ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: HUTNICTWO z. 23 Nr kol. 702

Lidia RUCKA-KOS
Zofia PRAGŁOWSKA-GORCZYŃSKA
Politechnika Śląska

GRANICE NAJCZĘŚCIEJ SPOTYKANYCH WYRAŻEŃ ZAWIERAJĄCYCH ZMODYFIKOWANE FUNKCJE BESSELA ORAZ MC DONALDA

Streszczenie: W artykule przedstawiono podstawowe granice wyrażeń zawierających zmodyfikowane funkcje Bessela i Mc Donalda. Występują one w obliczeniach dotyczących wymiany ciepła energii oraz przepływów.

Współczesna nauka dąży do intensyfikacji procesu nagrzewania stali, który nie tylko wpływa na zwiększenie produkcji, ale bardzo polepsza ekonomiczne wykorzystanie ciepła. Wybór odpowiedniej technologii nagrzewania metalu, jej prawidłowe przeprowadzenie wymaga znajomości zjawisk towarzyszących temu procesowi.

Nagrzewanie dokonuje się w procesie nieustannej wymiany ciepła - skomplikowanych fizycznie zjawisk. Procesy te w warunkach rzeczywistych - ruchowych mają charakter szczególnie złożony.

Zagadnieniu temu literatura techniczna poświęca wiele uwagi, problemy te we współczesnej metalurgii interesują nie tylko technologów, lecz także teoretyków opisujących matematycznie zjawisko. W termicznych procesach metalurgicznych jednym z podstawowych elementów modelu matematycznego jest zagadnienie przewodnictwa ciepła.

Z przewodnictwem ciepła mamy do czynienia w ściance pieca metalurgicznego (np. wielkiego pieca, konwertora, pieca łukowego i indukcyjnego) tygla, kadzi odlewniczej oraz wlewnicy. Przewodzenie ciepła w ścianach tych urządzeń, które mają kształt zbliżony do walca, opisuje równanie Fouriera-Kirchhoffa we współrzędnych walcowych o postaci

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{R}\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + w(r,\varphi,z,t),$$

gdzie:

c - ciepło właściwe,
ρ - gęstość,
ϑ - temperatura,
r,z,φ - współrzędne walcowe,

t - czas,
$w(r,z,\varphi,t)$ - gęstość objętościowa energii.

Rozwiązaniem tego równania w zależności od postaci funkcji $w(r,\varphi,z,t)$ oraz warunków początkowych procesu i warunków brzegowych są wyrażenia złożone z kombinacji zmodyfikowanych funkcji Bessela i Mc Donalda lub też kombinacji tych funkcji z innymi funkcjami elementarnymi lub nieelementarnymi. Badanie własności modelu matematycznego w całym obszarze zmienności współrzędnych z,ρ,φ,t wymaga również obliczenia granic tych rozwiązań w punktach, w których otrzymujemy symbol nieoznaczony. Literatura nie podaje gotowych wyników obliczeń takich granic.

W artykule obliczono granice najczęściej spotykanych w rozwiązaniach równania Fouriera - Kirchhoffa wyrażeń nieoznaczonych. Obliczenie tych granic wymaga specjalnych sposobów postępowania.

Zmodyfikowane funkcje Bessela dowolnego rzędu wyrażają się wzorem:

$$I_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{k+2l}}{l!\,(k+l)!} = \frac{x^k}{2^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}\,l!\,(k+l)!} \tag{1}$$

Najczęściej w obliczeniach występują zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego i pierwszego rzędu, które wyrażają się wzorami:

$$I_0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{2l}}{(l!)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}\,(l!)^2} \tag{2}$$

$$I_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{2l+1}}{l!\,(l+1)!} = \frac{x}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}\,l!\,(l+1)!} \tag{3}$$

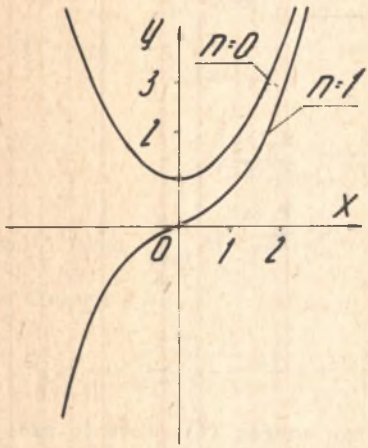
Przebieg obu funkcji przedstawiony jest na rys. 1.

