ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: ELEKTRYKA z. 176 Nr kol. 1500

Tadeusz J. SOBCZYK [1)]

OBWODOWE MODELE MATEMATYCZNE MASZYN ELEKTRYCZNYCH - STAN AKTUALNY I PERSPEKTYWY

Streszczenie. W pracy przedstawiono najistotniejsze problemy tworzenia i rozwiązywania tzw. obwodowych modeli matematycznych maszyn elektrycznych, które traktują maszynę jako zbiór magnetycznie sprzężonych cewek o jednoznacznych charakterystykach. Najbardziej efektywną drogą tworzenia takich modeli jest formalizm Lagrange'a, bazujący na funkcji koenergii. W pracy wyodrębniono modele, w których założono liniowość obwodu magnetycznego, wskazując na wagę macierzy indukcyjności w tych modelach. Omówiono najważniejsze, spotykane w literaturze, metody ich rozwiązywania: wykorzystujące transformacje współrzędnych i własności układów okresowych. W pracy przedstawiono również kilka sposobów uwzględniania w modelach obwodowych nieliniowości magnetycznej, wskazując na konieczność ich powiązania z polowymi metodami analizy rozkładu pola magnetycznego w maszynach elektrycznych.

CIRCUITAL MODELS OF ELECTRICAL MACHINES – THE STATE OF THE ART AND FUTURE TRENDS

Summary. The paper presents most important problems of creating and solving so called circuital models of electrical machines, in which a machine is treated as a set of magnetically coupled coils having unique characteristics. The Lagrange formalism based on the co-energy function is the most effective way to create such models. In the paper special attention is paid to the models assuming linearity of the magnetic circuit. The stress is laid on the very important role of the inductance matrix in such models. The existing methods of solving these models are discussed; i.e. by using transformations of variables and properties of periodic systems. Different approaches to magnetic nonlinearity modelling are presented and the necessity of supporting such models by numerical analysis of field distribution in magnetic circuits of electrical machines is mentioned.

Key words: electrical machines, circuital models, inductance matrices, transformations of variables, periodic systems, magnetic nonlinearity modelling

1. WSTĘP

Maszyny elektryczne są dość złożonymi obiektami przestrzennymi, w których ma miejsce współdziałanie zjawisk elektromagnetycznych, mechanicznych i cieplnych. Trójwymiarowa przestrzeń, w której te zjawiska zachodzą, wypełniona jest jednak niecałkowicie symetrycznie i ma inne cechy symetrii w czynnej części maszyny oraz inne w częściach skrajnych. Modelowanie matematyczne własności tak skomplikowanego tworu przestrzennego, nawet, jeżeli jest możliwe teoretycznie, w zdecydowanej większości przypadków nie jest uzasadnione ani z technicznego punktu widzenia, wynikającego z dokładności przewidywania określonych własności maszyn, ani z ekonomicznego punktu widzenia, tj. z kosztów uzyskania takich informacji.

Modele matematyczne, w których maszyny elektryczne reprezentowane są przez obwody elektryczne oraz układ mechaniczny o skupionych parametrach, prowadzą do najprostszych, opisów zjawisk elektromagnetycznych i mechanicznych w maszynach. Ujęcie w jednym modelu tych zjawisk jest koniecznością, wynikającą z celu, dla realizacji którego buduje się maszyny elektryczne – elektromechanicznego przetwarzania energii. W takich modelach, zwanych modelami obwodowymi, maszyna elektryczna jest rozpatrywana jako zbiór wzajemnie magnetycznie sprzężonych cewek, których sprzężenie zależy od kąta obrotu wirnika maszyny w stosunku do jej

[1)] Prof. dr hab., Politechnika Krakowska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Katedra Maszyn i Napędów Elektrycznych, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, tel/fax: +12 628 20 44, e-mail: pesobczy@cyf-kr.edu.pl

stojana. Nie wdając się w niepotrzebne w tym miejscu i znane w literaturze ogólniejsze rozważania, równania tak widzianych maszyn elektrycznych przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{i},\varphi)+\mathbf{R}\,\mathbf{i}=\mathbf{u}\,, \tag{1a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\partial E_{cm}(\mathbf{i},\varphi)}{\partial\varphi}+T_m \tag{1b}$$

gdzie $\Psi,\mathbf{i},\mathbf{u}$ są N-wymiarowymi wektorami, $\mathbf{R}$ jest kwadratową macierzą rezystancji, a φ jest kątem przesunięcia osi odniesienia na stojanie i wirniku. Moment elektromagnetyczny maszyny jest określony przez funkcję koenergii magnetycznej, którą można zapisać w postaci

$$E_{cm}(\mathbf{i},\varphi)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^{i_n}\psi_n(i_1,\ldots,i'_n,0,\ldots,0,\varphi)di'_n\,. \tag{2}$$

gdzie ψ_n, i_n są elementami wektorów strumieni skojarzonych i prądów. Aby funkcja koenergii była jednoznaczna względem prądów, charakterystyki cewek $\psi_n(i_1,\ldots,i_N,\varphi)$, (dla $n=1,\ldots,N$) muszą spełniać związki

