(u) + r_0 \sin v\}$. Ostatecznie więc równania parametryczne tej powierzchni będą miały postać

$$\begin{aligned}x &= x(u) + r_0 \cos u \cdot \cos v \\y &= y(u) + r_0 \sin u \cdot \cos v \\z &= z(u) + r_0 \sin v\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie: $u \in (\alpha, \beta) v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Ponadto, aby powierzchnia ta nie miała samoprzecięć, zakładamy, że $R_1 > r_0$. Powierzchnię o równaniach (2) nazwiemy tu wężownicą [3], zaś linię o równaniach (1) nazwiemy jej linią centralną. Aby ta powierzchnia nie redukowała się do paska, okrąg nie może się poruszać w swojej płaszczyźnie. Wystarczy więc o krzywej K założyć, żeby rzut wektora stycznego do tej krzywej na płaszczyznę (xy) nie był równoległy do rzutu wektora R_0 na tę płaszczyznę, czyli żeby zachodził związek:

$$a \cdot \begin{vmatrix} x(u) & y(u) \\ x'(u) & y'(u) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

gdzie $a = (R_1 + r_0 \cos v) \cdot \sin v$. Ponieważ $R_1 > r_0$, więc $a = 0$ tylko wtedy, gdy $v = 0$ lub 2π . Warunek (3), jak pokazuje stosunkowo łatwy



Rys. 1. Konstrukcja wężownicy

rachunek, jest zgodny z ogólnym warunkiem wystarczającym istnienia powierzchni, a mianowicie: $\bar{R}_u \times \bar{R}_v \neq 0$, gdzie $R_u = \frac{\partial R}{\partial u}$, $R_v = \frac{\partial R}{\partial v}$ gdyż:

$$0 \neq \begin{vmatrix} x(u), y(u) \\ x'(u), y'(u) \end{vmatrix} \cdot a = [\bar{R}_1, \bar{R}_1, \bar{e}_3] = a \cdot [\bar{R}_u, \bar{R}_v, \bar{e}_3].$$

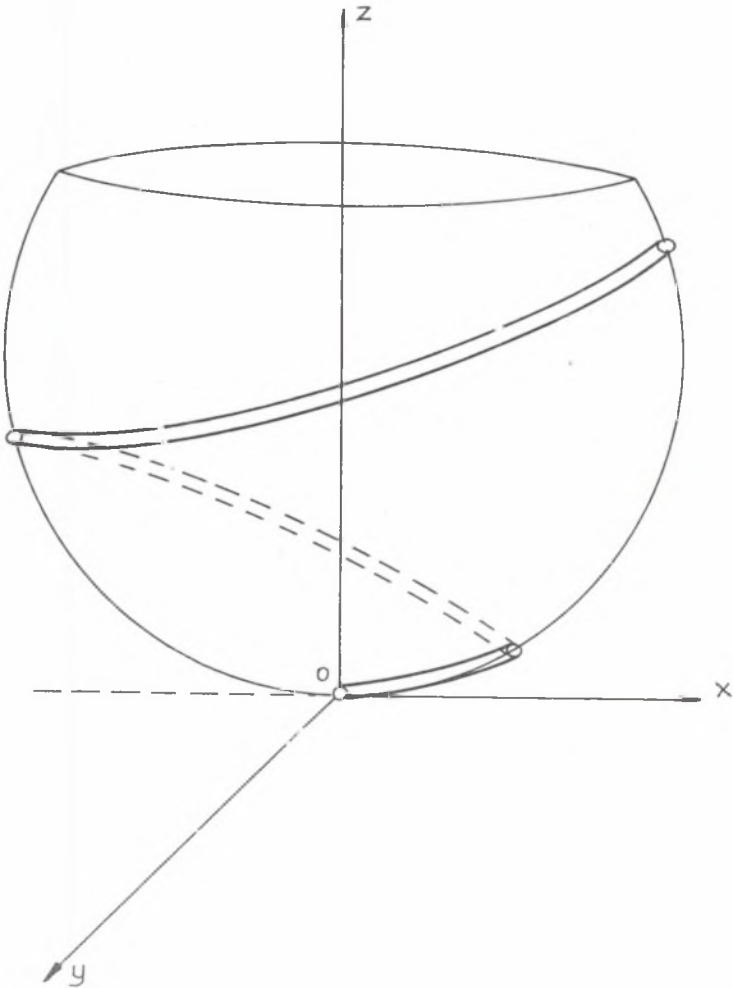
Jeżeli teraz za krzywą K przyjmiemy linię pseudośrubową o równaniach:

$$\begin{aligned} x(u) &= \varphi(bu) \cdot \cos u \\ y(u) &= \varphi(bu) \cdot \sin u \\ z(u) &= bu, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $b = \frac{h}{2\pi}$, która jest nawinięta na powierzchnię obrotową o równaniach:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \cdot \cos v \\ y &= \varphi(u) \cdot \sin v \\ z &= \psi(u) \end{aligned} \quad (5)$$

wówczas otrzymamy wężownicę nawiniętą na powierzchnię o równaniach (3) o linii centralnej o równaniach (4). Równania tej wężownicy otrzymamy, gdy do (2) podstawimy równania (4). Otrzymamy wtedy:



Rys. 2. Wężownica na bryle obrotowej

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos u \cdot \cos v + \varphi(bv) \cos v \\y &= r_0 \cos u \cdot \sin v + \varphi(bv) \sin v \\z &= r_0 \sin u + bv,\end{aligned}\quad (6)$$

gdzie u i $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ i uzyskujemy wówczas jeden zwój tej powierzchni. Powierzchnia ta pokazana jest na rys. 2. Należy zauważyć, że jej linia centralna określona równaniami (4) spełnia założenia (3), gdyż jak pokazuje łatwy rachunek, wyznacznik ten jest równy $\varphi'(bv)$.

2. Przypaunki szczególne

Gdy w równaniach (6) przyjmiemy $\varphi(t) = R$, wówczas otrzymamy równania:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos u \cdot \cos v + R \cdot \cos v \\y &= r_0 \cos u \cdot \sin v + R \cdot \sin v \\z &= r_0 \sin v + \frac{h}{2\pi} v\end{aligned}\quad (7)$$

przy czym, gdy $u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$, wówczas otrzymujemy jeden zwój tej wężownicy. Równania (7) przedstawiają równania wężownicy nawiniętej na walec o promieniu R (rys. 3).

Gdy zaś w (6) uwzględnimy $\varphi(t) = \frac{2\pi at}{h}$, wówczas otrzymamy równania:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos u \cdot \cos v + a \cdot v \cdot \cos v \\y &= r_0 \cos u \cdot \sin v + a \cdot v \cdot \sin v \\z &= r_0 \sin v + \frac{h}{2\pi} v\end{aligned}\quad (8)$$

które są równaniami wężownicy nawiniętej na stożek (rys. 4).

Jeżeli natomiast jako następny szczególny przypadek przyjmiemy $\varphi\left(\frac{h}{2\pi}v\right) = \sqrt{R^2 - (bv - R)^2}$, to otrzymamy równania:

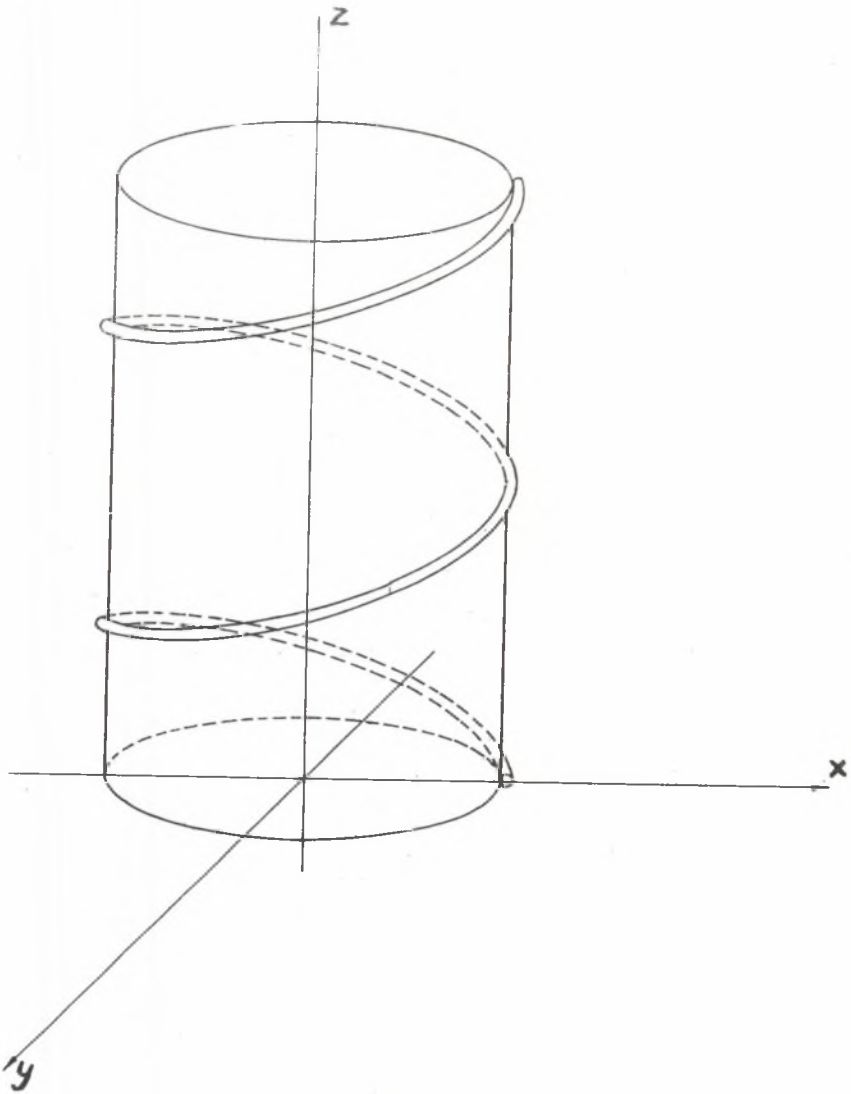
$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos u \cdot \cos v + \sqrt{R^2 - (bv - R)^2} \cdot \cos v \\y &= r_0 \cos u \cdot \sin v + \sqrt{R^2 - (bv - R)^2} \cdot \sin v \\z &= r_0 \sin v + bv\end{aligned}\quad (9)$$