Funkcja Mc Donalda dowolnego rzędu wyraża się wzorem

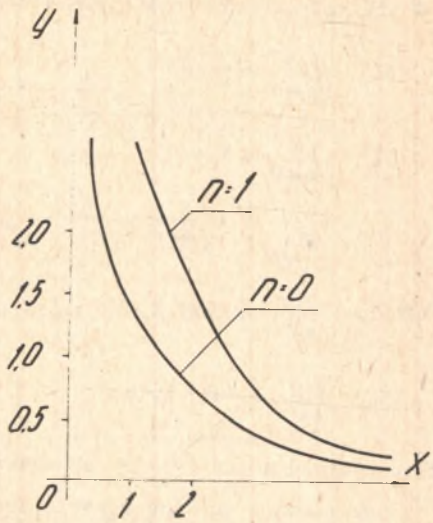
$$K_k(x) = \frac{1}{2}\pi i\, e^{\frac{k\pi i}{2}} H_k^{(1)}(ix), \tag{4}$$

gdzie:

$H_k^{(1)}(ix)$ - funkcja Hankela pierwszego rodzaju k-tego rzędu,
i - jednostka urojona.



Rys. 1. Wykres funkcji y = In(x)



Rys. 2. Wykres funkcji y = Kn(x)

Funkcje Mc Donalda rzędu całkowitego wyrażają się wzorem

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \ln \frac{\gamma x}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2l}}{l!(n+l)!}\left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+l} \frac{1}{k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l (n-l-1)!}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n}, \tag{5}$$

gdzie (n+1) naturalne.

Najczęściej w obliczeniach występują funkcje Mc Donalda rzędu zerowego i pierwszego, które określone są wzorami:

$$K_o(x) = - I_o(x) \ln \frac{\gamma x}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}(l!)^2} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \tag{6}$$

$$K_1(x) = I_1(x) \ln \frac{\gamma x}{2} - \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{l!(l+1)!\ 2^{2l+1}}\left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{x}, \tag{7}$$

gdzie γ = 0,57.... stała Eulera.

Przebieg obu funkcji przedstawiony jest na rys. 2.

W artykule zostaną obliczone kolejno następujące granice:

(I) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{I_1(ax)}{x}$, (II) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)}$,

(III) $\lim\limits_{x\to 0} x\, K_0(ax)$, (IV) $\lim\limits_{x\to 0} x\, K_1(ax)$,

(V) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{K_0(ax)}{K_0(bx)}$, (VI) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{K_1(ax)}{K_0(ax)}$,

(VII) $\lim\limits_{x\to 0} I_1(ax)\, K_0(bx)$, (VIII) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)}$,

(IX) $\lim\limits_{x\to 0} I_1(ax)\, K_1(bx)$,

gdzie występujące parametry są dodatnie.

Zmodyfikowana funkcja Bessela przedstawia się wzorem (1). Jest to szereg zbieżny niemal jednostajnie w $(-\infty,\infty)$, ponieważ

$$\lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^{k+2(l+1)}\, 2^{k+2l}\, l!(k+l)!}{2^{k+2(l+1)}\,(l+1)!(k+l+1)!\; x^{k+2l}} \right| = \lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^2}{(l+1)\;(k+l+1)2^2} \right| = 0<1$$

$$I_0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}\; l!\; l!} = \frac{x^0}{1} + \frac{x^2}{2^2\; 1!\; 1!} + \frac{x^4}{2^4\; 2!\; 2!} + \dots\dots\dots$$

$$I_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{2^{2l+1}\; l!\; (l+1)!} = x\,\left(\frac{x^0}{2^1\; 0!\; 1!} + \frac{x^2}{2^3\; 1!\; 2!} + \dots\dots\right.$$

