

Andrzej KWIECIEŃ

Krzysztof TANNENBERG

Ośrodek Elektronicznej

Techniki Obliczeniowej

MIESZANE KODOWANIE KONTURÓW W GRAFICE KOMPUTEROWEJ

Streszczenie. W artykule przedstawiono algorytm mieszanego kodowania konturów oparty na analizie krzywizny konturu. Podano zasady doboru parametrów decyzyjnych i umieszczono otrzymane wyniki.

1. Wstęp

W grafice komputerowej często spotykamy się z zagadnieniem kodowania konturów.

Przez kodowanie konturów rozumieć będziemy zastępowanie konturu (otwartego lub zamkniętego) podanego w postaci analitycznej lub graficznej krzywymi elementarnymi.

Cele kodowania, zazwyczaj trudne do równoczesnego pogodzenia, są dwój-
jakie:

- Ułatwić wykreślenie konturu.

Ilustracją tego może być wykreślanie np. elipsy podanej w formie analitycznej. Zakładając, że grafoskop nie posiada generatora elips, należy zastąpić elipsę np. rodziną wektorów.

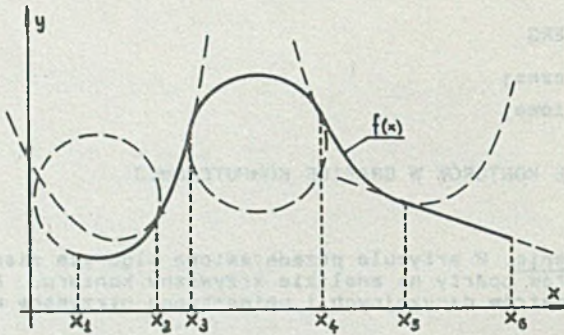
- Umożliwić (lub ułatwić) obliczenia związane z konturem.

Konieczność kodowania z tego względu występuje np. zawsze w przypadku, gdy kontur dany jest w postaci graficznej (rysunku) i należy znaleźć jego opis analityczny, by np. badać podobieństwo konturów.

Kryteria dobroci (poprawności) kodowania mogą być różne. Może to być najmniejszy błąd średniokwadratowy, najmniejszy błąd bezwzględny, najmniejsza ilość elementów kodujących przy tym samym błędzie, najlepsza gładkość linii, łatwość wykonywania przekształceń konturu itp.

Jako krzywe elementarne przyjmuje się krzywe posiadające specyficzne (szczególne) cechy, które ułatwiają manipulowanie konturami i ułatwiają kreślenie konturu na ekranie grafoskopu. Zazwyczaj krzywe elementarne stanowią repertuar sprzętowo generowanych krzywych w grafoskopie (np. wektor, okrąg, elipsa, parabola).

Przez mieszane kodowanie konturów (MKK) rozumiemy zastępowanie jednego konturu przez więcej niż jedną rodzinę krzywych elementarnych.



Rys. 1. Mieszane kodowanie konturów (MKK)

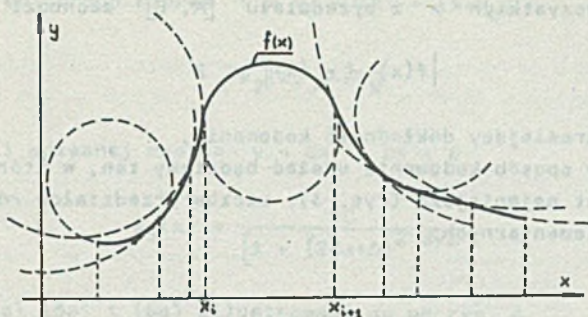
Na rys. 1 zilustrowano MKK. Kontur podany w postaci funkcji $y = f(x)$ zakodowano trzema rodzinami krzywych: okręgami, parabolami i wektorem (tab. 1).

Tabela 1

Przedział	Krzywa elementarna
(x_1, x_2)	łuk kołowy
(x_2, x_3)	parabola
(x_3, x_4)	łuk kołowy
(x_4, x_5)	parabola
(x_5, x_6)	wektor (prosta)

Przez proste kodowanie konturów (PKK) rozumiemy zastępowanie jednego konturu przez jedną rodzinę krzywych elementarnych (np. kodowanie tylko okręgami). Wynika z tego, że PKK jest szczególnym przypadkiem MKK. Na rys. 2 przedstawiono PKK. Kontur otwarty $y = f(x)$ zakodowano semiami okręgami (łukami kołowymi).

