ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: INFORMATYKA z. 3 Nr kol. 708

Adam WOLISZ

Zakład Systemów Automatyki
Kompleksowej PAN

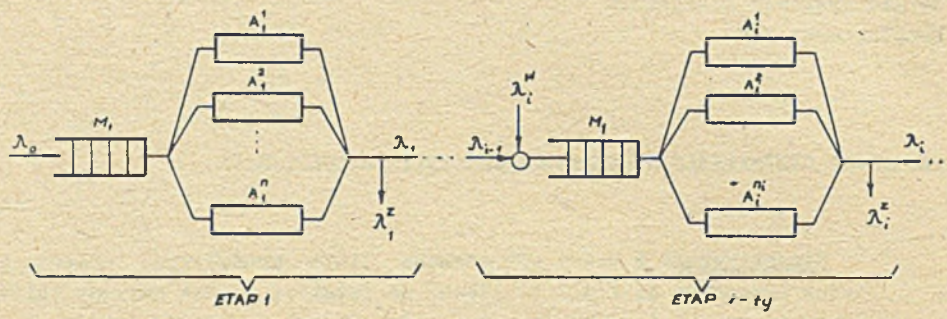
PRZYKŁADY OPTYMALIZACJI DWUETAPOWYCH LINII PRODUKCYJNYCH

Streszczenie: W pracy rozpatrzono linię produkcyjną złożoną z dwóch agregatów A_1 i A_2. Przyjęto, że istnieje zawsze niepusty zbiór produktów oczekujących na rozpoczęcie obróbki przed agregatem A_1, natomiast pojemność magazynu pośredniego między agregatami A_1 i A_2 jest ograniczona, co powoduje wystąpienie zjawiska blokowania agregatu A_1. Założono, że czas obróbki produktów na agregacie A_1 posiada rozkład wykładniczy, natomiast czas obróbki produktów na agregacie A_2 posiada rozkład dowolny. Badanie opisanego systemu metodami teorii masowej obsługi pozwoliło uzyskać analityczne wyrażenie opisujące jego wydajność w funkcji parametrów systemu i postaci rozkładu czasu obróbki na agregacie A_2. Zakładając, że łączny średni czas obróbki na obu agregatach jest stały, badano wpływ zróżnicowanego rozdziału pracy związanej z obróbką pomiędzy oba agregaty. Analizując szereg przykładów stwierdzono, że z wyjątkiem rozkładu wykładniczego, gdzie rozdział pracy powinien być równomierny, maksymalizację przepływu uzyskuje się wówczas, gdy średni czas obróbki na agregacie A_1 jest mniejszy niż średni czas obróbki na agregacie A_2. Załączony zbiór przykładów numerycznych ilustruje własności systemu oraz pozwala na sformułowanie wskazówek dla jego optymalizacji.

1. WSTĘP

Dyskretny proces produkcyjny można w uproszczeniu przedstawić w postaci sieci agregatów, pomiędzy którymi następuje przepływ produktów. W każdym agregacie wykonywane są na produktach pewne operacje (należące do zbioru operacji dopuszczalnych dla danego agregatu) i są one przesyłane do dalszych agregatów, aż wreszcie opuszczają system w postaci produktów finalnych oraz oczywiście wybraków, odpadów, itp. Topologia takiej sieci, uwzględniająca wszystkie możliwe drogi przepływu materiału, może być bardzo złożona. Niemniej jednak często spotyka się przypadek struktury sze-

regowo-równoległej z "liniowym" przepływem materiału, którą nazywać będziemy linią produkcyjną. Strukturę wieloetapowej linii produkcyjnej przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Struktura wieloetapowej linii produkcyjnej

$A_i = \left\{A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{n_i}\right\}$ - zbiór agregatów i-tego etapu

λ_0 - strumień produktów wejściowych

λ_i - strumień produktów wyjściowych i-tego etapu przeznaczonych do dalszej obróbki

λ_i^z - strumień produktów wyjściowych i-tego etapu opuszczających linię produkcyjną

λ_i^w - strumień produktów wejściowych i-tego etapu pochodzących spoza linii produkcyjnej

M_i - magazyn produktów wejściowych i-tego etapu

Jeżeli na każdym etapie produkcji zainstalowany jest tylko jeden agregat, wówczas mówimy o pojedynczej linii produkcyjnej.

Linię produkcyjną nazywać będziemy linią synchronizowaną, jeśli momenty rozpoczęcia operacji na różnych agregatach są narzucone pewnym zewnętrznym taktem (np. produkcja taśmowa) względnie "swobodną", gdy rytm pracy poszczególnych agregatów nie jest uzależniony od taktu zewnętrznego.

Podstawowymi decyzjami, które stoją przed projektantem "swobodnej" linii produkcyjnej, są:

- rozdział ciągu operacji prowadzącego od surowca do produktu finalnego na etapy,
- dobór wydajności poszczególnych etapów,
- dobór pojemności magazynów pośrednich,

z punktu widzenia takich kryteriów, jak: maksymalizacja wydajności linii produkcyjnej (przy ograniczeniach na łączne nakłady) czy też minimalizacja nakładów dla uzyskania zadanej wydajności.