Otrzymujemy stąd

$$\lim_{x\to 0} I_1(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} I_0(x) = 1$$

Funkcje Mc Donalda przedstawione są wzorami (5, 6, 7).
Wykażemy najpierw, że

$$\lim_{x\to 0} I_1(x)\, \ln \frac{\gamma x}{2} = 0 \tag{8}$$

Szereg

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}\, \ln \frac{\gamma x}{2}}{2^{2l+1}\; l!(l+1)!}$$

jest zbieżny jednostajnie na podstawie kryterium Weierstrassa w przedziale $(0,a)$, gdzie $a<1$, ponieważ dla $l>0$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{x^{2l+1}\ \ln\frac{\pi x}{2}}{2^{2l+1}\ l!\ (l+1)!}\right| = \frac{x^{2l+1}\ \ln\frac{2}{\pi x}}{2^{2l+1}\ l!\ (l+1)!} < \frac{x^{2l+1}\ \frac{2}{\pi x}}{2^{2l+1}\ (l!)\ (l+1)!} =$$

dla $l>0$

$$= \frac{x^{2l}}{\pi\, 2^{2l}\ l!\ (l+1)!} \leqslant \frac{a^{2l}}{\pi 2^{2l}\ l!\ (l+1)!},$$

zaś szereg $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{a^{2l}}{\pi\, 2^{2l}\ l!\ (l+1)!}$ jest zbieżny na podstawie kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{a^{2l+2}\ 2^{2l}\ l!\ (l+1)!\ \pi}{\pi\, 2^{2(l+1)}\ (l+1)!\ (l+2)!\ a^{2l}} = \lim_{l\to\infty} \frac{a^2}{2^2\ (l+1)\ (l+2)} = 0<1.$$

Korzystając z jednostajnej zbieżności tego szeregu otrzymamy

$$\lim_{x\to\infty} I_1(x)\ln\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}\ \ln\frac{\pi x}{2}}{2^{2l+1}\ l!\ (l+1)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{x^{2l+1}\ \ln\frac{\pi x}{2}}{2^{2l+1}\ l!\ (l+1)!} = 0,$$

ponieważ dla $k\geqslant 1$,

$$\lim_{x\to 0} x^k \ln\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{\pi x}{2}}{x^{-k}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-k\ x^{-k-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^k}{-k} = 0. \tag{9}$$

Z kolei zachodzi warunek:

$$\lim_{x\to 0} I_0(x)\ \ln\frac{\pi x}{2} = -\infty. \tag{10}$$

Wykażemy obecnie, że szereg

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{l!(l+1)!\ 2^{2l+1}} \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k}\right) \tag{11}$$

jest zbieżny niemal jednostajnie w $(-\infty, \infty)$.

Oznaczamy przez $a(l) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \frac{1}{l+1}$.

Jest spełniony następujący warunek: $\lim_{l\to\infty} a(l) = \infty$, gdyż $\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} = \infty$ jako granica rosnącego ciągu dodatnich sum częściowych rozbieżnego szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m}$.

Przejdziemy obecnie do wykazania niemal jednostajnej zbieżności wspomnianego szeregu (11) w $(-\infty, \infty)$:

$$\lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^{2l+3}\left(\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{l+2} \frac{1}{k}\right) l!\,(l+1)!\,2^{2l+1}}{(l+1)!\,(l+2)!\,2^{2l+3}\,x^{2l+1}\left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k}\right)} \right| =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^2\left(a(l) + \frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2}\right)}{(l+1)(l+2)\,2^2\,a(l)} \right| =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{a(l)\,(l+1)} + \frac{1}{a(l)\,(l+2)}\right)}{4(l+1)\,(l+2)} \right| = 0 < 1.$$

Z kolei wykażemy, że szereg $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{2^{2l}\,l!} \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}\right)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w $(-\infty, \infty)$. (12)

