ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: HUTNICTWO z. 23 Nr kol. 702

Franciszek FIKUS
Czesław SAJDAK
Alicja KUREK
Instytut Inżynierii Materiałowej
Politechniki Śląskiej

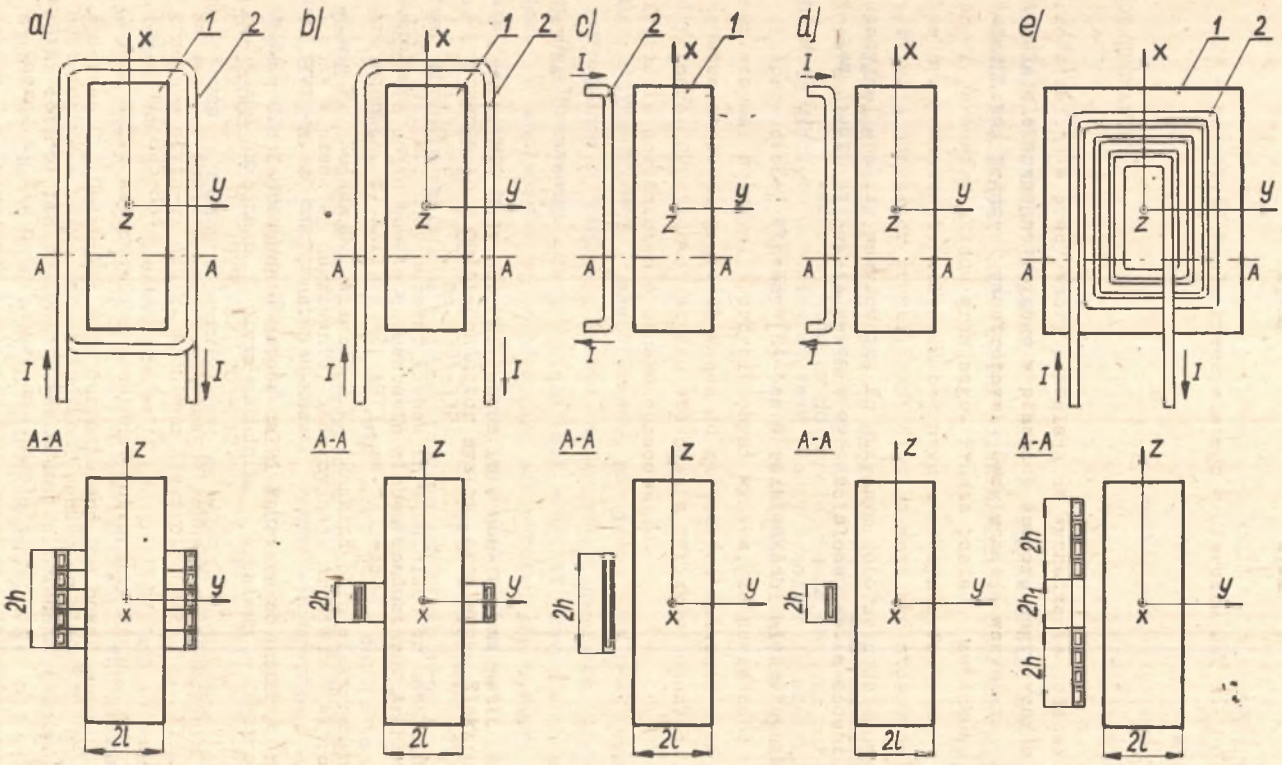
PRZYBLIŻONE OBLICZANIE WIELKOŚCI POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PŁASKICH WSADACH NIEMAGNETYCZNYCH NAGRZEWANYCH INDUKCYJNIE WZBUDNIKAMI JEDNO- I DWUSTRONNYMI

Streszczenie: Przedstawiono sposób przybliżonego określania wielkości pola elektromagnetycznego w najważniejszych typach nagrzewnic indukcyjnych do niemagnetycznych wsadów płaskich.
Dokładność obliczeń rośnie wraz ze wzrostem stosunku grubości wsadu do głębokości wnikania pola elektromagnetycznego.