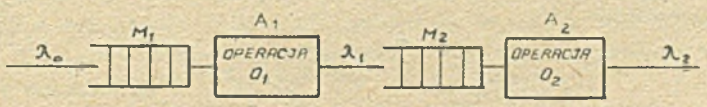
Przez pojęcie wydajności linii produkcyjnej (agregatu) rozumie się wartość oczekiwaną liczby jednostek produktu opuszczającego tę linię produkcyjną (agregat) w jednostce czasu. Obszerne omówienie problematyki modelowania linii produkcyjnych metodami zarówno analitycznymi, jak i symulacyjnymi wraz z opisem rezultatów osiągniętych w zakresie ich analizy i optymalizacji zawiera opracowanie [ZSAK 78].

W opracowaniu tym zwrócono uwagę na to, że najczęściej czas trwania poszczególnych operacji jest losowy, ilustrując to danymi pochodzącymi z analizy przepływu materiału w kombinacie metalurgicznymi. Losowość ta wpływa na rozmiar magazynów pośrednich, ale może mieć również wpływ na dobór wydajności poszczególnych etapów.

Na fakt możliwości zwiększenia wydajności linii produkcyjnej poprzez zróżnicowanie wydajności poszczególnej jej etapów wskazywano już w literaturze przedmiotu (HILL66, PAYN72, RAON75) jednak uzyskane dotąd wyniki są bardzo fragmentaryczne. W niniejszej pracy dla pewnej klasy dwuetapowych, pojedynczych, swobodnych linii produkcyjnych rozważony zostanie wpływ rozkładów czasów trwania operacji na poszczególnych etapach oraz rozmiarów magazynu międzyetapowego na wydajność linii. W oparciu o sformułowany model analityczny przeprowadzone zostaną obliczenia numeryczne wykazujące korzyści, jakie można uzyskać ze zróżnicowania wydajności etapów.

2. ROZPATRYWANY MODEL

W dalszym ciągu analizowana będzie dwuetapowa, pojedyncza linia produkcyjna, przedstawiona na rys. 2.



Rys. 2. Rozpatrywana dwuetapowa, pojedyncza linia produkcyjna

Do analizy przyjęto następujące założenia:

- Magazyn M_1, grupujący produkty wejściowe do pierwszego agregatu, nigdy nie jest pusty. Odpowiada to przypadkowi odpowiednio sterowanego strumienia λ_0.
- Magazyn M_2 ma ograniczoną do N jednostek pojemność.
- Rozkład czasu trwania operacji O_1 w agregacie A_1 jest wykładniczy z parametrem μ_1.

- Rozkład czasu trwania operacji O_2 w agregacie A_2 jest dowolny, o funkcji gęstości rozkładu $b_2(x)$ i ograniczonej wartości oczekiwanej $E(b_2)$.
- W przypadku zapełnienia magazynu M_2 kolejna jednostka, dla której zakończono operację O_1, blokuje agregat A_1 do czasu zwolnienia miejsca w magazynie.

Przeanalizujemy zachowanie się badanego systemu metodą wymuszonych łańcuchów Markowa [WĘGR 78] w chwilach czasu następujących bezpośrednio po zakończeniu operacji O_2 na kolejnej jednostce.

Niech $p_n(j)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że bezpośrednio po zakończeniu i-tej operacji O_2 w magazynie M_2 znajduje się n jednostek. (Oczywiście $p_{N+1}(i)$ jest równe prawdopodobieństwu tego, że w chwili bezpośrednio poprzedzającej zakończenie operacji O_2 agregat A_1 był zablokowany). Wartości $p_n(j+1)$ spełniają*) układ równań (1)

$$p_n(j+1) = p_o(j) \cdot f_n + \sum_{i=1}^{n+1} p_i(j) \cdot f_{n-i+1}$$

$$n = 0,1,\dots,N \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} p_n(j+1) = 1$$

gdzie

$$f_j = \frac{1}{j!}\int_0^{\infty} (\mu_1 x)^j e^{-\lambda x} b_2(x)dx. \tag{2}$$

jest prawdopodobieństwem zakończenia j operacji O_1 w czasie trwania operacji O_2.

Poszczególne stany systemu tworzą nieprzywiedlny aperiodyczny łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów, który osiąga zawsze [COHE 69] stacjonarny stan graniczny.

Niech

$$p_n = \lim_{j\to\infty} p_n(j), \quad n=0,1,\dots,N+1$$

gdzie p_n spełniają układ równań:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= p_o \cdot f_n + \sum_{i=1}^{n+1} p_i f_{n-i+1} \\ \sum_{n=0}^{N+1} p_n &= 1 \end{aligned}\right\} \quad n=0,1,\dots,N \tag{3}$$

*) Warto zauważyć, że układ równań (1) opisuje również system obsługi M/G/1/(N+1) ze stratami.