Oznaczmy: $\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} = b(l)$. Podobnie jak poprzednio $\lim_{l\to\infty} b(l) = \infty$, więc

$$\lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^{2l+2}\left(\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k}\right) 2^{2l}\,l!}{2^{2l+2}(l+1)!\,x^{2l}\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}} \right| =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^2\,b(l) + \frac{1}{l+1}}{4(l+1)\,b(l)} \right| = \lim_{l\to\infty} \left| \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{(l+1)\,b(l)}\right)}{4(l+1)} \right| = 0 < 1.$$

Korzystając z (8), (11), (10), (12) otrzymujemy

$$\lim K_0(x) = \infty \quad \text{oraz} \quad \lim K_1(x) = \infty .$$

W dalszych obliczeniach granic pewnych szeregów z uwagi na jednostajną zbieżność tych szeregów będziemy przechodzić do granicy pod znakiem sumy.

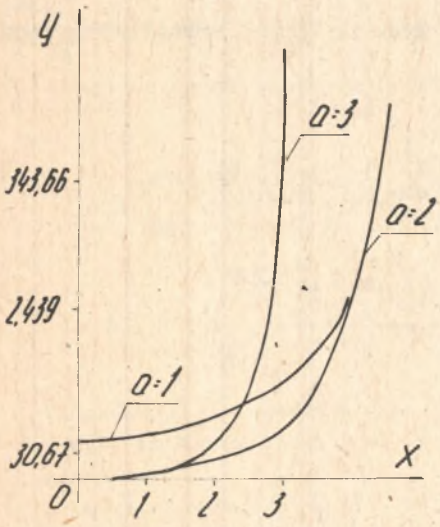
OBLICZANIE GRANIC FUNKCJI

Granica określona w (I) równa się $\frac{a}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{I_1(ax)}{x} = \frac{a}{2}$$

Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x \to 0} \frac{I_1(ax)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2l+1}}{l!\,(l+1)!\,2^{2l+1}} = \lim_{x \to 0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}\,x^{2l}}{l!\,(l+1)!\,2^{2l+1}} = \frac{a}{2}$$



Rys. 3. Wykres funkcji $y = \frac{I_1(ax)}{x}$

Wykres przebiegu funkcji $y = \frac{I_1(ax)}{x}$ dla różnych wartości a przedstawiono na rys. 3.

Granica określona w (II) równa się $\frac{a}{b}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)} = \frac{a}{b}$$

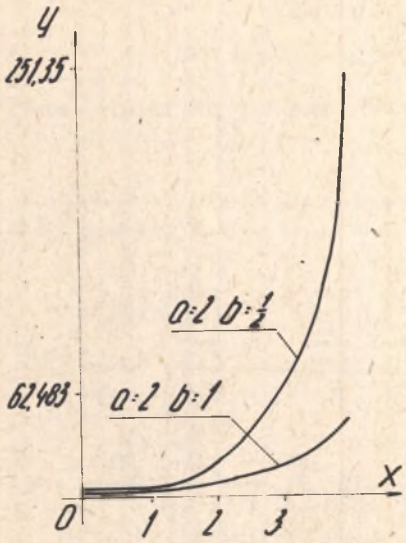
Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x \to 0} \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{I_1(ax)}{x}\,x}{\frac{I_1(bx)}{x}\,x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{b}$$

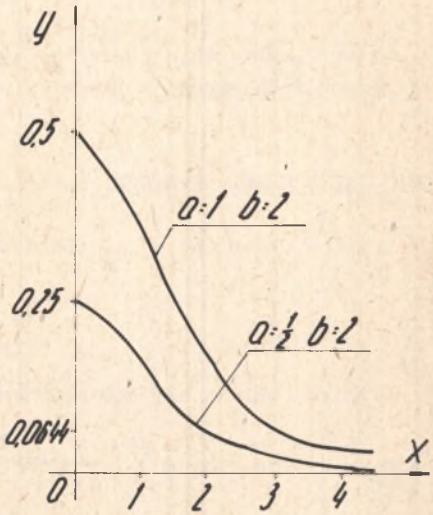
Wykres przebiegu funkcji $y = \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)}$ dla różnych wartości a i b przedstawiono na rys. 4 i rys. 5.

