ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Hutnictwo z. 8 Nr kol. 485

Franciszek Fikus, Tadeusz W. Wieczorek
Instytut Metalurgii

OBLICZANIE PARAMETRÓW ELEKTRYCZNYCH WZBUDNIKA CYLINDRYCZNEJ NAGRZEWNICY ZEWNĘTRZNEJ Z BOCZNIKIEM MAGNETYCZNYM

Streszczenie. Nagrzewnice indukcyjne w hutnictwie ze szczególnym uwzględnieniem cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej. Wzory na reaktancję, rezystancję i impedancję układu wsad-wzbudnik z bocznikiem magnetycznym. Posłużono się modelem obliczeniowym, w którym:

- wsad zastąpiono nieskończenie długim walcem o stałej przenikalności magnetycznej i konduktywności,
- wzbudnik zastąpiono cylindrem z folii o grubości pomijalnie małej i wysokości 2h,
- bocznik magnetyczny zastąpiono cylindrem o $\mu = \infty$, $\sigma = 0$.

Dla rozwiązania zagadnienia elektromagnetycznego wykorzystano "metodę z szeregiem Fouriera" [1].

Wzory na reaktancję i rezystancję wniesioną dla c (c - promień bocznika magnetycznego rys. 1) przechodzą w analogiczne, otrzymane w [2] dla układu wsad-wzbudnik bez bocznika magnetycznego.

1. Wstęp

W hutnictwie coraz szerzej stosuje się nagrzewnice indukcyjne, tj. urządzenia służące do nagrzewania materiałów (wsadów) o dobrej konduktywności. Powoduje to szczególnie widoczne w ostatnim dziesięcioleciu zwiększenie zainteresowania metodami obliczania nagrzewnic. Z powodu stałego powiększania wielkości i mocy pobieranej przez te urządzenia, a tym samym i kosztów eksploatacji, od metod obliczeniowych wymaga się większej dokładności, przy jednocześnie niezbyt dużej pracochłonności.

Rozróżnia się nagrzewnice indukcyjne z bocznikiem magnetycznym i bez bocznika. Boczniki magnetyczne stosowane są w nagrzewnicach:

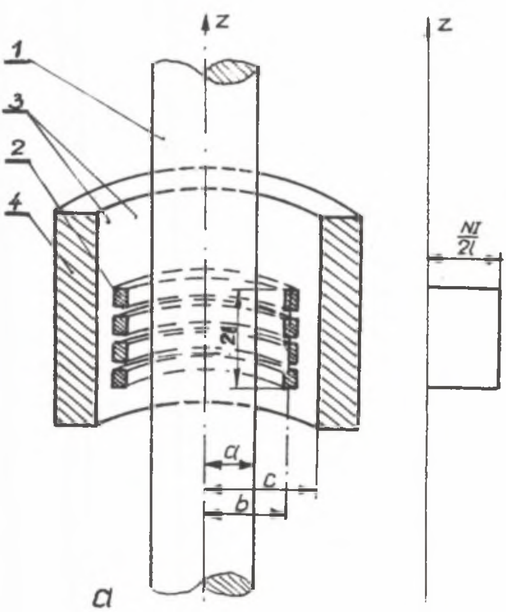
1) w których stosunek długości uzwojenia (wzbudnika) do jego średnicy jest mały,
2) przy niskich częstotliwościach.

Problem nagrzewnicy zewnętrznej bez bocznika został rozpatrzony w [2]. Przedmiotem niniejszego artykułu jest obliczenie parametrów elektrycznych układu wsad-wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej z bocznikiem magnetycznym. Obliczaniu parametrów elektrycznych (impedancji, rezystancji i reaktancji) poświęca się w literaturze światowej corocznie kilka pozycji. Najdokładniejszy sposób obliczania parametrów elektrycznych został opracowany w ZSRR przez K.M. Machmudowa, A.E. Słuchockiego, W.S. Niemkowa. Przedstawiony artykuł stanowi dalsze udoskonalenie tego podejścia.

Metoda stosowana w niniejszym artykule bazuje na szeregu Fouriera [1]. Przybliżenie to polega na zastąpieniu pojedynczego wzbudnika nieskończonym zespołem identycznych wzbudników o długościach 2 l i odstępach 2 h. Korzyścią wynikającą z tego przybliżenia jest możliwość zapisania rozwiązań równań Maxwella za pomocą szeregów. Przybliżenie jest tym lepsze, im większy jest stosunek 2h : 2 l.