Można oczekiwać, że do odtworzenia danego konturu metodą MKK potrzeba znacznie mniejszej liczby krzywych elementarnych niż w metodzie PKK. Gładkość otrzymanego konturu także powinna być w MKK lepsza niż w PKK. Można przewidywać, że algorytm MKK w porównaniu z algorytmem PKK będzie trudniejszy i bardziej czasochłonny.



Rys. 2. Proste kodowanie konturów (PKK)

W dalszej części artykułu przedstawiony zostanie algorytm MKK oparty na analizie krzywizny konturu, który znalazł zastosowanie w przedstawieniu rysunków na ekranie grafoskopu z lampą oscyloskopową. Rozważania ograniczone są do konturów otwartych danych w postaci funkcji $y = f(x)$. Przedstawiony algorytm MKK można jednak stosować z równym powodzeniem do kodowania konturów zdefiniowanych (określonych) równaniami parametrycznymi $x = x(t)$ i $y = y(t)$.

2. Repertuar krzywych elementarnych

Repertuar krzywych elementarnych wykorzystywanych w algorytmie MKK obejmuje: wektory (proste), okręgi, łuki kołowe i parabole. Repertuar ten określony został możliwościami stosowanego grafoskopu, który posiadał sprzętowy generator krzywych drugiego stopnia. Poza wektorami, okręgami i parabolami generator mógł generować także elipsy. Algorytm MKK z łuków eliptycznych nie korzysta. Analiza krzywizny konturu (danego w postaci funkcji $y = f(x)$) nie daje możliwości rozróżnienia łuku eliptycznego od łuku parabolicznego.

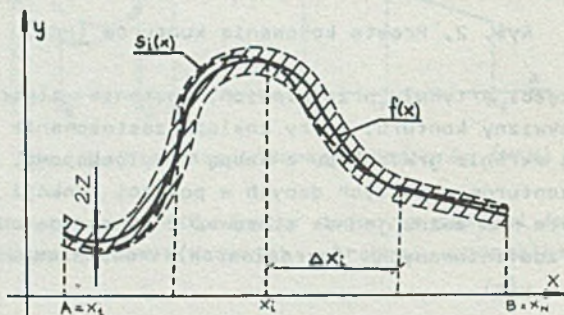
3. Kryterium jakości kodowania

Algorytm MKK stosowany był w grafoskopie z lampą oscyloskopową. Cechą charakterystyczną tego typu grafoskopów jest tworzenie rysunku z linii ciągłych (nie z punktów jak w grafoskopach z lampą kineskopową) i odświeżenie (powielanie) rysunku z częstotliwością 30-40 Hz. Oznacza to, że cały rysunek musi być wykreślony w czasie około 25-33 ms. Jeżeli uwzględnimy, że każdy element rysunku (każde krzywa elementarna) wykreślony jest w takim samym czasie (ok. 80 μ s), to stanie się oczywiste dążenie do jak najmniejszej liczby krzywych elementarnych tworzących dany rysunek (kontur).

Stąd kryterium jakości kodowania sformułowano następująco:
Jeżeli dla wszystkich x z przedziału $[A, B]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - s_1(x)| \leq Z \quad (1)$$

Z - parametr określający dokładność kodowania,
to za najlepszy sposób kodowania uważać będziemy ten, w którym liczba $N-1$ przedziałów jest najmniejsza (rys. 3). Liczba przedziałów równa jest liczbie krzywych elementarnych.