Granica określona w (III) równa się zero.

$$\lim_{x \to 0} x\,K_0(ax) = 0$$



Rys. 4. Wykres funkcji $y = \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)}$



Rys. 5. Wykres funkcji $y = \frac{I_1(ax)}{I_1(bx)}$

Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x\to 0} x\,K_0(ax) = \lim_{x\to 0} x\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} - I_0 \ln\frac{a\gamma x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l}\,x^{2l+1}}{2^{2l}\,(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} - \lim_{x\to 0} x\,I_0(ax)\ln\frac{a\gamma x}{2} =$$

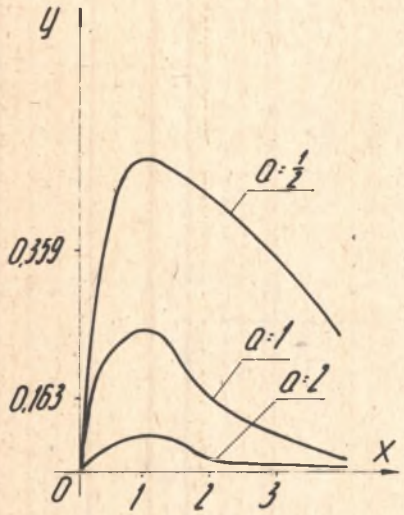
$$= -\lim_{x\to 0} I_0(ax)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a\gamma x}{2}}{\frac{1}{x}} = 0$$

(korzystamy z warunku 9).

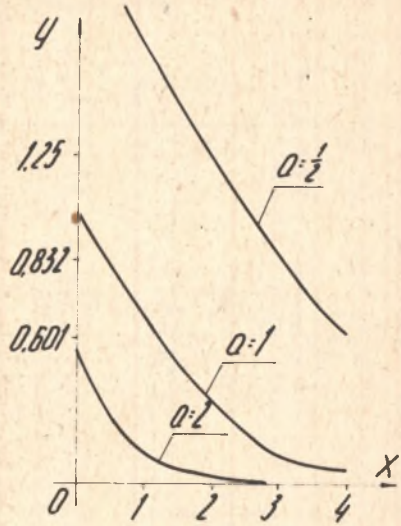
Wykres przebiegu funkcji $y = x\,K_0(ax)$ dla różnych wartości a przedstawiono na rys. 6.

Granica określona w (IV) równa się $\frac{1}{a}$

$$\lim_{x\to 0} x\,K_1(ax) = \frac{1}{a}$$



Rys. 6. Wykres funkcji y = xKo(ax)



Rys. 7. Wykres funkcji y = xK_1(ax

Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x\to 0} x K_1(ax) = \lim_{x\to 0} x\left[I_1(ax)\ln\frac{ax}{2} + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ax)^{2l+1}}{l!(l+1)!\,2^{2l+1}}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{l+1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{ax}\right] = \lim_{x\to 0} I_1(ax)\frac{\ln\frac{x}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l+1}x^{2(l+1)}}{l!(l+1)!\,2^{2l+1}}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{l+1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

(Korzystamy tu z warunku 9).

Wykres przebiegu funkcji y = x K_1(ax) dla różnych wartości a przedstawiono na rys. 7.