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial i_k}=\frac{\partial\psi_k}{\partial i_n}\qquad \text{dla}\quad n,k=1,\ldots,N\,. \tag{3}$$

Należy przy tym podkreślić, że równania te obowiązują przy założeniach, że tory prądów w maszynie elektrycznej są jednoznacznie określone, a charakterystyki materiałów obwodu magnetycznego są jednoznaczne. Konsekwencje techniczne tych założeń są ogólnie znane i nie będą tu komentowane. Zatem wszystkie wymiary geometryczne maszyny i własności materiałów użytych do jej budowy muszą znaleźć odzwierciedlenie w charakterystykach cewek $\psi_n(i_1,\ldots,i_N,\varphi)$ oraz w macierzy rezystancji.

W pracy omówiono problemy występujące przy formułowaniu i rozwiązywaniu obwodowych modeli dla maszyn prądu przemiennego, wskazując na możliwości, lecz i ograniczenia, oraz perspektywy dalszego rozwoju takich modeli.

2. MODELE OBWODOWE PRZY ZAŁOŻENIU LINIOWOŚCI OBWODU MAGNETYCZNEGO

Liniowość obwodu magnetycznego jest najczęściej przyjmowanym założeniem przy tworzeniu obwodowych modeli maszyn elektrycznych. Pozwala on bowiem posługiwać się pojęciem indukcyjności własnych i wzajemnych w ich klasycznym rozumieniu, jako współczynników proporcjonalności pomiędzy odpowiednimi strumieniami skojarzonymi i prądami, tworzących macierz indukcyjności

$$\Psi(\mathbf{i},\varphi)=\mathbf{L}(\varphi)\,\mathbf{i}\,. \tag{4}$$

Teraz w macierzy indukcyjności muszą być zawarte wszystkie cechy konstrukcyjne maszyny oraz własności zlinearyzowanego obwodu magnetycznego. Jej najważniejsze matematyczne własności to: symetryczność ($\mathbf{L}(\varphi)=\mathbf{L}^T(\varphi)$), dodatnia określoność ($\det\mathbf{L}(\varphi)>0$) oraz okresowość ($\mathbf{L}(\varphi)=\mathbf{L}(\varphi+2\pi)$), za którymi stoją odpowiednie własności fizyczne: jednoznaczność zgromadzonej energii magnetycznej względem prądów, niepełność sprzężeń magnetycznych cewek reprezentujących uzwojenia maszyny oraz okresowość zjawisk w maszynie względem kąta obrotu wirnika. Określenie indukcyjności jako funkcji kąta obrotu jest dla tej klasy modeli zadaniem kluczowym. Powszechnie wykorzystuje się w tym celu uproszczoną analizę pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny. Jej głównym narzędziem jest funkcja rozkładu składowej promieniowej indukcji wzdłuż obwodu maszyny, którą określa się ze wzoru

$$B(x,t)=\lambda(x,\varphi)\left(\Theta(x,\varphi,t)-\left(\int_x^{x+2\pi}\lambda(x',\varphi)\Theta(x',\varphi,t)dx'\right)\Big/\left(\int_x^{x+2\pi}\lambda(x',\varphi)dx'\right)\right) \tag{5}$$

gdzie x jest położeniem kątowym składowej promieniowej indukcji, $\lambda(x,\varphi)$ jest funkcją jednostkowej przewodności szczeliny powietrznej (funkcją permeancji szczeliny powietrznej), a