2. Potencjał wektorowy układu wsad-wzbudnik z bocznikiem magnetycznym

Potencjał wektorowy układu wsad-wzbudnik z bocznikiem magnetycznym rys. 1b) będzie się obliczać metodą z szeregiem Fouriera [1]. Wzbudnik (1) zasilany jest prądem sinusoidalnym o stałym natężeniu I. Wsad metaliczny (2) ma postać nieskończenie długiego walca o promieniu a. Przenikalność magnetyczną μ i konduktywność σ uważa się za stałe w całej objętości wsadu[x)]. Bocznik magnetyczny (3) w postaci cylindra o $\mu = \infty$ i promieniu c jest także nieskończenie długi. Pole magnetyczne styczne od wsadu i wzbudnika nie wnika do bocznika magnetycznego. W odległości b od osi symetrii znajduje się wzbudnik w postaci nieskończenie wielu cylindrów o wysokościach 2l i grubościach pomijalnie małych. Odstępy pomiędzy sąsiednimi cylindrami wynoszą 2h. Okład prądowy wzbudnika równa się $\frac{N\,I}{2\,l}\left[\frac{Az}{m}\right]$, gdzie N jest ilością zwojów wzbudnika na jednostkę długości, natomiast prądy w sąsiednich wzbudnikach są przesunięte w fazie o kąt 180°.



Rys. 1a. Układ wsad-wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej z bocznikiem magnetycznym

1 - wsad cylindryczny, 2 - wzbudnik, 3 - bocznik magnetyczny, 4 - szczeliny powietrzne

Okład prądowy wzbudnika można zapisać za pomocą cosinus-transformaty Fouriera.

---

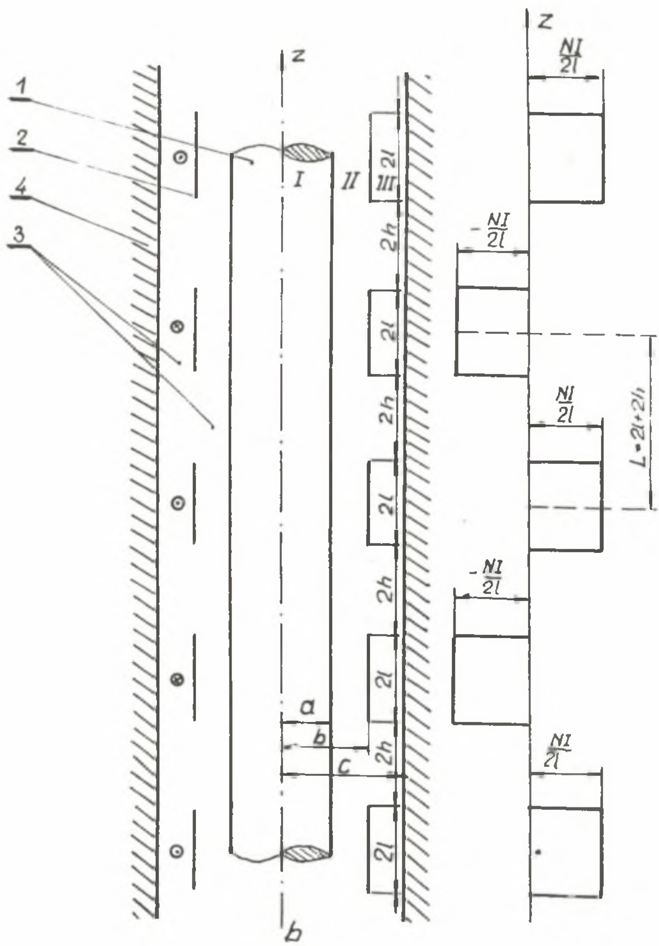
x) Założenie to redukuje zakres zastosowania metody do metali niemagnetycznych. Dla metali magnetycznych należy wsad podzielić na warstwy, w których μ i σ są stałe.

$$J(z) = \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} J_n \cos k_n z, \tag{2-1}$$

gdzie

$$J_n = \frac{4}{T}\int_0^l J^o \cos k_n\lambda \, d\lambda = \frac{4J^o}{T} \frac{\sin k_n l}{k_n} = \frac{4}{n\pi}\frac{N}{2}\frac{I}{l} \sin k_n l; \quad k_n = \frac{n\pi}{T} \tag{2-2}$$

$$T = 2l + 2h$$



Rys. 1b. Układ wsad-wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej z przynależnym modelem obliczeniowym

1 - wsad cylindryczny, 2 - wzbudnik, 3 - bocznik magnetyczny, 4 - szczeliny powietrzne

Pole elektryczne i magnetyczne układu wsad-wzbudnik, przedstawionego na (rys. 1b), spełnia równania Maxwella

$$\mathrm{rot}\ \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{a}$$

$$\mathrm{rot}\ \bar{H} = \bar{J} \qquad \text{b (2-3)}$$

$$\mathrm{div}\ \bar{B} = 0 \qquad \text{c}$$

oraz zależność

$$\bar{B} = \mu H, \tag{2-4}$$

gdzie

μ - przenikalność magnetyczna wsadu,
σ - konduktywność wsadu,

natomiast gęstość prądu indukowanego we wsadzie

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}. \tag{2-5}$$

Definiuje się potencjał wektorowy $\bar{A}$

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\ \bar{A} \tag{2-6}$$

oraz

$$\mathrm{div}\ \bar{A} = 0 \tag{2-7}$$

Zgodnie z [3] potencjał wektorowy $\bar{A}$ spełnia dwuwymiarowe równanie różniczkowe we współrzędnych walcowych $(r,\ z,\ \varphi)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\bar{A}\varphi(r,z) = 0 \tag{2-8}$$

$$k^2 = j\omega\mu\sigma \tag{2-9}$$

a $\omega = 2\pi f$ pulsacja prądu.