Rozwiązanie tego układu równań uzyskamy na drodze analogicznej jak [TRUS75]. Zdefiniujemy funkcję tworzącą

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n \tag{4}$$

Z (2) i (4) wynika po przekształceniach, że

$$f(z) = \bar{b}_2 \left[\lambda(1-z)\right], \text{ gdzie } \bar{b}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} b_2(t)dt \tag{5}$$

Z definicji (4) wynika tożsamość:

$$\left\{\sum_{n=1}^{N+1} z^n p_n\right\} \cdot f(z) = \sum_{n=0}^{N} z^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} p_i f_{n-i+1} + z^{N+2} R_0(z), \tag{6}$$

gdzie $R_0(z)$ jest szeregiem potęgowym grupującym składniki związane z potęgami z wyższymi lub równymi N+2.
Wykorzystując w (7) równania (3) otrzymujemy po przekształceniach:

$$f(z) \cdot \sum_{n=1}^{N+1} z^n p_n = z\left\{\sum_{n=0}^{N+1} z^n p_n - p_0 f(z)\right\} + z^{N+2} \cdot R_1(z) \tag{7}$$

i wreszcie

$$\sum_{n=1}^{N+1} z^n p_n = \frac{f(z)(1-z)}{f(z) - z} p_0 + z^{n+2} R_2(z), \tag{8}$$

gdzie $R_1(z)$, $R_2(z)$ są szeregami potęgowymi podobnymi do $R_0(z)$. Łatwo zauważyć, że w rozkładzie prawej strony (8) na szereg potęgowy współczynniki przy $z^0, z^1, \ldots, z^{N+1}$ pochodzą wyłącznie z rozkładu pierwszego składnika. Tak więc oznaczając

$$\pi_s(z) = \frac{f(z)(1-z)}{f(z) - z} \tag{9}$$

mamy:

$$p_n = \left[\pi_s(z)\right]^{(n)}\Big|_{z=0} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{n!}$$

Wyznaczając p_0, skorzystamy z ostatniego równania układu (3), uzyskując

$$p_0 \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{n!} \left[\pi_s(z)\right]^{(n)}\Big|_{z=0} \cdot p_0 = 1,$$

a stąd:

$$p_0 = \left[\sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{j!} \left[\pi_s(z)\right]^{(j)}\Big|_{z=0} + 1\right]^{-1} \tag{10}$$

Wydajność systemu znajdziemy analizując strumień wyjściowy λ_2. Niech zmienna losowa X o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $\varphi(X)$ określa odstęp pomiędzy kolejnymi chwilami zakończenia operacji O_2. Wówczas wydajność V można określić jako:

$$V = \frac{1}{E(x)} \tag{11}$$

Rozkład zmiennej losowej X można wyznaczyć na podstawie następującego rozumowania:

Jeżeli w chwili zakończenia operacji O_2 magazyn M_2 jest niepusty, to moment zakończenia kolejnej operacji O_2 zadany jest rozkładem czasu jej trwania.

Jeżeli natomiast magazyn M_2 byłby pusty, to moment zakończenia kolejnej operacji O_2 wyznaczony byłby przez sumę dwóch niezależnych zmiennych losowych, a to: czasu zakończenia operacji O_1 oraz czasu wykonania operacji O_2.

Tak więc:

$$\varphi(X) = (1-p_0) \cdot b_2(X) + p_0\left[b_2(X) * \mu_1 e^{-\mu_1 X}\right], \tag{12}$$

gdzie * oznacza operację splotu.

Po transformacji otrzymujemy:

$$\bar{\varphi}(s) = (1-p_0) \cdot \bar{b}_2(s) + p_0 \cdot \bar{b}_2(s) \cdot \frac{\mu_1}{s+\mu_1}, \tag{13}$$

a stąd:

$$E(X) = E(b_2) + \frac{p_0}{\mu_1}. \tag{14}$$

Ostatecznie wydajność systemu jest więc opisana zależnością:

$$V = \left[E(b_2) + \frac{p_0}{\mu_1}\right]^{-1}, \tag{15}$$

gdzie p_0 zadane jest wzorem (10).

3. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Wyznaczmy obecnie wydajność rozpatrywanego systemu dla kilku szczególnych postaci $b_2(x)$.

a) r o z k ł a d w y k ł a d n i c z y

W przypadku gdy $b_2(x) = \mu_2 \cdot e^{-\mu_2 x}$, uzyskujemy:

$$\pi_s(z) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - z\mu_1} = \frac{1}{1-z\rho}, \text{ gdzie } \rho = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

stąd:

$$\pi_s(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (\rho z)^i \quad \text{a więc} \quad \left[\pi_s(z)^{(j)}\right]\Big|_{z=0} \cdot \frac{1}{j!} = \rho^j.$$

Wstawiając uzyskany rezultat kolejno do (16) i (15) uzyskujemy:

$$V = \mu_1\mu_2 \frac{\mu_1^{N+2} - \mu_2^{N+2}}{\mu_1^{N+3} - \mu_2^{N+3}}, \tag{16}$$

co je t identyczne z wynikiem uzyskanym dla tego uproszczonego modelu na innej rodze przez Hunta [HUNT56].

b) r o z k ł a d h i p e r w y k ł a d n i c z y

Niech $b_2(x) = a_1\mu_A e^{-\mu_A x} + a_2 \mu_B \cdot e^{-\mu_B x}$, (17)

gdzie: $a_1 = a \quad \mu_A = 2a\mu_2$

$a_2 = 1-a \quad \mu_B = 2(1-a)\mu_2$.

