

Władysław MORYTKO

Maciej BRUNNE

RÓWNANIA PARAMETRYCZNE WZBUDNIKÓW W POSTACI WĘŻOWNIC O NORMALNYM PRZEKROJU KOŁOWYM

Streszczenie. W artykule niniejszym wyprowadzono i omówiono równania parametryczne węzownic, których przekrój normalny jest kołem. Podano następnie warunki na to, by taka węzownica nie posiadała punktów osobliwych. Mając równania tych węzownic, podano dla nich postać pierwszej i drugiej formy kwadratowej. Na koniec omówiono zastosowanie tych form do określenia rozpięty prądu przy danym rozmieszczeniu źródeł napięcia oraz do określenia rozkładu pola magnetycznego, przy danym rozmieszczeniu linii prądu.

1. Wstęp

Artykuł niniejszy stanowi trzecią część ogólnej teorii powierzchni wzbudników stosowanych w nowoczesnych urządzeniach metalurgicznych. W części pierwszej zostały wyprowadzone uproszczone równania parametryczne wzbudników nawiniętych na powierzchnie obrotowe o różnych profilach. Uproszczenie to polegało na zaniedbaniu grubości wzbudnika, co sprowadzało jego powierzchnię do linii. Dla celów technicznych przybliżenie takie jest w pewnych przypadkach zadowalające. Powyższe zostało opracowane w pracy [1]. W części drugiej zostały wyprowadzone równania wzbudników rzeczywistych przy założeniu, że przekrój pionowy jest okręgiem, tzn. taki przekrój, który jest prostopadły do płaszczyzny xy . Przewody tych wzbudników nawinięte były na takie powierzchnie obrotowe, jak walec, stożek, kula i torus. Powyższe zostało opracowane w artykule [2]. Dalszym rozwinięciem teorii wzbudników jest niniejszy artykuł. Wyprowadzono w nim równania parametryczne powierzchni wzbudników rzeczywistych przy założeniu, że przekrój normalny jest okręgiem.

Wyprowadzono następnie współczynniki pierwszej i drugiej formy kwadratowej otrzymanych powierzchni i omówiono zastosowanie tych form do określenia rozpięty prądu, przy danym rozmieszczeniu źródeł napięcia oraz do określenia rozkładu pola magnetycznego przy danym rozmieszczeniu linii prądu.

2. Równania parametryczne węzownic

Niech w prostokątnym układzie współrzędnych OXYZ będzie dana krzywa o równaniach:

$$\begin{aligned}x &= x(u) \\y &= y(u) \\z &= z(u)\end{aligned}$$

lub w postaci wektorowej:

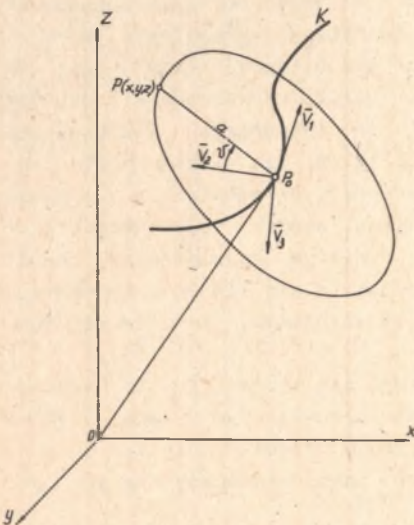
$$\vec{r}(u) [x(u), y(u), z(u)], \dots \quad (1)$$

gdzie parametr u jest łukiem i niech $u \in \langle \alpha, \beta \rangle$ (rys. 1). Jeżeli krzywa ta jest klasy C^3 i jeżeli zachodzi $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \neq 0^x$, wówczas w każdym jej punkcie można zbudować trójścian Freneta: $\vec{V}_1 = \dot{\vec{r}}(u)$, $\vec{V}_2 = \frac{\ddot{\vec{r}}(u)}{|\ddot{\vec{r}}(u)|}$, $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, jak również napisać równania Freneta:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{V}}_1 &= \kappa \cdot \vec{V}_2 \\ \dot{\vec{V}}_2 &= -\kappa \cdot \vec{V}_1 + \tau \cdot \vec{V}_3 \dots \\ \dot{\vec{V}}_3 &= -\tau \cdot \vec{V}_2.\end{aligned} \quad (2)$$