1. WSTĘP

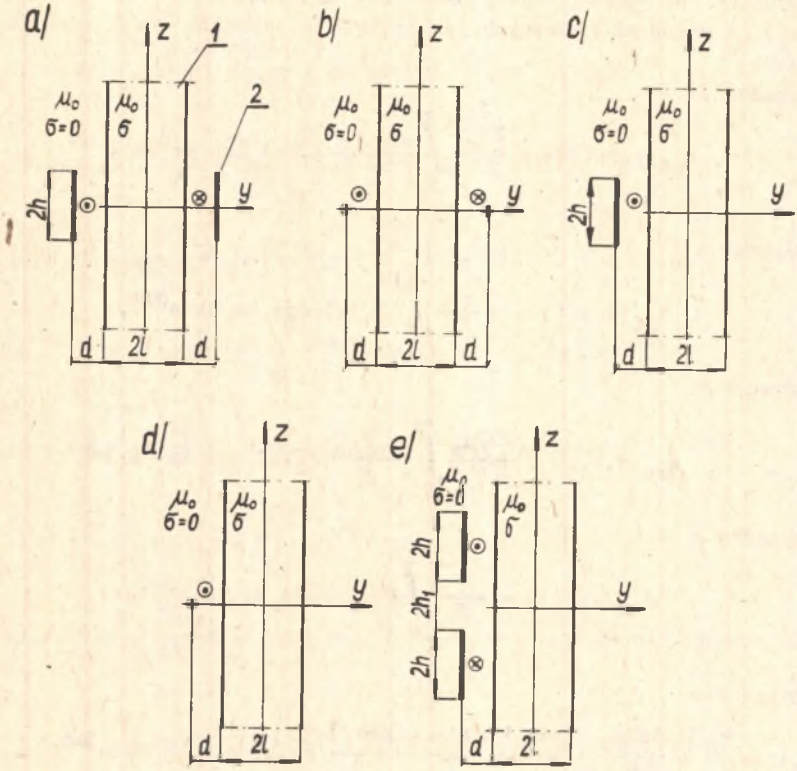
W pracach [1-5] analizowane są najważniejsze termoindukcyjne układy wsad-wzbudnik, stosowane w procesach obróbki cieplnej i plastycznej płyt oraz blach metalowych. Przyjęte tam, niezbędne dla uproszczenia obliczeń, założenia sprowadzają rzeczywiste nagrzewnice (przedstawione schematycznie na rys. 1) do modeli obliczeniowych (rys. 2), w których wsad stanowi nieskończenie rozległa w kierunkach osi x i z płyta o grubości 2l, konduktywności σ i przenikalności magnetycznej μ_0; natomiast wzbudnik jest nieskończenie cienką i rozległą w kierunku osi x folią o wysokości 2h (rys. 2a, c, e) lub równej zero (rys. 2b, d). W tych przypadkach, w zależności od zastosowanej metody rozwiązywania równań Maxwella, rozkłady wielkości pola elektromagnetycznego (indukcja magnetyczna B, gęstość prądu indukowanego J, moc P itp.) opisane są funkcjami mającymi postać całek niewłaściwych (np. [1-4]) lub szeregów trygonometrycznych Fouriera (np. [5]). Obliczenia konkretnych układów są pracochłonne i wymagają użycia maszyn cyfrowych.

W pracach M. Krakowskiego [1, 2] rozwiązywane jest podobne zagadnienie elektromagnetyczne dla przypadków c i d z rys. 2. Dla wyznaczenia wartości całek niewłaściwych stosuje się tam wzory asymptotyczne dla całek Laplace'a [6], dające dobre przybliżenie przy wartościach argumentu $|(1+j)\delta^{-1}|r > 10$ (δ - głębokość wnikania pola elektromagnetycznego, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, y, z - współrzędne).