Wstawiając to do wzoru (9) otrzymujemy po przekształceniach:

$$\pi_s(z) = \frac{A_1 - A_2 z}{A_1 - A_3 z + z^2},$$

gdzie:

$$A_1 = \left\{\left[a_1\mu_A + a_2 \cdot \mu_B\right]\mu_1 + \mu_A \cdot \mu_B\right\}/\mu_1^2$$

$$A_2 = \left[a_1\mu_A + a_2\mu_B\right]/\mu_1$$

$$A_3 = \left[\mu_1 + \mu_A + \mu_B\right]/\mu_1 .$$

Można wykazać, że mianownik posiada dwa pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste z_1 i z_2,

$$z_1 = \frac{A_3 + \sqrt{A_3^2 - 4A_1}}{2}, \quad z_2 = \frac{A_3 - \sqrt{A_3^2 - 4A_1}}{2},$$

i przekształcić $\pi_s(z)$ do postaci:

$$\pi_s(z) = \frac{\frac{L_1}{z_1}}{1 - \frac{1}{z_1} z} + \frac{\frac{L_2}{z_2}}{1 - \frac{1}{z_2} z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{L_1}{z_1} \cdot \left(\frac{1}{z_1}\right)^n + \frac{L_2}{z_2}\left(\frac{1}{z_2}\right)^n\right\} z^n,$$

gdzie:

$$L_2 = \frac{A_1 - A_2 z_2}{z_1 - z_2}, \quad L_1 = \frac{A_1 - A_2 z_1}{z_2 - z_1}.$$

Korzystając z zależności (10) i faktu, że

$$\frac{L_1}{z_1} + \frac{L_2}{z_2} = 1,$$

uzyskujemy:

$$p_o = \left[\frac{L_1}{z_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{z_1}\right)^{N+2} - 1}{\frac{1}{z_2} - 1} + \frac{L_2}{z_2} \frac{\left(\frac{1}{z_2}\right)^{N+2} - 1}{\frac{1}{z_2} - 1}\right]^{-1}, \tag{18}$$

co pozwala na wyznaczenie wydajności systemu.

c) r o z k ł a d r e g u l a r n y

W przypadku $b_2(x) = \delta(x-c)$, gdzie $\delta(x)$ jest deltą Diraca, mamy:

$$\pi_s(z) = \frac{1-z}{1-z\, e^{\varrho(1-z)}},$$

gdzie $\varrho = \mu_1 \cdot c$.

Można wykazać [GROS 74], że

$$\frac{1}{n!}\left[\pi_s(z)\right]^{(n)}\Big|_{z=0} = \begin{cases} e^{\rho}-1 & \text{dla } n=1 \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} e^{k\rho}\left[\frac{(k\rho)^{n-k}}{(n-k)!} + (1-\delta_{nk}) \cdot \frac{(k\rho)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right] & \end{cases} \tag{19}$$

gdzie δ_{nk} jest deltą Kroneckera, co pozwala wprost na wyznaczenie z (10) p_0, a następnie wydajności systemu.

Zauważmy, że podane rozkłady charakteryzują się silnym zróżnicowaniem współczynnika zmienności rozkładu c, definiowanego jako stosunek wariancji rozkładu do kwadratu jego wartości średniej.

I tak, dla rozkładu regularnego c=0, dla wykładniczego c=1, natomiast dla rozkładu hiperwykładniczego określonego wzorem (17) mamy $c \geqslant 1$, przy czym $c = \left[2a(1-a)\right]^{-1} - 1$.

4. PRZYKŁADY OPTYMALIZACJI

W dalszym ciągu dla zbadania własności analizowanego systemu założymy, że łączny średni czas wykonywania operacji O_1 i O_2 jest stały (i równy D), ale może być dowolnie dzielony między te dwie operacje, np. przez zmianę szybkości pracy realizujących je agregatów, przemieszczanie personelu obsługującego czy rozdział pracy. Bez straty ogólności można przyjąć D=2. Mamy więc