Granica określona w (V) równa się jeden.

$$\lim_{x\to 0}\frac{K_0(ax)}{K_0(bx)} = 1$$

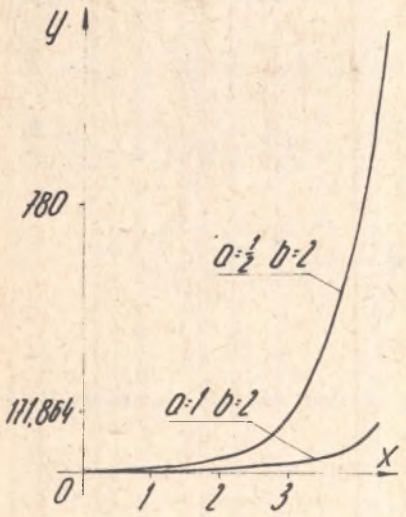
Granicę oblicza się w następujący sposób:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{(ax)^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\right) - I_0(ax)\ln\frac{\gamma ax}{2}}{\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{(bx)^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\right) - I_0(bx)\ln\frac{\gamma bx}{2}} =$$

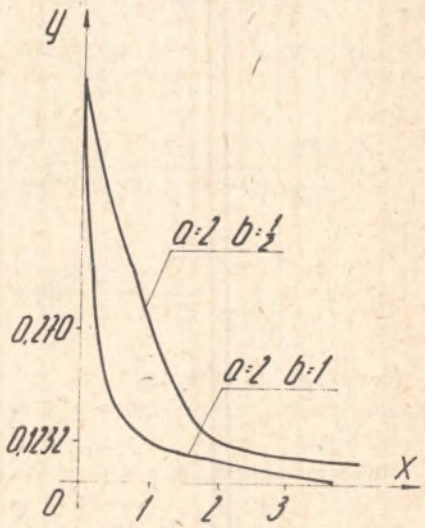
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{1}{\ln\frac{\gamma ax}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ax)^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} - I_0(ax)\right]\ln\frac{\gamma ax}{2}}{\left[\frac{1}{\ln\frac{\gamma bx}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(bx)^{2l}}{2^{2l}(l!)^2}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} - I_0(bx)\right]\ln\frac{\gamma bx}{2}} = 1.$$

gdyż $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{ax}{2}}{\ln\frac{bx}{2}} = 1.$

Wykres funkcji. $y = \frac{K_0(ax)}{K_0(bx)}$ dla różnych wartości a i b przedstawiono na rys. 8 i rys. 9.



Rys. 8. Wykres funkcji $y = \frac{K_0(ax)}{K_0(bx)}$



Rys. 9. Wykres funkcji $y = \frac{K_0(ax)}{K_0(bx)}$

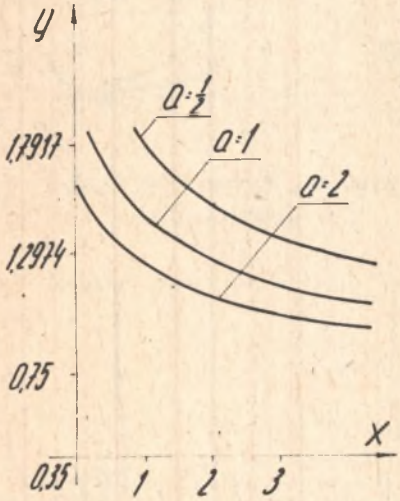
Granica określona w (VI) równa się nieskończoności

$$\lim_{x\to 0} \frac{K_1(a_1x)}{K_0(a_2x)} = \infty$$

Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x\to 0} \frac{K_1(a_1x)}{K_0(a_2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,K_1(a_1x)}{x\,K_0(a_2x)} = \infty \qquad \text{np. (3) i (4)}$$

Wykres przebiegu funkcji $y = \frac{K_1(a_1x)}{K_0(a_2x)}$ dla różnych wartości a_i. $i = 1,2$ - przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10. Wykres funkcji $y = \frac{K_1(ax)}{K_0(ax)}$

Granica określona w (VII) równa się zero.

$$\lim_{x\to 0} I_1(ax)\,K_0(bx) = 0$$

Granicę oblicza się następująco:

$$\lim_{x\to 0} I_1(ax)\,K_0(bx) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{I_1(ax)}{x} \lim_{x\to 0} x\,K_0(bx) = 0,$$

w oparciu o granice (1) i (3).

Wykres przebiegu funkcji $y = I_1(ax)\,K_0(bx)$ dla różnych wartości a i b przedstawiono na rys. 11 i rys. 12.