Rozważmy teraz powierzchnię o równaniu wektorowym:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u) + a \cdot \vec{V}_2 \cdot \cos v + a \cdot \vec{V}_3 \cdot \sin v, \dots \quad (3)$$



Rys. 1. Konstrukcja wężownicy

gdzie $u \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Będzie to powierzchnia jaką otrzymujemy, gdy wzdłuż krzywej K o równaniu (1) będziemy przesuwac okrąg o promieniu a , którego środek stale leży na krzywej K , zaś jego płaszczyzna jest stale prostopadła do wektora stycznego $\vec{r}(u)$. Krzywą K będziemy nazywać linią centralną tej powierzchni, a powierzchnię tę nazwiemy wężownicą, której przekrój normalny jest okręgiem lub krótko, wężownicą o normalnym przekroju kołowym. Szkic tej powierzchni pokazany jest na rys. 2. Zbadamy teraz kiedy tak określona powierzchnia posiada punkty osobliwe, ewentualnie przy jakich warunkach ich nie posiada. W tym celu oblicz-

^{x)} Kropka nad wektorem oznacza różniczkowanie względem parametru, który jest łukiem; na różniczkowanie cząstkowe stosujemy również oznaczenia r_u i r_v .

my iloczyn wektorowy wektorów \vec{r}_u i \vec{r}_v . Różniczkując (3) względem parametrów u i v mamy:

$$\vec{r}_u = \dot{\vec{r}}(u) + a \cdot \dot{V}_2 \cos v + a \cdot \dot{V}_3 \cdot \sin v$$

$$\vec{r}_v = -a \cdot \dot{V}_2 \cdot \sin v + a \cdot \dot{V}_3 \cdot \cos v.$$

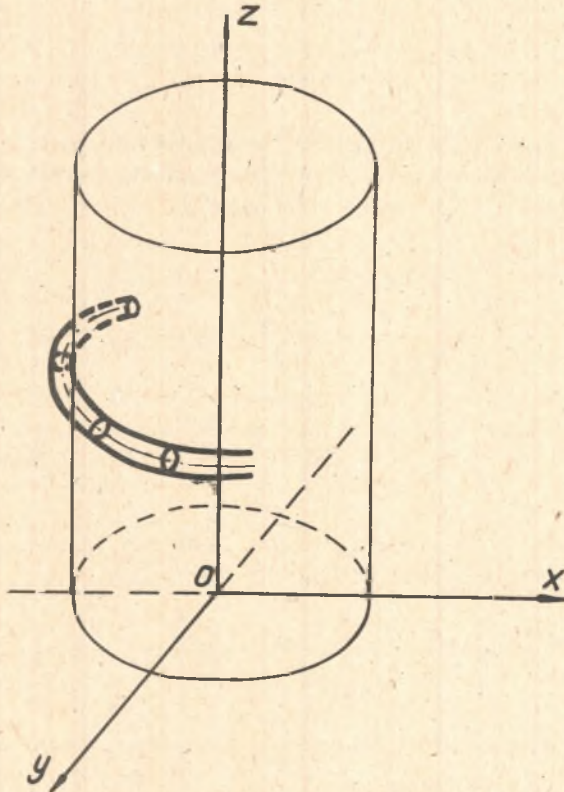
Uwzględniając w tych wzorach równania (2), otrzymamy po uporządkowaniu

$$\vec{r}_u = (1 - a \cdot \kappa \cdot \cos v) \cdot \dot{V}_1 - a \cdot \tau \cdot \dot{V}_2 \cdot \sin v + a \cdot \tau \cdot \dot{V}_3 \cdot \cos v$$

$$\vec{r}_v = -a \cdot V_2 \cdot \sin v + a \cdot V_3 \cdot \cos v.$$

Po wykonaniu rachunków mamy ostateczną wartość na iloczyn wektorowy:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = a \cdot (a \cdot \kappa \cdot \cos v - 1) \cdot [\dot{V}_2 \cdot \cos v + V_3 \cdot \sin v] \dots (4)$$