Równanie (2-8) rozwiązuje się metodą rozdzielenia zmiennych

$$A_\varphi(r,z) = F_1(r)\ F_2(z) \tag{2-10}$$

a) Rozwiązanie dla wzbudnika A_{φ}^{s} x)

Dla wzbudnika w równaniu (2-8) należy położyć $k^2 = 0$, gdyż $\sigma^s = 0$. Tak więc wykorzystując (2-10), otrzymuje się układ równań

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k_n^2\right]F_1(r) = 0 \qquad \text{a}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_n^2\right]F_2(z) = 0, \qquad \text{b} \tag{2-11}$$

gdzie k_n^2 - stała rozdzielania zmiennych.

Rozwiązaniem równania (2-11) jest

$$A^s(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left[C_n\, I_1(k_n r) + D_n K_1(k_n r)\right] \times$$
$$\times \left[E_n \sin k_n z + F_n \cos k_n z\right] \tag{2-12}$$

C_n, D_n, E_n, F_n stałe całkowania.

Ponieważ układ na rys. 1 jest symetryczny względem osi z, więc rozwiązanie (2-12) winno być funkcją parzystą z. Dlatego $E_n = 0$.
Ostatecznie

$$A_{\varphi}^{s}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left[C_n I_1(k_n r) + D_n K_1(k_n r)\right]\cos k_n z \tag{2-13}$$

W poszczególnych obszarach obliczeniowych:

Obszar II $\qquad 0 \leqslant r \leqslant b; \quad -\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

$$A_{\varphi}^{sII}(r.z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n I_1(k_n r)\cos k_n z, \tag{2-14}$$

ponieważ $K_1(0) = \infty$, a potencjał A_{φ}^{sII} powinien być w tym punkcie skończony.

x) Wielkości elektromagnetyczne związane z poszczególnymi elementami układu będzie się zapisywać z indeksem u góry:
- s wzbudnik
- w wsad
- f bocznik

Obszar III $b \leqslant r \leqslant \infty$; $-\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

$$A_{\varphi}^{sIII}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} D_n K_1(k_n r) \cos k_n z, \tag{2-15}$$

ponieważ $I_1(\infty) = \infty$, a potencjał A_{φ}^{sIII} powinien być w tym punkcie skończony.

Stałe całkowania równań (2-14) - (2-15) C_n i D_n oblicza się z warunków brzegowych

$$A_{\varphi}^{sII}\Big|_{r=b} = A_{\varphi}^{sIII}\Big|_{r=b} \qquad a$$

$$(2\text{-}16)$$

$$\left(\mathrm{rot}_z A_{\varphi}^{sII} - \mathrm{rot}_z A_{\varphi}^{sIII}\right)\Big|_{r=b} = \mu_o J_n \qquad b$$

Ponieważ

$$\mathrm{rot}_z A\varphi = \frac{A\varphi}{r} + \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r},$$

więc otrzymuje się ostatecznie

$$C_n = \mu_o\ b\ J_n\ K_1(k_n b) \qquad a$$

$$(2\text{-}17)$$

$$D_n = \mu_o\ b\ J_n\ I_1(k_n b) \qquad b$$

b) Rozwiązanie dla wsadu A_{φ}^{w}

Dla wsadu w równaniu (2-8) nie można wprowadzić żadnych uproszczeń, dlatego przy uwzględnieniu (2-10) i postępując analogicznie jak w przypadku a), otrzymuje się następujące wyrażenia na potencjał wektorowy

$$A_{\varphi}^{w}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[E_n\ I_1(\lambda_n r) + F_n\ K_1(\lambda_n r)\right] \cos k_n z, \tag{2-18}$$

gdzie

$$\lambda_n^2 = k_n^2 + k^2 \tag{2-18a}$$

W poszczególnych obszarach obliczeniowych, zgodnie z tym co zostało już powiedziane wyżej, otrzymuje się

Obszar I $0 \leqslant r \leqslant a$; $-\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

$$A_{\varphi}^{wI}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} E_n\ I_1(\lambda_n r) \cos k_n z \qquad (2\text{-}19$$

Obszary II i III $a \leqslant r \leqslant \infty$; $-\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

$$A_{\varphi}^{wII}(r,z) = A_{\varphi}^{wIII}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} F_n K_1(k_n r) \cos k_n z, \qquad (2\text{-}20)$$

bowiem w tych obszarach należy podstawić $k^2 = 0$ ($\sigma^w = 0$).

c) Rozwiązanie dla bocznika A_{φ}^{f}

W przypadku bocznika należy w równaniu (2-8) także przyjąć $k^2 = 0$, gdyż konduktywność $\sigma^f = 0$. Za pomocą analogicznych rozważań otrzymuje się dla:

Obszarów II i III $0 \leqslant r \leqslant c$; $-\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

$$A_{\varphi}^{fII} = A_{\varphi}^{fIII}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} P_n I_1(k_n r) \cos k_n z. \qquad (2\text{-}21)$$

Obszar dla $r > c$ nie podlega obliczeniom, gdyż nie istnieje tam pole elektromagnetyczne ($\mu^f = \infty$, $\sigma^f = 0$).
Korzystając z zależności (2-14) - (2-21) można napisać równania na potencjały wypadkowe w poszczególnych obszarach obliczeniowych:

$$A_{\varphi}^{I}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} E_n I_1(\lambda_n r) \cos k_n z \qquad (2\text{-}22)$$

$$A_{\varphi}^{II}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Big[F_n K_1(k_n r) + P_n I_1(k_n r) + + \mu_0 b J_n K_1(k_n b) I_1(k_n r)\Big] \cos k_n z \qquad (2\text{-}23)$$

$$A_{\varphi}^{III}(r,z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Big[F_n K_1(k_n r) + P_n I_1(k_n r) + + \mu_0 b J_n I_1(k_n b) K_1(k_n r)\Big] \cos k_n z. \qquad (2\text{-}24)$$

Stałe całkowania E_n, F_n, P_n występujące w powyższych równaniach, oblicza się stosując warunki brzegowe, które wyrażają ciągłość funkcji (potencjału) i jej pochodnej na granicach obszarów

$$\begin{aligned} A_{\varphi}^{I}(r,z)\Big|_{r=a} &= A_{\varphi}^{II}(r,z)\Big|_{r=a} && a \\ \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_z A_{\varphi}^{I}(r,z)\Big|_{r=a} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}_z A_{\varphi}^{II}(r,z)\Big|_{r=a} && b \end{aligned} \qquad (2\text{-}25)$$

$$\operatorname{rot}_z A_\varphi^{III}(r,z)\Big|_{r=c} = 0,$$

skąd otrzymuje się:

$$E_n = \frac{\mu_o\ b\ K_1(k_n b)}{a}\left[\frac{1+\dfrac{Q_o(k_n c)}{Q_1(k_n b)}}{\Phi_{n1} - \Phi_{n2}\ Q_o(k_n c)}\right] J_n \tag{2-26}$$

$$F_n = \mu_o\ b\ K_1(k_n b)\ \Phi_{n1}\left[\frac{1+\dfrac{Q_o(k_n c)}{Q_1(k_n b)}}{\Phi_{n1} - \Phi_{n_2}\ Q_o(k_n c)}\right] J_n \tag{2-27}$$

$$P_n = \mu_o\ b\ I_1(k_n b)\ Q_o(k_n c)\left[\frac{\Phi_{n1} + \Phi_{n2}\ Q_1(k_n b)}{\Phi_{n1} - \Phi_{n2}\ Q_o(k_n c)}\right] J_n, \tag{2-28}$$

gdzie

$$Q_m(k_n r) = \frac{K_m(k_n r)}{I_m(k_n r)} \qquad a$$

$$\Phi_{n1} = k_n\ I_1(\lambda_n a)\ K_o(k_n a) + \lambda_n\ {}_o(\lambda_n a)\ K_1(k_n a) \qquad b \tag{2-29}$$

$$\Phi_{n2} = k_n\ I_1(\lambda_n a)\ I_o(k_n a) - \lambda_n\ I_o(\lambda_n a)\ I_1(k_n a). \qquad c$$

Postać stałej E_n (zgodną z [3]) podano jedynie dla pełności wywodu. W dalszym ciągu nie będzie ona wykorzystywana.

3. Rezystancja i reaktancja wniesiona

Znajomość potencjału wektorowego układu, przedstawionego na (rys. 1) wystarcza do obliczenia jego parametrów elektrycznych. Dla tych obliczeń wygodnie jest przedstawić potencjał wektorowy (2-23) jako sumę:

$$A_\varphi = A_\varphi^o + A_\varphi^1, \tag{3-1}$$

gdzie

$$A_\varphi^o = \frac{2\mu_o\ b\ N\ I}{l\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n l\ \cos k_n z}{n}\ \times$$

$$\times\ K_1(k_n b)\ I_1(k_n b) \tag{3-1a}$$

$$A_{\varphi}^{1} = \frac{2\mu_o\, b\, N\, I}{\pi\, l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin k_n l \cos k_n z\, I_1(k_n b)}{n\left[\Phi_{n1} - \Phi_{n2}\, Q_o(k_n c)\right]} \times$$

$$\times \left\{ K_1(k_n b)\, \Phi_{n2} \left[2\, Q_o(k_n c) + Q_1(k_n b)\right] + \Phi_{n1}\, Q_o(k_n c)\, I_1(k_n b) \right\} \tag{3-1b}$$

A_{φ}^{1}, jak wynika z (2-9) i (2-18a), jest wielkością zespoloną, więc można napisać

$$A_{\varphi}^{1} = \mathrm{Re}\, A_{\varphi}^{1} + j\, \mathrm{Im}\, A_{\varphi}^{1}. \tag{3-2}$$