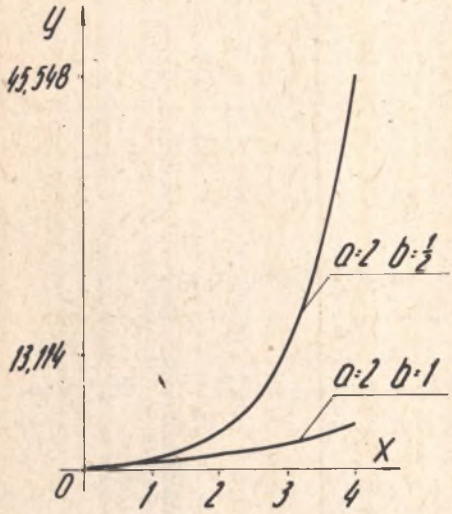
Granica określona w (VIII) równa się $\frac{b}{a}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)} = \frac{b}{a}$$

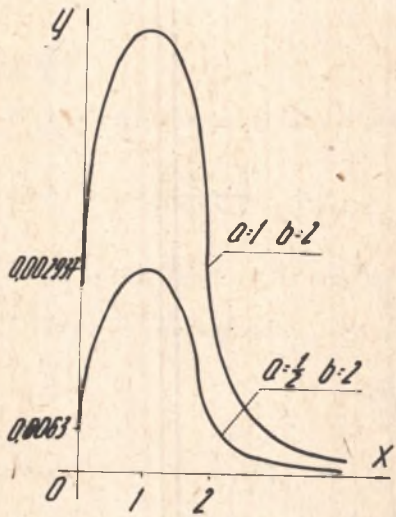
Granicę oblicza się korzystając z granicy 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,K_1(ax)}{x\,K_1(bx)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$$

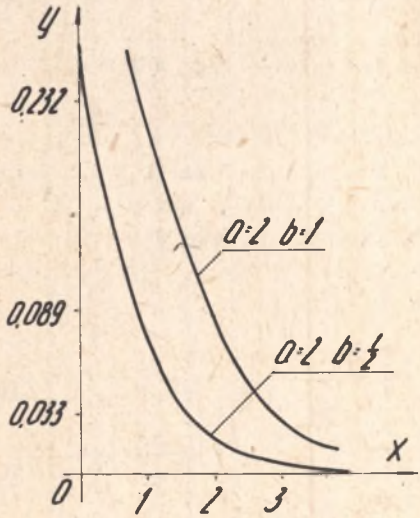
Wykres przebiegu funkcji $y = \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)}$ dla różnych wartości a i b przedstawiono na rys. 13 i rys. 14.



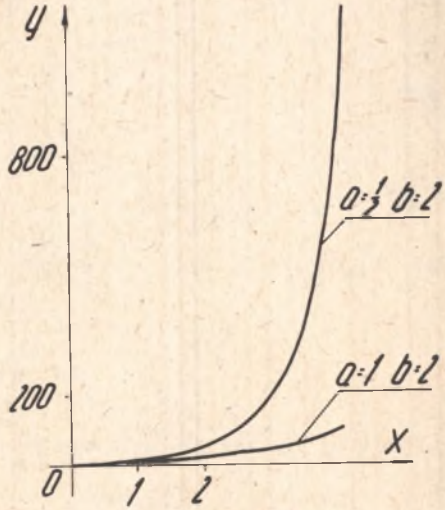
Rys. 11. Wykres funkcji
$y = I_1(ax)K_0(bx)$



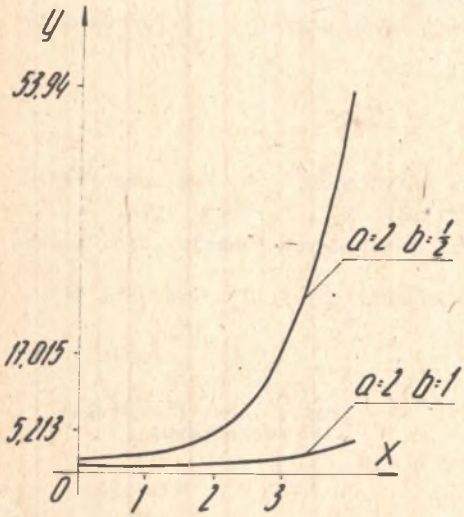
Rys. 12. Wykres funkcji
$y = I_1(ax)\ K_0(bx)$