Rys. 3. Kryterium jakości kodowania

Czynnikiem pomocniczym brany także pod uwagę przy ocenie jest gładkość kodowania mierzona kątem φ_1 przecięcia się krzywych elementarnych w punktach x_1 .

$$\varphi_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\arctg s_1'(x_1 + \alpha) - \arctg s_1'(x_1 - \alpha)] \quad (2)$$

4. Krzywizna funkcji

Algorytm MKK oparto na analizie krzywizny $k(x)$ oraz ograniczono do konturów podanych w postaci funkcji $y = f(x)$. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła wraz z pierwszą i drugą pochodną, to krzywizna w punkcie x_0 wyraża się wzorem (3):

$$k(x_0) = \frac{f''(x_0)}{[1 + [f'(x_0)]^2]^{3/2}} \quad (3)$$

Z zależności (3) otrzymamy

$$\text{- dla wektora opisanego wzorem } y = ax + b \quad (4)$$

$$k_1(x) = 0 \quad (4a)$$

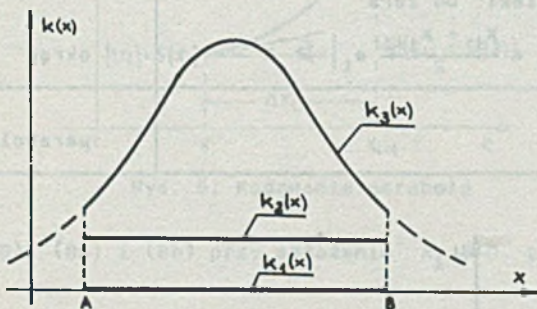
- dla okręgu opisanego wzorem $y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}$ (5)

$$k_2(x) = \pm \frac{1}{R} \quad (5a)$$

- dla paraboli opisanej wzorem $y = Cx^2 + Dx + E$ (6)

$$k_3(x) = \frac{2C}{[1 + (2Cx+D)^2]^{3/2}} \quad (6a)$$

Zależności (4a) (5a) i (6a) zilustrowane są na rys. 4.



Rys. 4. Krzywizna funkcji elementarnych

Warto w tym miejscu zauważyć, że krzywizna wektora równa się zero, krzywizna okręgu jest stała, a krzywizna paraboli w dużym przedziale jest prawie liniowo zmieniająca się. Przez zmiany współczynników C , D i E w równaniu paraboli można zmieniać położenie i kształt krzywizny paraboli $k_3(x)$.

5. Wyznaczanie podprzedziałów

Algorytm MKK podzielić można na dwie zasadnicze części. W części pierwszej algorytmu dokonuje się aproksymacji krzywizny $k(x)$ rodziną funkcji liniowych $g(x) = a_1x + b_1$ z zadaną dokładnością ϵ .

$$|k(x) - g(x)| \leq \epsilon \quad (7)$$

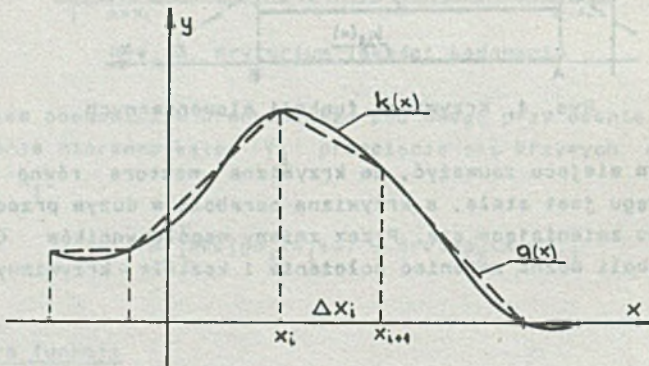
W wyniku tego otrzymuje się linię łamaną, która punktami przegięcia x_1 dzieli przedział $[A, B]$ na przedziały Δx_1 (rys. 5). W każdym przedziale Δx_1 koduje się kontur jedną krzywą elementarną (z wyjątkiem przypadku przedstawionego w Uwadze 1 na końcu niniejszego rozdziału). W za-

leżności od nachylenia a_1 odcinka aproksymującego i jego położenia dokonuje się wyboru elementu kodującego, którym może być okrąg, parabola lub wektor.

Kryteria doboru elementu kodującego w zależności od doboru zadawanych parametrów decyzyjnych zawarte są w tabeli 2 i zilustrowane na rys. 5.