$$\frac{1}{\mu_1} + E(b_2) = 2, \tag{20}$$

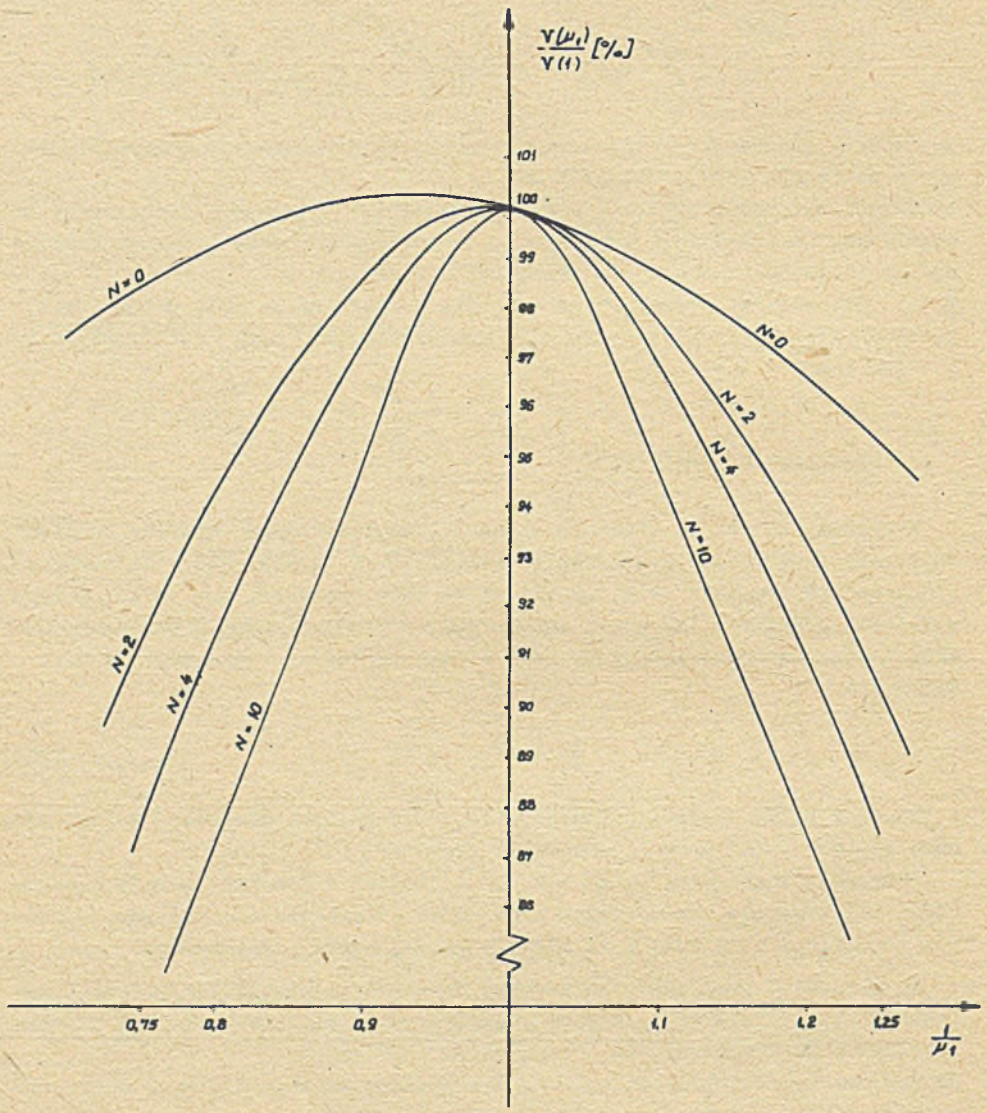
i będziemy badać przebieg funkcji $V(\mu_1)$ dla różnych wartości N oraz różnych postaci $b_2(x)$ przy ograniczeniu (20).

Przypadek szczególny $b_2(x) = \mu_2 e^{-\mu_2 x}$ badano w oparciu o wzór Hunta w [HILL 66] dowodząc, że maksimum wydajności osiąga się dla systemu, w którym $\frac{1}{\mu_1} = E(b_2) = 1$. Wyniki te zostały przez autora potwierdzone.

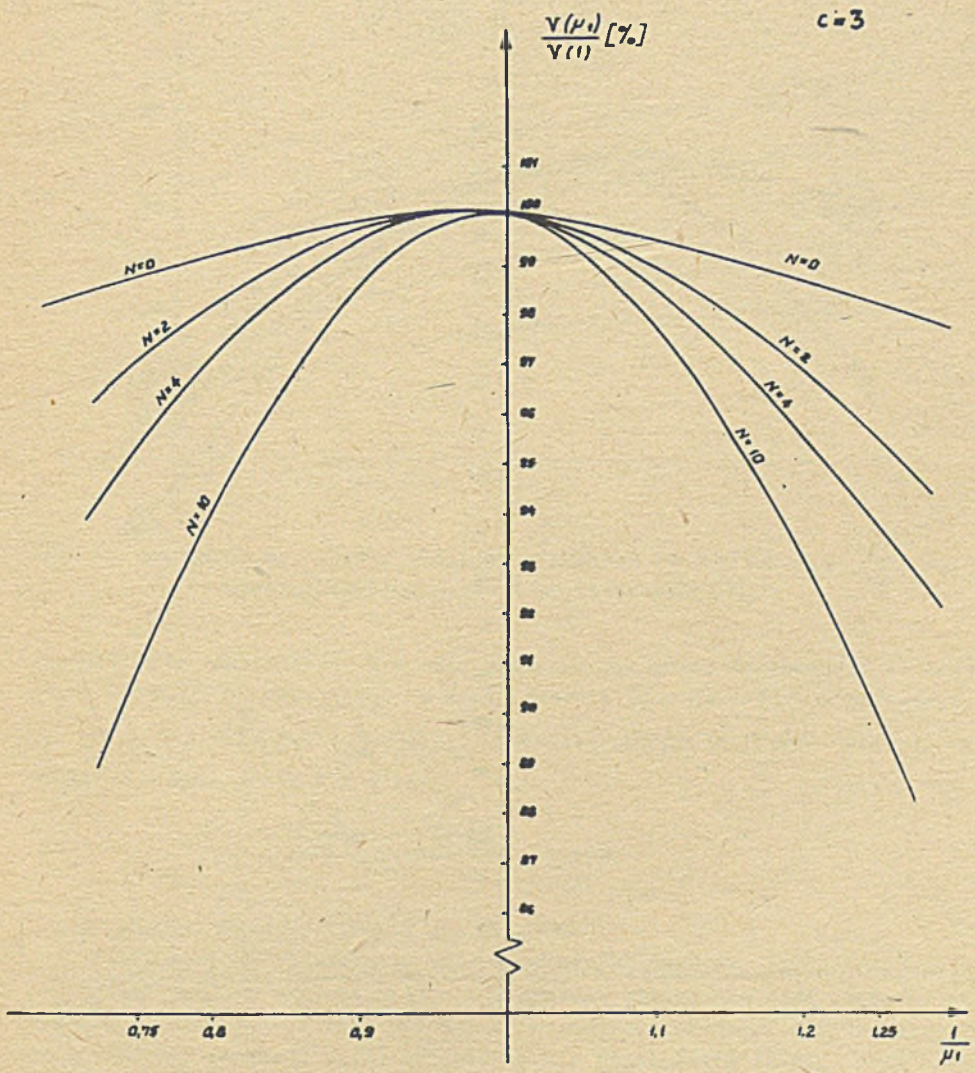
Na rysunku 3 przedstawiono rodzinę krzywych ilustrujących przebieg zależności $V(\mu_1)/V(1)$ dla rozkładu regularnego, a na rysunkach 4 i 5 dla rozkładu hiperwykładniczego o różnych wartościach c.