gdzie $v \in \langle 0, \frac{2R}{b} \rangle$, przy czym $b = \frac{h}{2\pi}$.

Równania (9) przedstawiają wężownicę nawiniętą na kuli o promieniu R i o środku $S(0,0,R)$, która jest pokazana na rys. 5.

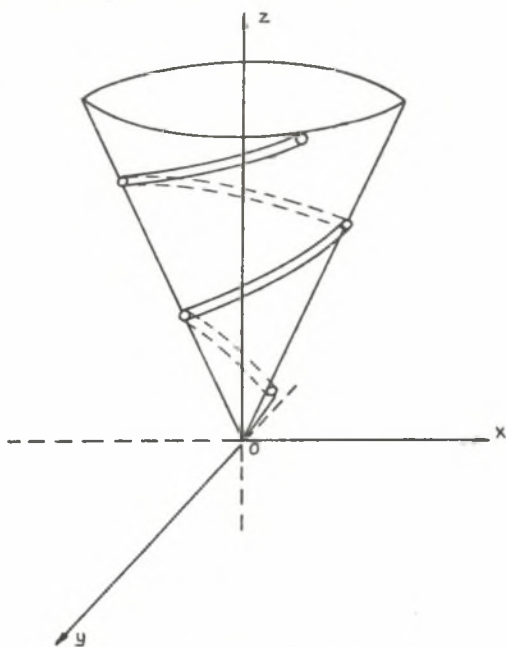
Gdy wreszcie jako linię centralną przyjmiemy linię nawiniętą na torus, to otrzymamy:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos u \cdot \cos v + (R + r \cos pu) \cdot \cos v \\y &= r_0 \cos u \cdot \sin v + (R + r \cos pu) \cdot \sin v \\z &= r_0 \sin u + r \cdot \sin pv\end{aligned}\quad (10)$$