Rys. 2. Wężownica na walcu

Ze wzoru (4) wynika, że iloczyn ten jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot \cos v - 1 = 0$ lub, gdy $a \cdot \cos v = \frac{1}{\%}$. Aby więc wężownica nie miała punktów osobliwych (samoprzecięć) winno być $a \cdot \% \cdot \cos v - 1 < 0$. Obliczmy jeszcze iloczyn skalarny wektorów \vec{r}_u i \vec{r}_v . Po wykonaniu łatwych rachunków mamy: $r_u \cdot r_v = a^2 \cdot \tau$. Wynika stąd, że iloczyn ten jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau = 0$, co oznacza, że linie parametryczne tej powierzchni tworzą siatkę ortogonalną wtedy, gdy jej linia centralna jest krzywą płaską.

3. Wężownica na walcu

Pokażemy teraz jak wyglądają równania (3) dla wężownicy nawiniętej na walec kołowy o promieniu r . Jej linią centralną będzie wtedy linia śrubowa. Przypadek ten wybieramy dlatego, że linię śrubową można stosunkowo łatwo sparametryzować łukiem. Niech więc będzie dana linia śrubowa o równaniach:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos t \\ y &= r \cdot \sin t \quad \dots \\ z &= b \cdot t \end{aligned} \quad (5)$$

Gdy $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, wówczas otrzymujemy jeden zwój tej linii. Jeżeli linię tę sparametryzujemy łukiem wówczas jej równanie wektorowe będzie miało postać:

$$\vec{r}(u) \left[r \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad r \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad \frac{b \cdot u}{\sqrt{r^2+b^2}} \right] \dots \quad (6)$$

Obliczając $v_1 = \dot{\vec{r}}(u)$ mamy:

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}(u) \left[\frac{-r}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}} \right].$$

łatwo policzyć, że $|\vec{v}_1| = |\dot{\vec{r}}(u)| = 1$, a to jak wiadomo jest warunkiem na to, żeby parametr u był łukiem. Obliczmy dalej $\ddot{\vec{r}}(u)$

$$\ddot{\vec{r}}(u) \left[\frac{-r}{r^2+b^2} \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad \frac{-r}{r^2+b^2} \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad 0 \right],$$

Długość $\ddot{\vec{r}}(u)$ wynosi $|\ddot{\vec{r}}(u)| = \frac{r}{r^2+b^2}$. Wobec tego

$$\vec{v}_2 = \frac{\ddot{\vec{r}}(u)}{|\ddot{\vec{r}}(u)|} \left[\cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad -\sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad 0 \right] \dots \quad (7)$$

Obliczymy następnie $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$. Po stosunkowo łatwych rachunkach mamy ostatecznie:

$$\vec{V}_3 \left[\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}} \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{r^2+b^2}} \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}} \right] \dots \quad (8)$$

Mając współrzędne wektorów \vec{V}_2 i \vec{V}_3 określone wzorami (7) i (8) możemy napisać równania wężownicy nawiniętej na walec kołowy o promieniu r , której linia centralna dana jest równaniami (6). W tym celu w równaniu (3) uwzględnimy związki (6), (7) i (8).

Będzie wtedy:

$$x = r \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} - a \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \cos v + \frac{a \cdot b}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \sin v$$

$$y = r \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} - a \sin \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \cos v - \frac{a \cdot b}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{r^2+b^2}} \cdot \sin v \dots \quad (9)$$

$$z = \frac{b \cdot u}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{a \cdot r}{\sqrt{r^2+b^2}} \sin v,$$

gdzie $u \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Część takiej wężownicy pokazana jest na rys. 2. Równania te możemy stosować do obliczania potencjału wektorowego oraz indukcji magnetycznej. Sposób ich stosowania pokazany jest w pracach (1) i (2).