Napięcie U, przyłożone do wzbudnika, jest zgodnie z [2] sumą następujących wyrażeń:

$$U = I\, R_1 + j\, 2\pi\omega b\, N \int_{-L}^{L} A_{\varphi}^{o}\, dz + j\, 2\pi\omega b\, N \int_{-L}^{L} \mathrm{Re}\, A_{\varphi}^{1}\, dz - $$

$$ - 2\pi\omega b\, N \int_{-L}^{L} \mathrm{Im}\, A_{\varphi}^{1}\, dz, \tag{3-3}$$

gdzie

R_1 - rezystancja zwoju wzbudnika.

Wykonując całkowanie i dzieląc równanie (3-3) obustronnie przez prąd wzbudnika I, otrzymuje się impedancję układu wsad-wzbudnik

$$Z = R_1 + j\, 8\pi\mu_o \omega N^2\, b^2\, L \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin^2 k_n l}{n^2\, \pi^2\, l}\, K_1(k_n b)\, I_1(k_n b) + $$

$$ + j\, 8\pi\mu_o \omega N^2\, b^2\, L \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin^2 k_n l}{n^2\, \pi^2\, l}\, \mathrm{Re}\, F(\lambda_n a) - \tag{3-4}$$

$$ - 8\pi\mu_o \omega N^2\, b^2\, L \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin^2 k_n l}{n^2\, \pi^2\, l}\, \mathrm{Im}\, F(\lambda_n a),$$

gdzie

$$F(\lambda_n a) = \frac{I_1(k_n b)}{\Phi_{n1} - \Phi_{n2}\, Q_o(k_n c)} \left\{ \Phi_{n2}\, K_1(k_n b) \left[2\, Q_o(k_n c) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + Q_1(k_n b)\right] + \Phi_{n1}\, Q_o(k_n c)\, I_1(k_n b) \right\} \tag{3-5}$$

Równanie (3-4), przedstawiające impedancję układu wsad-wzbudnik, składa się z czterech wyrażeń, spośród których dwa są liczbami rzeczywistymi, a dwa urojonymi. Składniki trzeci i czwarty są funkcjami promienia wsadu a i parametru λ_n (2-18a), który z kolei zależy od konduktywności i przenikalności magnetycznej wsadu; są więc one reaktancją i rezystancją wniesioną na skutek wprowadzenia wsadu do wzbudnika. Oznaczać się je będzie X_2' i R_2'. Składnik drugi (urojony) zależy tylko od parametrów wzbudnika b, l, jest więc reaktancją wzbudnika X_1.

Zgodnie z [4] reaktancja pustego wzbudnika bez uwzględnienia wpływu końców wyraża się wzorem

$$X_{10} = 2\pi\mu_0 \omega b^2 N^2 L \tag{3-6}$$

Uwzględniając więc (3-6) w równaniu (3-4), rezystancję i reaktancję wniesioną oraz reaktancję wzbudnika można zapisać w postaci:

$$X_1 = X_{10} \frac{4}{\pi^2 l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} K_1(k_n b)\, I_1(k_n b) \frac{\sin^2 k_n l}{n^2} = X_{10}\, u \tag{3-7}$$

$$X_2 = -X_2' = -X_{10} \frac{4}{\pi^2 l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \operatorname{Re} F(\lambda_n a) \frac{\sin^2 k_n l}{n^2} = X_{10}\, v \tag{3-8}$$

$$R_2 = -R_2' = -X_{10} \frac{4}{\pi^2 l} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \operatorname{Im} F(\lambda_n a) \frac{\sin^2 k_n l}{n^2} = X_{10}\, w, \tag{3-9}$$

gdzie v, w są współczynnikami reaktancji i rezystancji wniesionych, natomiast u jest strukturalnie podobny do współczynnika Nagaoka [4].

Równanie (3-4) przy uwzględnieniu ostatnich zależności przyjmie postać

$$Z = R_1 + R_2 + j\left[X_1 - X_2\right] \tag{3-10}$$

4. Współczynniki u, v, w

Dla jawnego wyrażenia współczynników oporów wniesionych u, v, w należy znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $F(\lambda_n a)$ - (3-5), gdzie zespolona wielkość λ_n dana jest równaniem (2-18a). Tak więc można napisać

$$\lambda_n = \operatorname{Re}\lambda_n + j \operatorname{Im}\lambda_n = r_n\, e^{j\alpha_n}. \tag{4-1}$$

Zgodnie z [4]

$$I_0(\lambda_n a) = \operatorname{Re} J_0(\lambda_n^* a) - j \operatorname{Im} J_0(\lambda_n^* a) \tag{4-1}$$

$$I_1(\lambda_n a) = \mathrm{Im}\, J_1(\lambda_n^* a) + j\, \mathrm{Re}\, J_1(\lambda_n^* a), \tag{4-3}$$

gdzie

$$\lambda_n^* = r_n\, e^{j\varphi_n}$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} - \alpha_n$$