Rys. 1. Nagrzewnice indukcyjne do wsadów płaskich

1 - wsad, 2 - wzbudnik, a - ze wzbudnikiem wielozwojowym dwustronnym, b - ze wzbudnikiem jednozwojowym dwustronnym, c, d - ze wzbudnikami jednostronnymi o różnych wysokościach zwoju, e - ze wzbudnikiem pętlowym jednostronnym



Rys. 2. Modele obliczeniowe nagrzewnic z rys. 1
1 - wsad, 2 - wzbudnik

W [7, 8] wykazano, że gdy wsad jest niemagnetyczny ($\mu = \mu_0$), a parametr $2l : \delta$ osiąga duże wartości, można z zadowalającą dokładnością obliczyć całki niewłaściwe, opisujące wielkości pola elektromagnetycznego, rozwiązując je elementarnie. Przypadek ten zachodzi zwłaszcza dla małych głębokości wnikania pola elektromagnetycznego, np. przy nagrzewaniu prądami średniej (0,25-10 kHz) i wielkiej częstotliwości (>10 kHz).

W [8] podano tok obliczeń i wzory uproszczone dla układu grzejnego z rys. 1e (odpowiedni model na rys. 2e). Przy $2l : \delta = 3$ (np. f = 2500 Hz, $\sigma = 10^6$ S/m, 2l = 0,03 m) maksymalna różnica między wartościami obliczonymi wzorami z [4] i przybliżonymi wynosiła ok. 13%, natomiast przy $2l : \delta \approx 7$ (np. f = 500 Hz, $\sigma = 5{,}5 \cdot 10^7$ S/m, 2l = 0,02 m) - ok. 5%.

W tym artykule, będącym kontynuacją [8], przedstawi się skrótowo analizę matematyczną pozostałych przypadków (rys. 2a, b, c, d) korzystając ze związków wyznaczonych we wcześniejszych pracach [3, 4].

2. POTENCJAŁ WEKTOROWY

Zgodnie z [3, 4] potencjały wektorowe we wsadach niemagnetycznych ($\mu = \mu_o$), w układach grzejnych jak na rys. 2, opisane są następującymi funkcjami:

- przypadek a

$$A_{wa}(y,z,t) = -\frac{NI\mu_o}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin kh}{k} F_1(k) \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{1}$$

- przypadek b

$$A_{wb}(y,z,t) = -\frac{I\mu_o}{\pi}\int_0^\infty F_1(k) \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{2}$$

- przypadek c

$$A_{wc}(y,z,t) = \frac{2NI\mu_o}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin kh}{k} F_2(k) \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{3}$$

- przypadek d

$$A_{wd}(y,z,t) = \frac{2I\mu_o}{\pi}\int_0^\infty F_2(k) \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{4}$$

- przypadek e

$$A_{we}(y,z,t) = \frac{4NI\mu_o}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin kh \sin k(h+h_1)}{k} F_2(k) \sin kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{5}$$

gdzie:

$$F_1(k) = \frac{\operatorname{sh} p_o y}{k \operatorname{sh} p_o l + p_o \operatorname{ch} p_o l} e^{-kd}, \tag{6}$$

$$F_2(k) = \frac{p_o \operatorname{ch} p_o(y-l) - k \operatorname{sh} p_o(y-l)}{e^{2p_o l}(p_o+k)^2 - e^{-2p_o l}(p_o-k)^2} e^{-kd}, \tag{7}$$

$$p_o = \sqrt{k^2 + j\omega\mu_o\sigma} = \sqrt{k^2 + j\beta^2} \tag{8}$$

N - ilość zwojów wzbudnika,
I - natężenie prądu płynącego przez wzbudnik,
k - zmienna całkowania,
$\omega = 2\pi f$,
f - częstotliwość.