4. Pierwsza i druga forma kwadratowa dla wężownicy

Wyprowadzimy teraz współczynniki pierwszej i drugiej formy kwadratowej dla powierzchni określonej równaniem (3). Jak wiadomo z geometrii różniczkowej pierwsza forma ma postać:

$$(ds)^2 = E \cdot (du)^2 + 2 \cdot F \cdot (du \cdot dv) + G \cdot (dv)^2,$$

gdzie współczynniki E , F i G obliczamy jako iloczyny skalarne wektorów \vec{r}_u i \vec{r}_v według wzorów:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \dots \quad (10)$$

Uwzględniając wyrażenia na wektory \vec{r}_u i \vec{r}_v obliczone w rozdziale pierwszym mamy po wykonaniu rachunków:

$$E = (1 - a \cdot \mathcal{K} \cdot \cos v)^2 + a^2 \cdot \tau^2,$$

$$F = a^2 \cdot \tau^2 \dots \quad (11)$$

$$G = a^2,$$

gdzie \mathcal{K} i τ są to krzywizna i torsja linii centralnej, której równania są określone przez (1) względnie przez (6). Jeżeli chodzi o drugą formę kwadratową, to jak wiadomo ma ona postać: $h = L \cdot (du)^2 + 2 \cdot M \cdot (du \cdot dv) + N \cdot (dv)^2$, gdzie współczynniki L , M i N są określone jak następuje:

$$L = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu}, \quad M = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv}, \quad N = \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv}, \dots \quad (12)$$

przy czym wektor \bar{n} jest unormowanym wektorem określonym przez (4) czyli

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}, \quad \text{natomiast} \quad \bar{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2}, \quad \bar{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v}, \quad \bar{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2}.$$

Wykonując odpowiednie rachunki dla wektora \bar{n} oraz obliczając pochodną rzędu drugiego i pochodne mieszane względem zmiennych u i v otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\bar{n} = -(\bar{V}_2 \cdot \cos v + \bar{V}_3 \cdot \sin v) \dots \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{uu} = & a \cdot (\mathcal{K} \cdot \tau \sin v - \mathcal{K} \cos v) \cdot \bar{V}_1 + (\mathcal{K} - a \cdot \mathcal{K}^2 \cos v - a \cdot \dot{\tau} \sin v - a \cdot \tau^2 \cos v) \cdot \bar{V}_2 + \\ & + (a \cdot \dot{\tau} \cos v - a \cdot \tau^2 \sin v) \cdot \bar{V}_3 \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{r}_{vv} = -a \cdot \bar{V}_2 \cdot \cos v - a \cdot \bar{V}_3 \cdot \sin v, \quad (15)$$

gdzie przez \mathcal{K} i τ oznaczyliśmy pochodną krzywizny i torsji linii centralnej względem parametru łuku. Mając wyrażenia na wektory \bar{n} , \bar{r}_{uu} , \bar{r}_{uv} oraz \bar{r}_{vv} dane przez (13) - (16) podstawiamy je do wzoru (12). Po wykonaniu rachunków mamy następujące wyrażenia na współczynniki drugiej formy kwadratowej:

$$L = (a \mathcal{K} \cos v - 1) \cdot \mathcal{K} \cdot \cos v + a \cdot \tau^2, \quad M = a \cdot \tau, \quad N = a \dots \quad (17)$$

Uwzględniając równości (17) możemy napisać drugą formę kwadratową dla węzownicy o równaniu wektorowym (3) w postaci:

$$h = \left[(a \cdot \mathcal{K} \cos v - 1) \cdot \mathcal{K} \cos v + a \tau^2 \right] (du)^2 + 2 \cdot a \cdot \tau \cdot (du \cdot dv) + a \cdot (dv)^2 \dots \quad (18)$$

Należy zauważyć, że współczynniki drugiej formy kwadratowej nie zależą od pochodnych krzywizny i torsji.