Na rysunku 6 przedstawiono natomiast wydajność systemu dla $\mu_1=1$ przy różnych postaciach rozkładu $b_2(x)$ dla różnych wartości N.

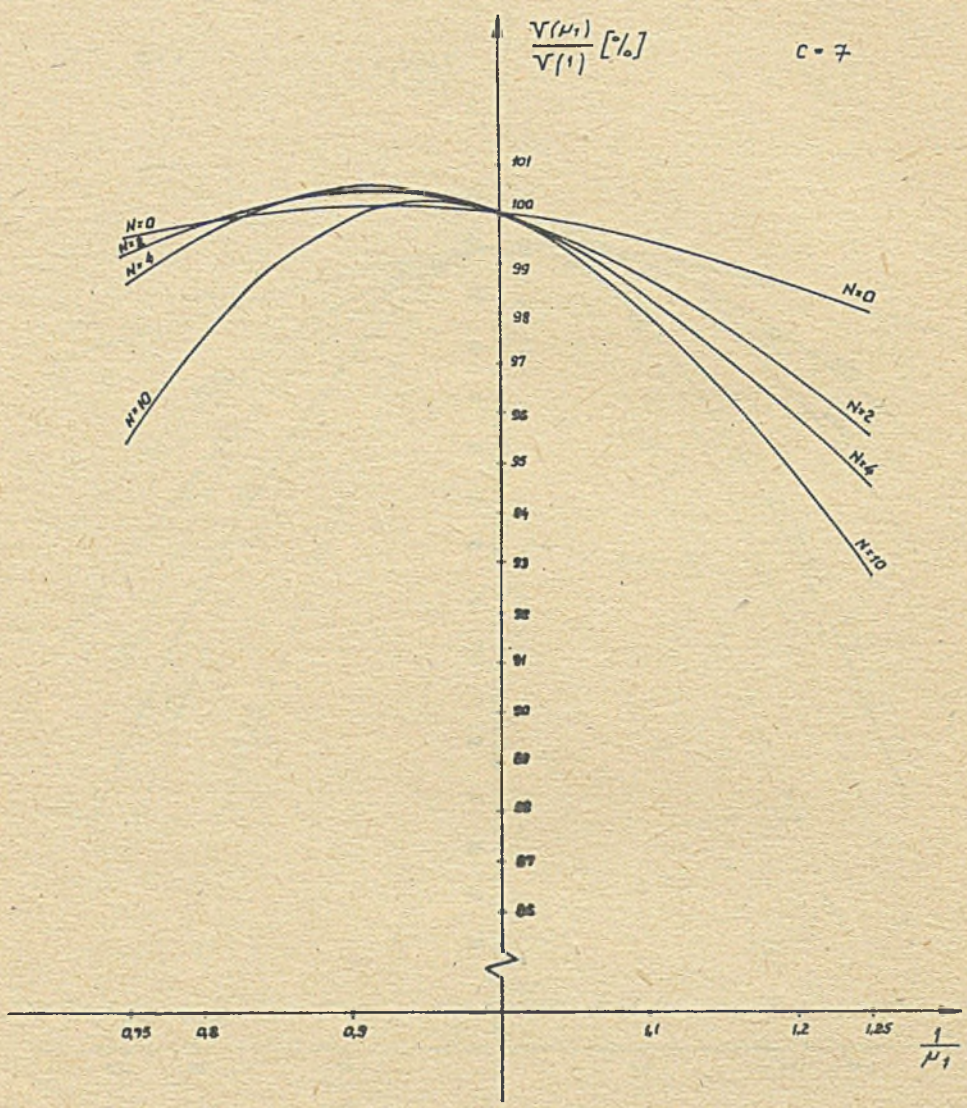
Przedstawione wyniki wskazują na to, że maksymalną wydajność osiąga się przy zróżnicowaniu średniego czasu wykonywania operacji O_1 i O_2 w kierunku skrócenia czasu wykonywania operacji O_1 i to dla obu przyjętych postaci rozkładu czasu trwania operacji O_2. Aczkolwiek zyski z optymalizacji nie są zbyt duże, to bardzo ważne jest wskazanie kierunku optymalnego