Tabela 2

Lp.	Rodzaj odcinka $g(x) = a_1x + b_1$ aproksymującego $k(x)$	Element kodujący kontur
1	Poziomy i "bliski" zera $ a_1 < P$ i $ b_1 + \frac{x_i + x_{i+1}}{2} a_1 < R$	wektor (prosta)
2	Poziomy i "daleki" od zera $ a_1 < P$ i $ b_1 + \frac{x_i + x_{i+1}}{2} a_1 \geq R$	okrąg
3	Nachylony $ a_1 \geq P$	parabola

Rys. 5. Aproksymacja krzywizny $k(x)$

W części drugiej algorytmu wyznacza się parametry elementu kodującego (krzywej elementarnej) kontur w przedziale Δx_1 .

5.1. Kodowanie parabolą w przedziale Δx_1

Współczynniki paraboli $s(x) = Cx^2 + Dx + E$ określone są przez:

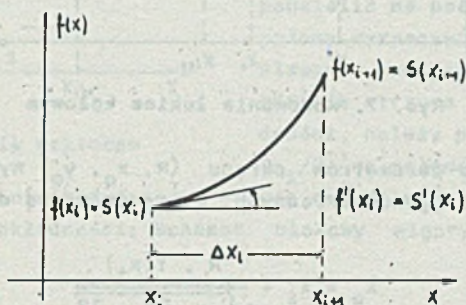
- wartość funkcji $f(x)$ na początku przedziału,
- wartość funkcji $f(x)$ na końcu przedziału,
- wartość pierwszej pochodnej funkcji $f(x)$ na początku przedziału,

a więc

$$s(x_1) = f(x_1) \quad (8)$$

$$s(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \quad (8a)$$

$$s'(x_1) = f'(x_1) \quad (8b)$$



Rys. 6. Kodowanie parabolą

Z równań (8), (8a) i (8b) przy założeniu $x_1 \neq 0$ i $x_{i+1} \neq 0$ otrzymuje się:

$$D = \frac{2x_1 [f(x_1) - f(x_{i+1})] - f'(x_1)(x_1^2 - x_{i+1}^2)}{(x_1 - x_{i+1})^2} \quad (9)$$

$$C = \frac{f'(x_1) - D}{2x_1} \quad (9a)$$

$$E = f(x_1) - Cx_1^2 - Dx_1 \quad (9b)$$

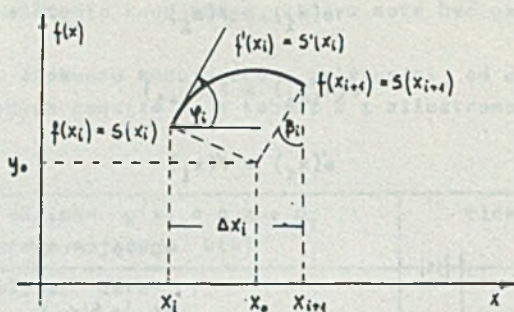
5.2. Kodowanie okręgiem w przedziale Δx_1

Podobnie jak w przypadku kodowania parabolą muszą zachodzić równości:

$$f(x_1) = s(x_1) \quad (10)$$

$$f(x_{i+1}) = s(x_{i+1}) \quad (10a)$$

$$f'(x_1) = s'(x_1) \quad (10b)$$



Rys. 7. Kodowanie łukiem kołowym

Przy wyznaczaniu parametrów okręgu (R, x_0, y_0) wygodnie jest skorzystać z zależności trygonometrycznych, które prowadzą do wzorów:

$$x_0 = x_1 + \frac{R \cdot f'(x_1)}{\sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}} \quad (11)$$

$$y_0 = f(x_1) - R \cos \varphi_1 \quad (11a)$$

$$R = \frac{x_{i+1} - x_1}{\sin \varphi_1 - \sin \beta_1} \quad (11b)$$

gdzie:

$$\varphi_1 = \arctg f'(x_1) \quad (11c)$$

$$\beta_1 = 2 \arctg \frac{f(x_{i+1}) - f(x_1)}{x_{i+1} - x_1} - \varphi_1 \quad (11d)$$

Wzór (11b) pozwala uzyskać promień R dodatni lub ujemny, przy czym:

$R < 0$ oznacza, że mamy do czynienia z górnym półokręgiem,

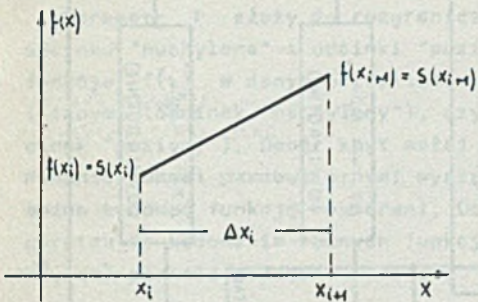
$R > 0$ oznacza, że mamy do czynienia z dolnym półokręgiem.

5.3. Kodowanie odcinkiem (wektorem) w przedziale Δx_1

Parametry prostej kodującej $s(x) = Ax + B$ wyznaczą się następująco:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_{i+1})}{x_1 - x_{i+1}} \quad (12)$$

$$B = -A_1 x_1 + f(x_1) \quad (13)$$



Rys. 8. Kodowanie wektorem

Uwaga 1

Jeżeli po wyznaczeniu parametrów wybranego elementu kodującego okaże się, że kodowanie nim całego przedziału Δx_1 nie jest zadowalające, tj. nie jest spełniona zależność (1), należy przedział Δx_1 podzielić na połowę i dla każdej połowy wyznaczyć nowe parametry elementu kodującego. Jeżeli i teraz nie otrzyma się żądanej dokładności, należy ponownie podzielić $\Delta x_1/2$ na połowę i ponownie wyznaczyć parametry elementu kodującego. Proces ten należy powtarzać aż do uzyskania zadanej dokładności. Schemat blokowy algorytmu przedstawiony jest na rys. 9.

6. Dobór parametrów decyzyjnych Z, E, P, R

Właściwy dobór parametrów Z, E, P, R ma istotny wpływ na optymalizację kreślenia.

Dobór parametru Z

Parametr Z dobiera się w zależności od wymaganej dokładności kodowania. W grafoskopie najczęściej operuje się 10-bitowymi współrzędnymi. W związku z tym, w przypadku stosowania algorytmu do obliczania parametrów obrazu przedstawianego na grafoskopie, należy przyjąć $Z \approx 0,1\%$ maksymalnej współrzędnej obrazu (maksymalnej wartości funkcji $f(x)$). Jeżeli grafoskop operuje współrzędnymi od -512 do 511, wartość Z winna wynosić $Z \approx 0,2\%$ maksymalnej współrzędnej obrazu.