Po przyjęciu analogicznych założeń jak w [8] ($p_o = \sqrt{k^2 + j\beta^2} \approx \beta\sqrt{j}$, równość funkcji hiperbolicznych przy dużych wartościach argumentu *)) wyrażenia (1-5) można sprowadzić do:

$$A_{wa}(y,z,t) = -\frac{NI\mu_o}{\pi h}\frac{\mathrm{sh}\gamma y}{\gamma \mathrm{ch}\gamma l}\int_0^\infty \frac{\sin kh}{k} e^{-kd} \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{9}$$

$$A_{wb}(y,z,t) = -\frac{I\mu_o}{\pi}\frac{\mathrm{sh}\gamma y}{\gamma \mathrm{ch}\gamma l}\int_0^\infty e^{-kd} \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{10}$$

$$A_{wc}(y,z,t) = \frac{NI\mu_o}{\pi h\gamma \mathrm{sh}\, 2\gamma l}\left[\mathrm{ch}\gamma(y-l)\int_0^\infty \frac{\sin kh}{k} e^{-kd} \cos kz\, dk - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma}\mathrm{sh}\gamma(y-l)\int_0^\infty e^{-kd} \sin kh \cos kz\, dk\right] e^{j\omega t}, \tag{11}$$

$$A_{wd}(y,z,t) = \frac{I\mu_o}{\pi\gamma \mathrm{sh}\, 2\gamma l}\left[\mathrm{ch}\gamma(y-l)\int_0^\infty e^{-kd} \cos kz\, dk - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma}\mathrm{sh}\gamma(y-l)\int_0^\infty k\, e^{-kd} \cos kz\, dk\right] e^{j\omega t}, \tag{12}$$

$$A_{we}(y,z,t) = \frac{2NI\mu_o}{\pi h\gamma \mathrm{sh}\, 2\gamma l}\left[\mathrm{ch}\gamma(y-l)\int_0^\infty \frac{\sin kh \sin k(h+h_1)}{k} e^{-kd} \sin kz\, dk - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma}\mathrm{sh}\gamma(y-l)\int_0^\infty e^{-kd} \sin kh \sin k(h+h_1) \sin kz\, dk\right] e^{j\omega t}, \tag{13}$$

gdzie:

$$\gamma = \beta\sqrt{j} = \frac{1+j}{\delta} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_o\sigma}, \tag{14}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}}. \tag{15}$$

Występujące w powyższych wzorach całki niewłaściwe posiadają już elementarne rozwiązania. Po wykorzystaniu związków, odpowiednio:

*) Funkcje hiperboliczne sh i ch o argumencie $\mathrm{Re}\left[\beta\sqrt{j}\, l\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{l}{\delta}(1+j)\right]$ lub $\mathrm{Re}\left[\beta\sqrt{j}\, 2l\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{2l}{\delta}(1+j)\right]$ są w przybliżeniu równe (błąd ok. 0,5%) już przy $\frac{l}{\delta} = 3$ lub $\frac{2l}{\delta} = 3$.

a - 3.947.3 [9]
b - 860.90 [10]
c - 3.947.3 [9] i 861.14 [10]
d - 860.90 i 860.91 [10]
e - 3.949.1 [9] i 861.14 [10]

otrzymuje się ostatecznie

$$A_{wa} = -\frac{NI\mu_o}{2\gamma\pi h}\frac{\operatorname{sh}\gamma y}{\operatorname{ch}\gamma l}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2dh}{d^2-h^2+z^2}+s\pi\right]e^{j\omega t}, \tag{16}$$

$$A_{wb} = -\frac{I\mu_o}{\pi\gamma}\frac{\operatorname{sh}\gamma y}{\operatorname{ch}\gamma l}\frac{d}{d^2+z^2}\,e^{j\omega t}, \tag{17}$$

$$A_{wc} = \frac{NI\mu_o}{\pi h\gamma\operatorname{sh}2\gamma l}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ch}\gamma(y-l)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2dh}{d^2-h^2+z^2}+s\pi\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma(y-l)\frac{h(d^2+h^2-z^2)}{\left[d^2+(h-z)^2\right]\left[d^2+(h+z)^2\right]}\right\}e^{j\omega t}, \tag{18}$$