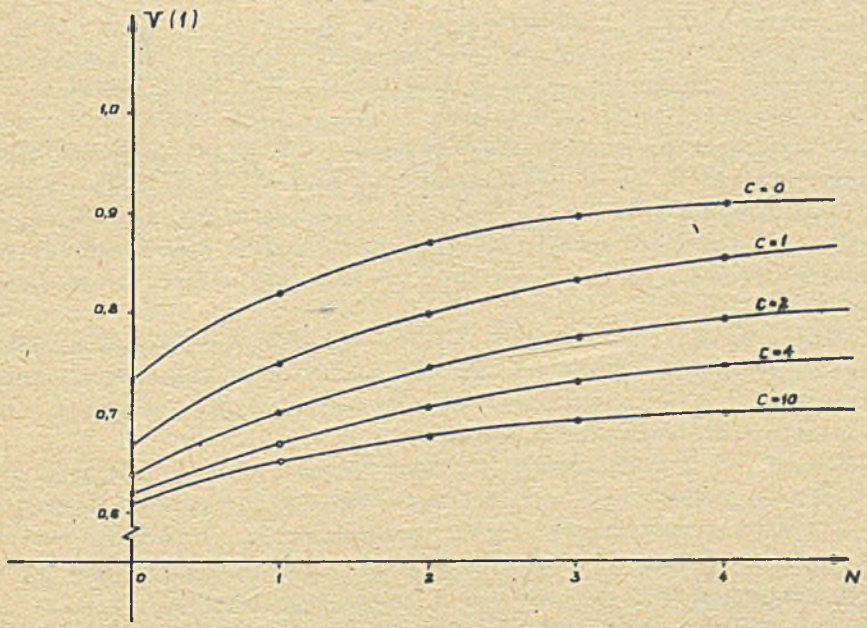
Rys. 3. Zależność wydajności linii produkcyjnej od μ_1 dla regularnego rozkładu czasu trwania operacji O_2



Rys. 4. Zależność wydajności linii produkcyjnej od μ_1, dla hiperwykładniczego rozkładu czasu trwania operacji O_2 przy c=3



Rys. 5. Zależność wydajności linii produkcyjnej od μ_1 dla hiperwykładniczego rozkładu czasu trwania operacji O_2 przy c = 7



Rys. 6. Zależność wydajności linii produkcyjnej od N przy $\mu_1=1$ przy różnych rozkładach czasu trwania operacji O_2

różnicowania parametrów. W praktyce bowiem nie można doprowadzić do idealnej równości $\frac{1}{\mu_1}$ oraz $E(b_2)$, a zróżnicowanie tych wartości w niewłaściwy sposób (tj. przyjęcie $\frac{1}{\mu_1} > E(b_2)$) prowadzi już do istotnych strat. Na przykład z rys. 5 dla N = 4 mamy:

$$\frac{V(\frac{1}{0,95}) - V(\frac{1}{1.05})}{V(1)} = 1,13\%,$$

a więc spadek wydajności byłby już istotny.

Zarówno wartość optymalnego zróżnicowania parametrów linii produkcyjnej, jak i wartość wzrostu wydajności systemu w stosunku do wydajności uzyskiwanej przy $\mu_1 = 1$ jest zależna od pojemności magazynu pośredniego. Wpływ postaci rozkładu $b_2(x)$ uwidacznia się szczególnie silnie przy niewielkich pojemnościach magazynu M_2.

Przy szacowaniu wydajności produkcyjnej należy brać pod uwagę postać rozkładu czasu trwania operacji O_2, bowiem wzrost współczynnika zmienności tego rozkładu wpływa na spadek wydajności linii (przy stałej pojemności magazynu).

5. WNIOSKI

Problematyka analizy i optymalizacji linii produkcyjnych jako bardzo istotna i bezpośrednio wpływająca na efektywność produkcji doczekała się wielu opracowań, jednak zakres uzyskanych wyników jest wciąż jeszcze ograniczony. W przypadku linii dwuetapowych z ograniczonymi, niezerowymi magazynami pośrednimi przebadano dotąd wyczerpująco jedynie przypadek wykładniczych rozkładów czasów trwania operacji O_1 i O_2. W niniejszej pracy przedstawiono prostą metodę opisu szerszej klasy systemów dwuetapowych, z dowolnym rozkładem czasu trwania operacji O_2. Pozwoliło to przebadać wpływ postaci tego rozkładu na parametry linii produkcyjnej maksymalizujące jej wydajność.