Toteż $F(\lambda_n a)$ wyraża się wzorem:

$$\mathrm{Re}\, F(\lambda_n a) = I_1(k_n b)\ \frac{k_n^2\, C_1\, C_3\, B_1 + r_n^2\, C_2\, C_4\, B_2 + \ldots}{k_n^2\, B_1\, C_1^2 + r_b^2\, B_2\, C_2^2 + \ldots}$$

$$\frac{\ldots + k_n \left[C_1\, C_4 + C_2\, C_3\right]\left[\mathrm{Re}\lambda_n\, B_3 + \mathrm{Im}\,\lambda_n\, B_4\right]}{\ldots + 2\, k_n\, C_1\, C_2 \left[\mathrm{Re}\lambda_n\, B_3 + \mathrm{Im}\lambda_n\, B_4\right]} \tag{4-4}$$

$$\mathrm{Im}\, F(\lambda_n a) = I_1(k_n b)\ \frac{k_n \left[C_2\, C_3 - C_1\, C_4\right] x \ldots}{k_n^2\, B_1\, C_1^2 + r_n^2\, B_2\, C_2^2 + \ldots}$$

$$\frac{\ldots\ x \left[\mathrm{Re}\,\lambda_n\, B_4 - \mathrm{Im}\,\lambda_n\, B_3\right]}{\ldots + 2\, k_n\, C_1\, C_2 \left[\mathrm{Re}\,\lambda_n\, B_3 + \mathrm{Im}\,\lambda_n\, B_4\right]}, \tag{4-5}$$

gdzie

$$B_1 = \left[\mathrm{Re}\, J_1(\lambda_n^* a)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\, J_1(\lambda_n^* a)\right]^2 \tag{4-6a}$$

$$B_2 = \left[\mathrm{Re}\, J_o(\lambda_n^* a)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\, J_o(\lambda_n^* a)\right]^2 \tag{4-6b}$$

$$B_3 = \mathrm{Re}\, J_o(\lambda_n^* a)\ \mathrm{Im}\, J_1(\lambda_n^* a) - \mathrm{Re}\, J_1(\lambda_n^* a)\ \mathrm{Im}\, J_o(\lambda_n^* a) \tag{4-6c}$$

$$B_4 = \mathrm{Re}\, J_o(\lambda_n^* a)\ \mathrm{Re}\, J_1(\lambda_n^* a) + \mathrm{Im}\, J_o(\lambda_n^* a)\ \mathrm{Im}\, J_1(\lambda_n^* a) \tag{4-6d}$$

$$C_1 = K_o(k_n a) - I_o(k_n a)\ Q_o(k_n c) \tag{4-7a}$$

$$C_2 = K_1(k_n a) + I_1(k_n a)\ Q_o(k_n c) \tag{4-7b}$$

$$C_3 = I_o(k_n a)\ K_1(k_n b) \left[Q_1(k_n b) + 2\, Q_o(k_n c)\right] + I_1(k_n b)\ K_o(k_n a)\ Q_o(k_n c) \tag{4-7c}$$

$$C_4 = -K_1(k_nb)\,I_1(k_na)\left[Q_1(k_nb) + 2\,Q_o(k_nc)\right] + I_1(k_nb)\,K_1(k_na)\,Q_o(k_nc) \tag{4-7d}$$

Występujące we wzorach (4-4) i (4-5) argumenty funkcji Bessela są rzeczywiste i duże ($\geqslant 6$), dlatego można tu stosować wzory asymptotyczne dla funkcji Bessela [5].
Otrzymuje się więc:

$$\mathrm{Re}\,F(\lambda_n a) =$$

$$= \frac{1}{128b^3k_n^3}\;\frac{k_n^2\left[e^{-ak_n}(8ak_n-1)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]-e^{-ck_n}(8ck_n\ -\ \ldots\right.}{k_n^2\left[e^{-ak_n}(8ak_n-1)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)\ +\ e^{-ck_n}(8ck_n\ -\ 1)\right]\ -\ \ldots\right.}$$

$$\frac{\left.\left.\ldots\ -\ 1)\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\right]\right]\left[e^{-k_n(a+c)}\ (8ak_n-1)\ (8ck_n-1)\ x\ \ldots\right.}{\left.\ldots\ -\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)\ +\ e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\right]^2\ +\ \ldots}$$

$$\frac{\ldots\ x\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]^2\ +\ e^{-bk_n}(8bk_n+3)\left[e^{ak_n}(8ak_n\ +\ 1)\ +\ \ldots\right.}{\ldots\ +\ r_n^2\left[e^{-ak_n}(8ak_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)\ +\ \ldots\right.\right.}$$

$$\frac{\left.\ldots\ +\ e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\left[e^{-bk_n}(8bk_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)\ +\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]\ +\ \ldots\right.}{\left.\ldots\ +\ e^{-ck_n}\ (8ck_n\ -\ 1)\right]\ +\ \ldots}$$