$$A_{wd} = \frac{I\mu_o}{\pi\gamma\operatorname{sh}2\gamma l}\left[\operatorname{ch}\gamma(y-l)\frac{d}{d^2+z^2}-\frac{1}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma(y-l)\frac{d^2-z^2}{(d^2+z^2)^2}\right]e^{j\omega t}, \tag{19}$$

$$A_{we} = \frac{2NI\mu_o}{\pi h\gamma\operatorname{sh}2\gamma l}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ch}\gamma(y-l)\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2h+h_1-z}{d}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2h+h_1+z}{d}+\right.\right.$$
$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{h_1+z}{d}+\operatorname{arc\,tg}\frac{z-h_1}{d}\right]-\frac{h+h_1}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma(y-l)\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{d^2+(h+h_1)^2-(h-z)^2}{\left[d^2+(h_1+z)^2\right]\left[d^2+(2h+h_1-z)^2\right]}-\frac{d^2+(h+h_1)^2-(h+z)^2}{\left[d^2+(h_1-z)^2\right]\left[d^2+(2h+h_1+z)^2\right]}\right]e^{j\omega t}, \tag{20}$$

przy czym występujący we wzorach (16) i (18) parametr s przyjmuje wartości: $s = 0$ dla $d^2 - h^2 + z^2 \geqslant 0$

i $s = 1$ dla $d^2 - h^2 + z^2 < 0$.

3. INDUKCJA MAGNETYCZNA, GĘSTOŚĆ PRĄDÓW INDUKOWANYCH, MOC WYDZIELONA WE WSADZIE

Pozostałe wielkości pola elektromagnetycznego we wsadzie można wyrazić przez potencjał wektorowy następująco:

- indukcja magnetyczna

$$\vec{B}_w = \left[\frac{\partial A_w(y,z)}{\partial z}\vec{1}_y - \frac{\partial A_w(y,z)}{\partial y}\vec{1}_z\right]e^{j\omega t} = \left[B_{yw}\vec{1}_y + B_{zw}\vec{1}_z\right]e^{j\omega t}, \tag{21}$$

gdzie:

B_{yw} - składowa poprzeczna indukcji magnetycznej,

B_{zw} - składowa wzdłużna indukcji magnetycznej,

$\vec{1}_y$, $\vec{1}_z$ - wektory jednostkowe osi y i z.

- gęstość prądów indukowanych

$$\vec{J}_w = \sigma\vec{E}_w = -\sigma\frac{\partial A_w}{\partial t}\vec{1}_x = -j\omega\sigma A_w\vec{1}_x, \tag{22}$$

- wektor Poyntinga (gęstość strumienia mocy)

$$\vec{S}_w = \frac{j\omega}{2\mu_o}\left[\vec{A}_w \times \vec{B}_w^*\right], \tag{23}$$

gdzie $\vec{B}_w^*$ - jest wektorem zespolonym sprzężonym z $\vec{B}_w$.

Składowa poprzeczna wektora Poyntinga S_y, wnikającego do wsadu od strony wzbudnika przez powierzchnie boczne płyty (y = -1 lub y = 1), ma postać

$$S_y = \frac{j\omega}{2\mu_o}A_w \cdot B_{zw}^*\Big|_{y=-1} = P_s + j\,Q_s, \tag{24}$$

przy czym $B_{zw}^* = -\dfrac{\partial A_w^*(y,z)}{\partial y}$.

Część rzeczywista S_y jest gęstością powierzchniową mocy czynnej (P_s-W/m^2), natomiast część urojona - gęstością mocy biernej (Q_s - VAr/m^2).

- moc czynna

$$P_w = \int_V p_w\,dV = \frac{1}{\sigma}\int_V J_w \cdot J_w^*\,dV = \omega^2\sigma\int_V A_w \cdot A_w^*\,dV, \tag{25}$$

gdzie:

p_w - gęstość objętościowa mocy $\left[W/m^3\right]$,

V - objętość wsadu.