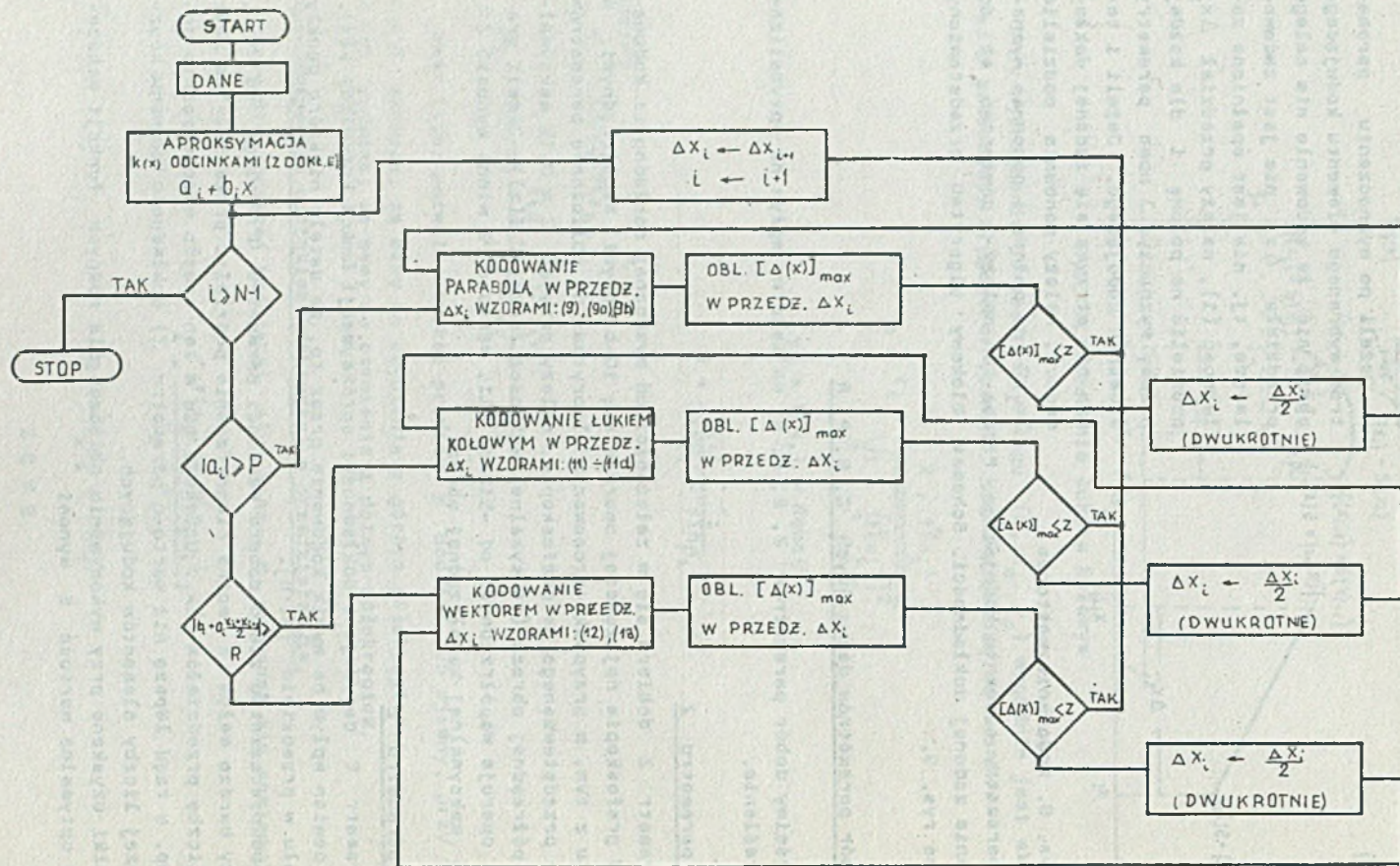
Dobór parametru E

Parametr E decyduje o dokładności aproksymacji funkcji krzywizny $k(x)$. Ma on pewien wpływ na wynik kodowania przez to, że ustala niektóre punkty podziału w przedziale $[A, B]$.

Niebezpieczeństwo złego doboru wartości parametru E polega na tym, że przy bardzo małym E można niepotrzebnie podzielić przedział na zbyt dużą liczbę przedziałów Δx_1 . Uzyskuje się w ten sposób niepotrzebnie dobrą (np. o rząd lepszą niż wartość parametru Z) dokładność kodowania kosztem dużej liczby elementów kodujących.

Wyniki uzyskane przy wykonywaniu obliczeń dla różnych funkcji wskazują, że optymalna wartość E wynosi

$$E \approx 2 Z$$



Rys. 9. Schemat blokowy algorytmu

Dobór parametru P

Parametr P służy do rozgraniczenia odcinków aproksymujących $k(x)$ na odcinek "nachylony" i odcinki "poziome". Decyduje tym samym o tym, czy funkcja $f(x)$ w danym przedziale Δx_1 ma być kodowana łukami parabolicznymi (odcinek "nachylony"), czy też innymi elementami (krzywymi) (odcinek "poziomy"). Dobór zbyt małej wartości parametru P sprawia, że kodowanie łukami parabolicznymi wystąpi także tam, gdzie zupełnie dobrze można kodować funkcję wektorami. Doświadczenie uzyskane ze stosowania algorytmu do kodowania różnych funkcji (np. funkcji trygonometrycznych, a^x , a^x , a^x) pozwala zalecać:

$$P \approx 10 Z$$

Dobór parametru R

Parametr R umożliwia sklasyfikowanie odcinków aproksymujących $k(x)$ na odcinki "poziome i bliskie zera" i odcinki "poziome i dalekie od zera". Określa tym samym, czy funkcja $f(x)$ w danym przedziale Δx_1 jest kodowana łukiem kołowym (odcinek "poziomy i daleki od zera"), czy wektorem (odcinek "poziomy i bliski zera").