$$\frac{\left.\left.\left.\ldots\ +\ 2\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]\right]\right]+r_n^2\left[e^{-ak_n}(8ak_n+3)\left[e^{ck_n}x\ldots\right.\right.}{\left.\ldots\ +\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{ak_n}(8ak_n-3)\ +\ e^{-ak_n}(8ak_n+3)\right]\right]^2\ +\ \ldots}$$

$$\frac{\left.\ldots\ x\ (8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\right]\Big]x\ldots}{\ldots\ +\ 2\ k_n\ \mathrm{Re}\lambda_n\ e^{-2ak_n}\ (8ak_n-1)\ (8ak_n+3)\ x\ \ldots}$$

$$\frac{\ldots x\Big[e^{-k_n(a+c)}(8ak_n+3)(8ck_n-1)\big[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big]^2-e^{-bk_n}(8bk_n+3)x\ldots}{\ldots x\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]^2-\ldots}$$

$$\frac{\ldots x\big[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big]\Big[e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]+\ldots}{\ldots-e^{-2ck_n}(8ck_n-1)^2\ x\ldots}$$

$$\frac{\ldots+2e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big]\Big]\Big]+k_n\mathrm{Re}\lambda_n\Big[e^{-ak_n}(8ak_n-1)x\ldots}{\ldots x\big[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\big]x\ldots}$$

$$\frac{\ldots x\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]-e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\big]\Big]x\ldots}{\ldots x\big[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big]+\ldots}$$

$$\frac{\ldots x\Big[e^{-k_n(a+c)}(8ak_n+3)(8ck_n-1)\big[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big]^2-e^{-bk_n}(8bk_n+3)x\ldots}{\ldots+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\ x\ldots}$$

$$\frac{\ldots x\big[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big]\Big[e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]+\ldots}{\ldots x\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]x\ldots}$$

$$\frac{\ldots+2e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\big]\Big]\Big]+\Big[e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big[e^{ck_n}(8ck_n+1)+\ldots}{\ldots x\big[e^{-ak_n}(8ak_n-1)\ x\ldots}$$

$$\frac{\ldots+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big]+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\big[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big]\Big]e^{-bk_n}(8bk_n+3)x\ldots}{\ldots x\big[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\big]-\ldots}$$

$$\frac{\ldots x\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\left[e^{-bk_n}(8bk_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]+\ldots\right.}{\ldots - e^{-ak_n}(8ak_n+3)\ x \ldots}$$

$$\frac{\ldots+2\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]\Big]+e^{-k_n(a+c)}(8ak_n-1)\ x \ldots}{\ldots\ x\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)+\ldots\right.}$$

$$\frac{\ldots\ x\ (8ck_n-1)\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]^2\Big]}{\ldots + e^{-ak_n}(8ak_n-1)\Big]\Big]} \tag{4-8}$$

$\operatorname{Im} F(\lambda_n a) =$

$$= -\frac{k_n I_m \lambda_n}{128b^3k_n^3}\,\frac{\left[e^{-ak_n}(8ak_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]+e^{-ck_n}\ x \ldots\right.}{k_n^2\left[a^{-ak_n}(8ak_n-1)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)\right]-\ldots\right.}$$

$$\frac{\ldots x\ (8ck_n-1)\left[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\right]\Big]\left[e^{-k_n(a+c)}(8ak_n-1)\ x \ldots\right.}{\ldots - e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\Big]^2+\ldots}$$

$$\frac{\ldots\ x\ (8ck_n-1)\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]^2+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\ x \ldots}{\ldots + r_n^2\left[e^{-ak_n}(8ak_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+\ldots\right.\right.}$$

$$\frac{\ldots\ x\left[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)\right]\left[e^{-bk_n}(8bk_n+3)\left[e^{ck_n}(8ck_n+1)+\ldots\right.\right.}{\ldots + e^{-ck_n}(8ck_n-1)\Big]+\left[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)\right]e^{-ck_n}(8ck_n-1)\Big]^2+\ldots}$$

$$\frac{\ldots + e^{-ck_n}(8ck_n-1)\Big]+2\ e^{-ck_n}(8ck_n-1)\left[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)\right]\Big]\Big]-\ldots}{\ldots + 2\ k_n\ \operatorname{Re}\lambda_n\left[e^{-2ak_n}(8ak_n-1)(8ak_n+3)\ x \ldots\right.}$$

$$\frac{\ldots-[e^{-ak_n}(8ak_n-1)[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)]-e^{-ck_n}(8ck_n-1)[e^{ak_n}(8ak_n+1)+\ldots}{\ldots\ x[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)]^2-e^{-2ck_n}(8ck_n-1)^2\ x\ \ldots}$$

$$\frac{\ldots+e^{-ak_n}(8ak_n-1)]][e^{-k_n(a+c)}(8ak_n+3)(8ck_n-1)[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)]^2-\ldots}{\ldots\ x[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)][e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)]+\ldots}$$