5. Zastosowanie pierwszej i drugiej formy kwadratowej

Pierwsza i druga forma kwadratowa powierzchni pozwala na określenie pola elektrycznego i magnetycznego w ośrodkach ograniczonych dowolnymi powierzchniami w następujących przypadkach:

- a) określenie rozprywu prądu przy danym rozmieszczeniu źródeł napięcia;
- b) określenie rozkładu pola magnetycznego przy danym rozmieszczeniu linii prądu.

Na przykład w przypadku b należy rozwiązać układ równań Maxwella wprowadzając odpowiednie warunki początkowe i brzegowe. Ponieważ zazwyczaj znamy prąd płynący przez wzbudnik, dlatego warunkiem początkowym będzie całka z gęstości prądu po przekroju normalnym, która jest równa prądowi płynącemu przez wzbudnik. Przekrój normalny wyznaczmy znając współrzędne kierunków głównych zgodne z kierunkami linii prądu w każdym punkcie. Warunki brzegowe wprowadza się przez porównanie składowych stycznych do kierunków głównych natężeń pola elektrycznego i magnetycznego oraz składowych normalnych do kierunków głównych indukcji elektrycznej i magnetycznej. Warunki te w przeważającej liczbie przypadków sprowadzają się do równań całkowych lub sumacyjnych. W oparciu o znajomość pierwszej i drugiej formy kwadratowej możemy napisać równanie różniczkowe linii krzywiznowych. Ma ono postać:

$$\begin{vmatrix} (dv)^2, & -du \cdot dv, & (du)^2 \\ L, & M, & N \\ E, & F, & G \end{vmatrix} = 0$$

Wektory styczne do tych linii wyznaczają kierunki główne na powierzchni. W przypadku powierzchni o symetrii sferycznej, cylindrycznej, eliptycznej i hiperbolicznej, warunki brzegowe można określić stosunkowo prosto. Natomiast dla powierzchni o symetrii bardziej skomplikowanej zachodzi konieczność określania odpowiednich współrzędnych. Na kierunkach stycznych i normalnych do linii parametrycznych zadaje się wtedy warunki brzegowe. Pierwsza i druga forma kwadratowa powierzchni pozwala również na wyznaczenie tych punktów powierzchni, które są typu kulistego, eliptycznego, parabolicznego i hiperbolicznego. W tych punktach umieszcza się odpowiedni układ odniesienia. Druga forma kwadratowa pozwala wyznaczyć również linie asymptotyczne powierzchni oraz stwierdzić, kiedy siatka Gaussa złożona jest u linii asymptotycznych.

LITERATURA

- [1] Morytko W., Brunne M.: Równania parametryczne wzbudników urządzeń metalurgicznych, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Seria Hutnictwo, zeszyt nr 6, 1975, s. 67-75

- [2] Morytko W., Brunne M.: Równania parametryczne wzbudników w postaci węzownic, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Seria Hutnictwo, zeszyt nr 8, 1976, s. 75-83.
- [3] Biernacki M.: Geometria różniczkowa, część I i II, PWN, Warszawa 1954.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИНДУКТОРОВ В ВИДЕ ЗМЕЕВИКОВ,
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ СЕЧЕНИЕМ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ КРУГ

Р е з ю м е

В статье введены параметрические уравнения змеевиков, перпендикулярным сечением которых является круг. Далее поданы условия для того, чтобы змеевик не имел особенных точек. Имея уравнения этих змеевиков, им даны первая и вторая формы квадратной теории поверхности.

В конце обсуждено применение этих форм для определения токораспределения при данном расположении источников напряжения, а также для определения распределения магнитного поля при данном расположении линии тока.

PARAMETRIC EQUATIONS OF INDUCTORS IN THE FORM
OF COIL WITH PERPENDICULAR CIRCULAR SECTION

S u m m a r y

In the article, parametric equations of coils, the perpendicular section of which is a circle, have been derived and discussed. Then, the conditions that such a coil would not possess singular points have been given. Having got the equations of the coils, the first and second square form area theory have been given for them. In the end, the application of these forms to the determination of current propagation at a given arrangement of the voltage source as well as, to the determination of magnetic field distribution at a given arrangement of the current line have been discussed.