Zbyt mała wartość parametru R sprawia, że w wyniku otrzymujemy łuki kołowe o bardzo dużych promieniach (zbliżone, w wykorzystywanym przedziale Δx_1 , do wektora). Jest to o tyle ważne, że np. w grafośkopach wartość promienia łuku, najczęściej, nie może przekraczać $R \leq 1023$ (patrz "Dobór parametru Z"). Za dużą wartość parametru R powoduje niepotrzebne zastępowanie jednego łuku kilkoma wektorami.

Na podstawie wykonanych przykładów można proponować

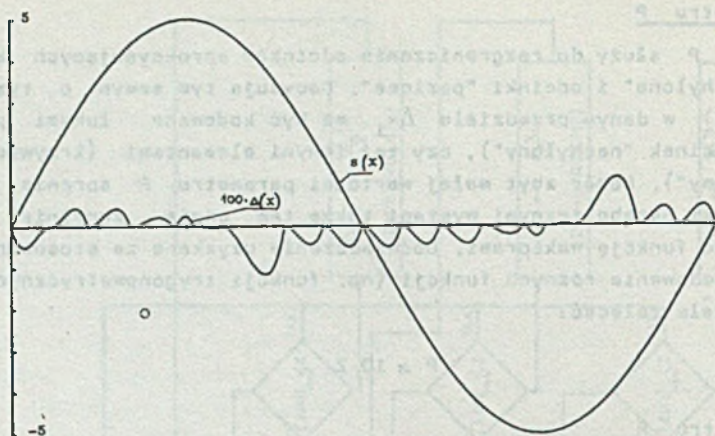
$$R \approx 5 Z$$

7. Wyniki

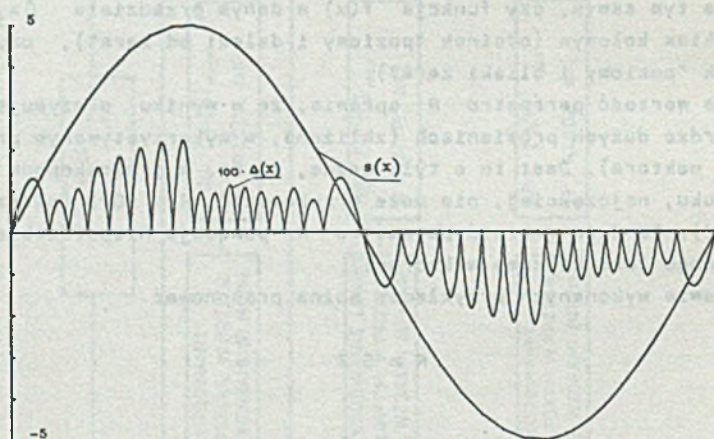
Algorytm MKK wykorzystano do kodowania wielu konturów. We wszystkich przypadkach uzyskano wyniki znacznie lepsze niż przy PKK wektorami. Na rys. 10 przedstawiony jest kontur zdefiniowany funkcją $y = 5 \sin x$ kodowany wg algorytmu MKK. Kontur utworzony jest przez 16 łuków parabolicznych i 2 łuki kołowe. Maksymalny błąd

$$\Delta(x) = |5 \sin x - s(x)| \quad (14)$$

wynosi $[\Delta(x)]_{\max} = 0.011$.



Rys. 10. Kontur $y = 5\sin x$ kodowany wg algorytmu MKK



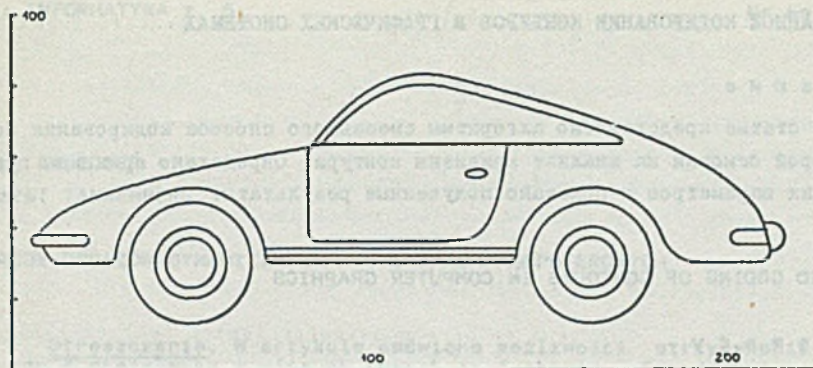
Rys. 11. Kontur $y = 5\sin x$ kodowany wg algorytmu PKK