$$\frac{\ldots-e^{-bk_n}(8bk_n+3)[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)]][e^{-bk_n}(8bk_n+3[e^{ck_n}(8ck_n+1)+\ldots}{\ldots+e^{-ck_n}(8ck_n-1)[e^{ck_n}(8ck_n+1)+e^{-ck_n}(8ck_n-1)][e^{-ak_n}(8ak_n-3)\ x\ \ldots}$$

$$\frac{\ldots+e^{-ck_n}(8ck_n-1)]+2e^{-ck_n}(8ck_n-1)[e^{bk_n}(8bk_n-3)+e^{-bk_n}(8bk_n+3)]]]}{\ldots x[e^{ak_n}(8ak_n-3)+e^{-ak_n}(8ak_n+3)]-e^{-ak_n}(8ak_n+3)[e^{ak_n}(8ak_n+1)+e^{-ak_n}(8ak_n-1)]]]} \tag{4-9}$$

Na podstawie równań (4-8) i (4-9) można obliczyć współczynniki v, w oporów wnoszonych (3-8), (3-9), natomiast współczynnik u (3-7) przybiera postać

$$u=\frac{4}{\pi^2 l}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{8bk_n+3}{128b^3k_n^3}\left[8bk_n-3+e^{-2bk_n}(8bk_n+3)\right]x\frac{\sin^2 k_n l}{n^2} \tag{4-10}$$

5. Podsumowanie

Uwzględniając (4-8) - (4-10), w równaniach (3-7) - (3-9) otrzymuje się ostatecznie wzory na reaktancję i rezystancję wniesicną, a tym samym i impedancję układu wsad-wzbudnik z bocznikiem magnetycznym.

Wzory te po dokonaniu przejścia granicznego ($c \to \infty$), co odpowiada zaniedbaniu bocznika magnetycznego w układzie Na (rys. 1), przechodzą w analogiczne, otrzymane w [2].

Równania na reaktancję i rezystancję wniesioną zostały otrzymane przy pomocy "metody z szeregiem Fouriera" [1]. Metoda ta jak wykazano w [2] upraszcza poważnie obliczenia (zg. z [2] uwzględnienie trzech wyrazów szeregu Fouriera daje już dobrą dokładność).

W związku z powyższym otrzymane tu wzory na opory wnoszone po stabelaryzowaniu mogą być wykorzystywane dla obliczeń technicznych.

LITERATURA

[1] Fikus F.: Pole magnetyczne w cylindrycznych nagrzewnicach indukcyjnych o skończonej długości. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej,Hutnictwo 1974, z. 4.

[2] Fikus F., Wieczorek T.W.: Parametry elektryczne układu wsad-wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej. Archiwum Elektrotechniki Z. 4, t. XXIV, 1975.

[3] Lavers K.D., Biringer P.P.: An analysis of the corless induction furnace, axial distribution of electric and magnetic fields. Elektrowarme 1971 nr 4.

[4] Machmudow K.M., Słuchocki A.E.: Rasczet elektriczeskich parametrow nagriewatielnych induktorow metodom nawiediennych EDS. Trudy WNII TWCZ 1970, wyp. 11.

[5] Korniejew W.G.: Wwiedienie w teoriu besslewych funkcji, Moskwa 1971.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИНДУКТОРА
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВНЕШНЕГО НАГРЕВАТЕЛЯ С МАГНИТНЫМ ШУНТОМ

Р е з ю м е

Индукционные нагревательные устройтсва в металлургии в особенности цилиндрическая нагревательная внешняя установка. Уравнения для реактанции,резистанции системы индуктор-заргузка с магнитным шунтом. Вычислителная модель, в которой:

- загрузка заменена бесконечно длинным цилиндром,
- индуктор замен цилиндром бесконечно малой толщины и высоты 2h
- магнитный шунт заменен цилиндром в котором $\mu = \infty$, $\sigma = 0$.

Для вычисления векторных потенциалов использован "метод с рядом Фурье [1]

Уравнения вносимых реактанции и резистанции для $c \to \infty$ (c - радиус магнитного шунта рис. 1 переходят в аналогичные полученные в [2] для системы индуктор-загрузка без магнитного шунта.

THE PARAMETERS ELECTRICAL EVOLUTION OF THE INDUCTOR
OF THE OUTSIDE CYLINDRICAL HEATING INDUCTOR-CHARGE SYSTEM
WITH FERROMAGNETIC PITH

S u m m a r y

Heating inductors in metallurgy in particular the outside cylindrical inductor-charge system. Equations of the introduced reactanses, resistances and impedances of the inductor-charge system with ferromagnetic pith.

The mathematical model where:

- charge is replaced by nonmagnetic cylinder with great length
- inductor is replaced by infinite thin cylinder about 2h highness
- ferromagnetic pith is replaced by cylinder about $\mu = \infty$, $\sigma = 0$.

Based upon "the method with Fourier series" [1], the vector potential is calculated.

Equations of the introduced reactances and resistances for $c \to \infty$ (c - radius of a ferromagnetic cylinder) are equivalent with the obtained in [2] for a corneless inductor-charge system.