Analizowane modele obliczeniowe (rys. 2) są dwuwymiarowe (y,z) - nieskończenie rozległe w kierunkach osi x i z, dlatego też całka objętościowa gęstości mocy (25) ma postać

$$P_w = 2w \int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} p_w \, dy \, dz = 2w\omega^2 \int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} |A_w|^2 \, dy \, dz, \qquad (26)$$

gdzie 2w - szerokość wsadu rzeczywistego w kierunku osi x.

4. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy wzory pozwalają na wyznaczenie podstawowych wielkości pola elektromagnetycznego w płaskich wsadach nagrzewanych indukcyjnie wzbudnikami jedno- i dwustronnymi. Uwzględniają wszystkie zasadnicze wymiary i parametry układu grzejnego. Prosta postać związków umożliwia szybkie przeprowadzenie obliczeń bez użycia maszyn cyfrowych.

Wzory mają charakter przybliżony, dlatego mogą być stosowane tylko do orientacyjnej analizy nagrzewnic. Po wstępnym doborze podstawowych wymiarów i parametrów obliczenia powinny być uściślone, np. metodami zaproponowanymi w [1-5].

Z przeprowadzonej w pracy [8] oceny rozbieżności między wynikami uzyskanymi wzorami ścisłymi i przybliżonymi wynika, że dokładność rośnie wraz ze wzrostem stosunku grubości wsadu do głębokości wnikania pola elektromagnetycznego. Określenie zakresu stosowania związków podanych w tym artykule będzie przedmiotem osobnego opracowania.

LITERATURA

[1] Krakowski M.: Eddy current losses in a non-ferromagnetic plate due to currents in a multi-conductor system. Archiwum Elektrotechniki, t. XXII, z. 2, 1973, ss. 321-332.

[2] Krakowski M.: Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic solid due to currents in ribbon conductors. Archiwum Elektrotechniki, t. XXII, z. 2, 1973, ss. 333-350.

[3] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek W.: Rozkład pola elektromagnetycznego i mocy w płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVI, z. 4, 1977, ss. 835-844.

[4] Sajdak C.: Zastosowanie metody całki Fouriera do analizy indukcyjnego układu grzejnego płyta-wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVIII, z. 1, 1979, ss. 203-212.

[5] Sajdak C.: Analiza pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzejnym płyta-wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVI, z. 4, 1977, ss. 825-834.

[6] Copson E.T.: Asymptotic expansions. University Press, Cambridge, 1965.

[7] Fluerasu C., Galan N.: Eddy currents and the power converted into heat inside a very long cylindrical conductor placed in an a.c. circular coil of finite lenght. Rev.Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ. t. 11, n. 2, 1966, ss. 123-141.

[8] Sajdak C.: Przyczynek do obliczania płaskich indukcyjnych układów grzejnych wsad-wzbudnik. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Hutnictwo z. 21, 1980, ss. 147-158.

[9] Grandsztein I.S., Ryżik I.M.: Tablicy intiegrałow, summ, rjadow i proizwiedienij. Nauka, Moskwa, 1971.

[10] Dwight H.B.: Tables of integrals and other mathematical data. The Macmillan Company, 1961.

Recenzent
Doc.dr inż. Marian Bogucki

РАСЧЕТ ПОДБОРОМ ВЕЛИЧИНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В НЕМАГНИТНЫХ ПЛОСКИХ ШИХТАХ,
НАГРЕВАЕМЫХ ОДНО- И ДВУХСТОРОННИМИ ИНДУКТОРАМИ

Р е з ю м е

Представлен способ приближенного определения величины электромагнитного поля в самых важных типах установок индукционного нагрева для немагнитных плоских шихт. Точность расчетов возрастает вместе с ростом отношения толщины шихты до глубины проникновения электромагнитного поля.

APPROXIMATE CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD SIZE IN FLAT
NON-MAGNETIC CHARGES HEATED INDUCTIVELY BY MEANS OF ONE -AND
DOUBLE-FACED HEATING COILS

S u m m a r y

The paper presents means of approximate estimating of electromagnetic field sizes in the most important types of inductive stoves for non-magnetic flat charges. The greater the ratio of the charge thickness to the depth of electromagnetic field penetration, the more exact are the calculations.