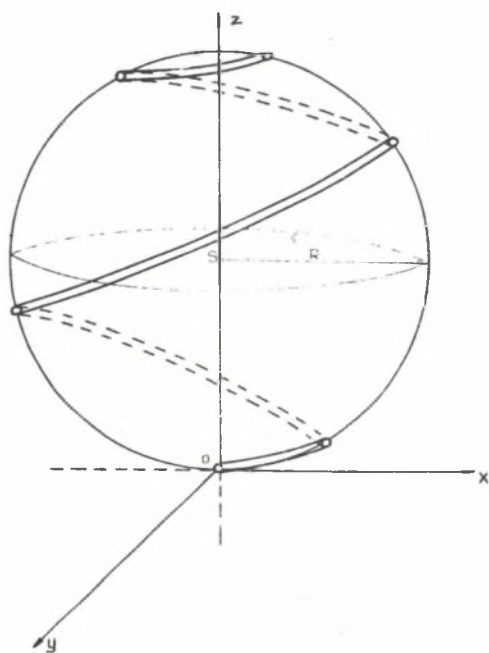


Rys. 3. Wężownica na walcu

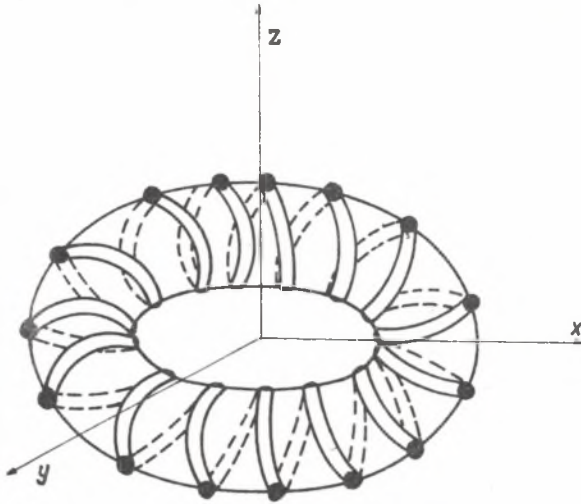
gdzie R jest promieniem torusa, r promieniem jego przekroju, r_0 tak jak w innych przypadkach jest promieniem przekroju wężownicy płaszczyzną przechodzącą przez oś z . Tak więc równania (10) przedstawiają wężownicę nawiniętą na torus, która pokazana jest na rys. 6.



Rys. 4. Wężownica na stożku



Rys. 5. Wężownica na kuli



Rys. 6. Wężownica na torusie

3. Potencjał wektorowy i indukcja magnetyczna

Ostatnio coraz większą rolę w nowoczesnej metalurgii odgrywają wzbudniki nawinięte na walec. Znajdują one szerokie zastosowanie w pompach cylindrycznych i dozownikach elektromagnetycznych. Mogą one być wykorzystywane w urządzeniach do formowania i mieszania ciekłych metali, do obróbki w polu magnetycznym materiałów ferromagnetycznych. Wzbudniki walcowe stosuje się również jako nagrzewnice wewnętrzne i zewnętrzne oraz w miernictwie magnetycznym. W związku z powyższym w paragrafie tym wyprowadzimy wzory na potencjał wektorowy i indukcję magnetyczną w oparciu o równania (6). Prąd o natężeniu I płynący we wzbudniku nawiniętym na walec jest źródłem pola magnetycznego. Interesujące nas równania potencjału wektorowego i indukcji w dowolnym punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ mają postać:

$$A_x = \frac{\mu I}{4\pi} \iiint_V J \frac{dx}{r} d\varrho du; \quad B_x = \text{rot}_x \bar{A}$$

$$A_y = \frac{\mu I}{4\pi} \iiint_V J \frac{dy}{r} d\varrho du; \quad B_y = \text{rot}_y \bar{A}$$

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \iiint_V J \frac{dz}{r} d\varrho du; \quad B_z = \text{rot}_z \bar{A}$$

gdzie dx, dy, dz są współrzędnymi wektora stycznego do strugi prądowej, których równania można otrzymać przez zróżniczkowanie związków (4) względem zmiennej u . Wielkość r jest długością wektora \bar{r} , którego począ-

tek leży w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$, zaś jego koniec jest dowolnym punktem (wewnętrznym lub brzegowym) wzbudnika walcowego. Wielkość J jest jacobianem określonym wzorem:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{vmatrix}$$

Po wykonaniu różniczkowania równań (7) względem zmiennych u , v i $\rho = r_0$ i obliczeniu wyznacznika jacobian ten jest równy:

$$J = -\rho (\rho \cdot \cos u + R)$$

Natomiast obszar całkowania V jest to część wężownicy nawiniętej na walec, a więc jest to obszar przestrzenny V określony nierównościami:

$$V: \begin{cases} \alpha \leq u \leq \beta \\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq r_0 \end{cases}$$

LITERATURA

- [1] Morytko W., Brunne M.: Równania parametryczne wzbudników urządzeń elektrometalurgicznych. "Hutnictwo" - Zeszyty Naukowe Polit. Sl. nr 6,
- [2] Biernacki M.: Geometria różniczkowa, część I, PWN 1954 r.
- [3] Szerszeń St.: Nauka o rzutach, Warszawa, PWN 1959.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИНДУКТОРОВ В ВИДЕ ЗМЕЕВИКА

Резюме

В статье выведено уравнение параметрической поверхности индуктора реального принимая во внимание, что вертикальное сечение провода индуктора является окружностью. Полученные формулы иллюстрированы расчетом векторного потенциала и индукции для индуктора намотанного на цилиндр.

PARAMETRIC EQUATIONS OF REAL INDUCTORS IN THE FORM OF COIL

S u m m a r y

In the article, the parametric equations of real inductors surface have been derived under condition that the vertical section of inductor leads has a shape of a circle. The obtained formulae have been illustrated with the calculation of vector potential and induction for the inductor coiled on a cylinder. Taking into consideration the real sizes of the inductors we can define more precisely the parameters of the electric and magnetic field which eventually allows to define more exactly the interdependent parameters in metallurgical processes.