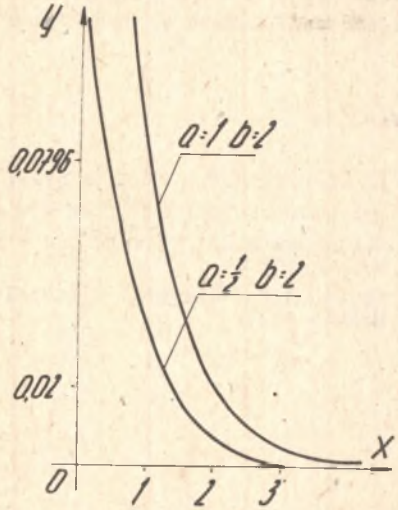
Rys. 13. Wykres funkcji
$y = \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)}$



Rys. 14. Wykres funkcji
$y = \frac{K_1(ax)}{K_1(bx)}$



Rys. 15. Wykres funkcji
$y = I_1(ax)K_1(bx)$



Rys. 16. Wykres funkcji
$y = I_1(ax)K_1(bx)$

Granica określona w (IX) równa się $\frac{a}{2b}$.

$$\lim_{x \to 0} I_1(ax)K_1(bx) = \frac{a}{2b}$$

Granicę oblicza się następująco:

$\lim_{x \to 0} I_1(ax)K_1(bx) = \lim_{x \to 0} \frac{I_1(ax)}{x} \times K_1(bx) = \frac{a}{2}\frac{1}{b} = \frac{a}{2b}$, na podstawie granic (1) i (4).

Wykres przebiegu funkcji $y = I_1(ax)K_1(bx)$ dla różnych wartości a i b przedstawiono na rys. 15 i rys. 16.

PODSUMOWANIE

Artykuł zawiera obliczenia ważniejszych granic wyrażeń złożonych z kombinacji zmodyfikowanych funkcji Bessela i Mc Donalda z funkcjami elementarnymi, gdy argument zdąża do zera, a wartość wyrażenia daje symbol nieoznaczony.

Granice takich wyrażeń występują w analizie dynamiki procesów metalurgicznych. Literatura nie podaje sposobu obliczania tego typu granic i niniejszy artykuł ma za zadanie uzupełnienie tej luki. Ponadto w artykule

przedstawiono wykresy funkcji zawierające wspomniane wyrażenia. Mogą one znaleźć zastosowanie do zaproksymowania różnych krzywych doświadczalnych.

LITERATURA

[1] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.
[2] Ryżyk J.M.: Tablice całek sum i iloczynów. PWN, Warszawa 1964.
[3] Korieniew B.G.: Uwiedienije w tieoriu Besselowych funkcji. Wyd. Nauka Moskwa 1971.
[4] Watson G.N.: Tieorija Biessielewych funkcji cz. I, II. wyd. In. Lit., Moskwa 1949.

Recenzent
Prof.dr hab. Mieczysław Kucharzewski

ПРЕДЕЛЫ НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЕМЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, А ТАКЖЕ МЦ ДОНАЛЬДА

Р е з ю м е

В статье представлены основные пределы выражений, содержащих модифицированные функции Бесселя и Мц Дональда, выступающие в расчетах, касающихся теплообмена, энергообмена, а также потоков.

LIMITS OF THE MOST FREQUENT EXPRESSIONS INCLUDING MODIFIED THE BESSEL'S AND MC DONALD'S FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper presents basic limits of the expressions including modified Bessel's and Mc Donald's functions occurring in calculations regarding heat, energy and flows exchange.