Dodatkowo, na mocy ogólniejszych twierdzeń teorii wieloetapowych systemów obsługi zebranych w [ZSAK 78], można stwierdzić, iż przestawienie stanowisk obsługi w rozpatrywanym systemie nie wpływa na jego wydajność, co zwiększa zakres stosowalności rozwiązania.

Aczkolwiek przyjęte założenia o rozkładzie czasu trwania operacji O_1 oraz możliwości wpływania na wartości oczekiwane czasu trwania operacji stanowią pewne ograniczenie, to jednak uzyskane wyniki wskazujące na pożądane kierunki różnicowania parametrów linii produkcyjnej mogą dla przebadanych przypadków mieć zastosowanie w praktyce projektowej.

Istotnym wynikiem pracy jest udowodnienie, iż o kierunku zróżnicowania wydajności stanowisk obsługi nie przesądza w systemie dwuetapowym wyłącznie porównanie współczynników zmienności rozkładów, jak to sugerowano w literaturze, np. [RAON 75 B], a w szczególności nie zawsze wskazane jest zwiększanie wydajności stanowiska posiadającego większy współczynnik zmienności rozkładu.

Próba ustalenia, jakie parametry rozkładu wpływają dodatkowo na kierunek optymalnego zróżnicowania wydajności stanowisk, będzie przedmiotem odrębnego opracowania.

LITERATURA

[COHE 69] COHEN J.W.: The Single Server Queue. North Holland, Amsterdam 1969.

[HILL 66] HILLIER F.S., BOLING R.W.: The Effect of Some Design Factors on the Efficiency of Production Lines with Variable Operations Times. The Journal of Industrial Engineering, Vol XVII, No. 12 pp. 651-658.

[HUNT 56] HUNT G.C.: Sequential Arrays of Waiting Lines. Operations Research, Vol 4, No. 3, pp. 674-683.

[PAYN 72] PAYNE S., SLACK N., WILD R.: A Note on the Operating Characteristics of "Balanced" and "Unbalanced" Production Flow Line. International Journal of Production Research, Vol 10, No. 1, pp. 93-98.

[TRUS 75] TRUSLOVE A.L.: Queue Length for the $E_k/G/1$ Queue with Finite Waiting Room. Advances in Applied Probability, Vol 12, No 1, pp. 215-226.

[WEGR 78] WĘGRZYN S.: Podstawy Automatyki. Wyd. V, PWN, Warszawa 1978.

[ZSAK 78] Praca zbiorowa: Komputerowe Systemy Operatywnego Kierowania Dyskretnymi Procesami Produkcyjnymi. Opracowanie ZSAK-PAN, Gliwice 1978.

[RAON75A] RAO N.P.: On the mean production rate of a two-stage production system of the tandem type. International Journal of Production Research. Vol 13, pp. 207-217, 1975.

[RAON75B] RAO N.P.: Two-stage production systems with intermediate storage. AIIE Transactions, Vol 7, pp. 414-421, 1975.

Wpłynęło do Redakcji: 8.01.1979 r.
W ostatecznej formie przyjęto: 6.01.1981 r.

ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДВУХЭТАПНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЛИНИЙ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена производственная линия, состоящая из двух агрегатов A_1 и A_2. Принято, что существует всегда непустой комплект продуктов, ожидающий начала обработки агрегатом A_1, зато вместимость промежуточного склада между агрегатами A_1 и A_2 ограничена. Все это вызывает явление блокировки агрегатов A_1. Принято, что время обработки продуктов обоими агрегатами стохастическое, с показательным распределением в случае агрегата A_1 и с произвольным распределением в случае агрегата A_2. Исследование описанной системы методами теории массового обслуживания позволило получить аналитическое выражение, описывающее ее производительность в функции параметров системы и вида распределения времени обработки агрегатом A_2. Опираясь на том, что среднее время обработки в целом на обоих агрегатах постоянно, исследовано влияние распределения работы по обработке между обеими агрегатами. Анализируя ряд примеров, констатировано, что за исключением показательного распределения, где распределение работы должно быть равномерно, максимум скорости получаем тогда, когда среднее время обработки агрегатом A_1 меньше среднего времени агрегатом A_2. Приведенные численные примеры иллюстрируют свойства системы и позволяют сформулировать указания для ее оптимизации.

THE EXAMPLES OF OPTIMIZATION OF TWO-STAGE PRODUCTION LINES

S u m m a r y

In this paper two stations working in tandem, say S_1 and S_2 are considered. A nonempty stock of units (products) ready for processing is assumed to be in front of station S_1 while the intermediate queue between S_1 and S_2 has a limited capacity N, thus blocking phenomennon occures. The duration of unit's processing is assumed to be described by an exponential distribution at S_1 and by a general distribution at S_2.

An analysis of this system is presented leading to fairly simple closed-form formulas. Assuming the total average processing time required for each unit on both stations to remain constant, the influance of various work division rates between these stations, on the throughput was investigated. For a family of special cases including regular, exponential and hyperexponential distributions of the processing time at S_2, it has been shown that the processing rate of the first station should be slightly bigger than those at the second station, in order to maximize the expected throughput. The only exception occurs in the case of exponential distribution, when equal processing rates are optimal. A set of numerical examples is enclosed.