Na rys. 11 pokazano ten sam kontur kodowany tylko wektorami. Kontur utworzony jest przez 34 wektory. Maksymalny błąd $[\Delta(x)]_{\max 2} = 0.019$. W obu przypadkach przyjęto $Z = 0.02$. Maksymalny kąt przecięcia się dwóch sąsiednich krzywych elementarnych obliczony zgodnie ze wzorem (2) wynosi:

$$\text{algorytm MKK} - 3.18^{\circ}$$

$$\text{algorytm PKK (wektorami)} - 26.3^{\circ}$$

Innym przykładem może być rys. 12. Przedstawioną tam sylwetkę samochodu zakodowano algorytmem MKK, co pozwoliło utworzyć cały rysunek z 58 krzywych elementarnych: 13 wektorów, 14 łuków kołowych, 6 okręgów, 24 łu-



Rys. 12. Sylwetka samochodu

ków parabolicznych i 1 elipsy. Gdyby ten sam rysunek wykonać tylko za pomocą wektorów, to należałoby użyć około 650 wektorów. Przy obliczaniu ilości wektorów przyjęto, że okręgi i łuki kołowe o promieniu $R \geq 10$ kodowane są wektorami o długości $R/8$, a o promieniu mniejszym $R < 10$ - wektorami o długości $R/4$. Dla pozostałych krzywych występujących w pierwotnym opisie rysunku (e^x , x i elipsy) dokonano szacunkowych obliczeń, przyjmując $Z = 0.2$.

Zamieszczone w pracy przykłady oraz wyniki znajdujące się w [1] pozwalają stwierdzić, że algorytm MKK prowadzi do istotnego zmniejszenia liczby krzywych elementarnych potrzebnych do zakodowania danego konturu - co wpływa na zmniejszenie potrzebnej pojemności pamięci obrazu i zwiększa szybkość kreślenia rysunku na ekranie grafoskopu.

LITERATURA

- [1] Tannenberga K.: Grafoskop ze sprzętowym generatorem krzywych drugiego stopnia. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska 1980.
- [2] Borsuk K.: Geometria analityczna wielowymiarowa. PWN, Warszawa 1977.
- [3] Coons S.A.: Modification of the shape of piecewise curves; Comp. Aided Design, No 3, 1977.
- [4] Greville T.N.: Theory and Applications of Spline Functions. Academic Press, London 1969.
- [5] Jakubczyk K.: Zastosowanie funkcji sklepanych z łuków kołowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska 1978.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Grzywak

Wpłynęło do Redakcji 14.10.1981 r.

СМЕШАННОЕ КОДИРОВАНИЕ КОНТУРОВ В ГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Резюме

В статье представлено алгоритмы смешанного способа кодирования контуров, которой основан на анализе кривизны контура. Определено принципы подбора решающих параметров и показано полученные результаты.

MIXED CODING OF CONTOURS IN COMPUTER GRAPHICS

Summary

This paper describes the algorithm of mixed coding of contours based on analysis of curvature. The rules of choice of decision parameters are presented. Furthermore, two applications are described as examples.

LITERATURA

- [1] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [2] Донован Р. М. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [3] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [4] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [5] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [6] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [7] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [8] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [9] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.
- [10] Теннеберг К. Алгоритмы смешанного кодирования контуров. Доклады Академии Наук СССР, 1977.

Ученый секретарь: д.т.н. Андрей Савчук
 Адрес: 220000, Минск, ул. Кавалицкая, 14, кв. 10
 Тел.: (017) 233-10-10