$\Theta(x,\varphi,t)$ jest funkcją przepływu magnetycznego uzwojenia wzbudzającego pole magnetyczne. Trudno tu opisywać wszystkie szczegóły i niuanse tego podejścia, stosowanego w maszynach elektrycznych już od wielu lat. Można jednak stwierdzić, że ta droga pozwala na efektywne określenie funkcyjnych zależności indukcyjności własnych i wzajemnych od kąta φ. Związana jest jednak z wieloma uproszczeniami, które w dobie ogromnego postępu w algorytmizacji rozwiązywania zagadnień polowych są niekonieczne i są eliminowane poprzez numeryczne określenie rozkładu pola w obszarze obwodu magnetycznego maszyny. Ten znacznie dokładniejszy rozkład pola wykorzystuje się w celu określenia funkcji permeancji szczeliny powietrznej lub dla bezpośredniego obliczenia indukcyjności. Nie jest to jednak droga prowadząca obecnie do zasadniczych różnic ilościowych, zważywszy z jednej strony na jej krótką tradycję, a z drugiej na wieloletnie doświadczenia w obliczaniu parametrów maszyn elektrycznych. Należy jednak przewidywać, że po upowszechnieniu się polowych procedur analizy pola w maszynie indukcyjności uzwojeń maszyny będą obliczane na ich bazie. Nie jest to jednak całkowicie oczywiste, gdyż numeryczne metody rozwiązywania zagadnień polowych pozwalają równie skutecznie rozwiązywać zagadnienia nieliniowe, jeszcze bardziej przybliżające obliczenia do rzeczywistości. Może do prowadzić do eliminacji modeli zakładających liniowość obwodu magnetycznego na rzecz ogólnych modeli obwodowych podanych we wstępie.

Pozostając jednak w klasie modeli wykorzystujących indukcyjności należy podkreślić wielkie znaczenie prawidłowego odwzorowania cech budowy obwodu magnetycznego i rozkładu uzwojenia maszyny w strukturę macierzy indukcyjności. Wiadomo, że pożądane własności maszyn uzyskuje się przez odpowiednią budowę uzwojenia i obwodu magnetycznego, co matematycznie przekłada się na strukturę macierzy indukcyjności oraz własności jej elementów jako funkcji kąta obrotu. Właściwe jakościowe odwzorowanie struktury i cech tych funkcji jest ważniejsze aniżeli ich ilościowe wartości.

Niech za przykład posłuży macierz indukcyjności wzajemnych układu *M* symetrycznie rozmieszczonych cewek na stojanie oraz *N* symetrycznie rozmieszczonych cewek na wirniku, przy równomiernej szczelinie powietrznej. Taka symetria generuje następującą strukturę macierzy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M(\varphi) & M(\varphi-\alpha) & \cdots & M(\varphi-(M-1)\alpha) \\ M(\varphi+\beta) & M(\varphi+\beta-\alpha) & \cdots & M(\varphi+\beta-(M-1)\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(\varphi+(N-1)\beta) & M(\varphi+(N-1)\beta-\alpha) & \cdots & M(\varphi+(N-1)\beta-(M-1)\alpha) \end{bmatrix}$$

gdzie $M(\varphi)$ jest okresową funkcją $M(\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{jk\varphi}$. Zachowanie tej struktury przy analizie własności maszyny ma o wiele większe znaczenie niż zapewnienie bardzo wysokiej dokładności określenia wartości współczynników M_k.

Geometria obwodu magnetycznego ma także zasadniczy wpływ na własności indukcyjności. Przy modelowaniu maszyn z użyciem indukcyjności bardzo pożyteczne jest poszukiwanie jakościowych ich cech w zależności od kształtu obwodu magnetycznego. Niech za przykład posłużą cztery najbardziej typowe kształty obwodu magnetycznego:

(I) obwód o cylindrycznym stojanie i wirniku,
(II) obwód o wydatnych biegunach na stojanie i cylindrycznym wirniku,
(III) obwód o wydatnych biegunach na wirniku i cylindrycznym stojanie,
(IV) obwód o wydatnych biegunach na stojanie i na wirniku.

Indukcyjność wzajemna dwóch dowolnych cewek w przypadku (I) zależy jedynie od ich wzajemnego położenia kątowego. Jest zatem funkcją okresową tylko jednej zmiennej i może być przedstawiona w postaci pojedynczego szeregu Fouriera

$$L_{r,s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k^{r,s} e^{jkx} .$$

W przypadku (II) ta sama indukcyjność zależeć będzie od położenia jednej z cewek względem stojana oraz kąta ich przesunięcia, będzie więc okresową funkcją dwóch zmiennych

$$L_{r,s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M_{k,l}^{r,s} e^{jkx} e^{jly} .$$

Analogicznie w przypadku (III), indukcyjność ta zależeć będzie od położenia jednej z cewek względem wirnika oraz kąta ich przesunięcia, będzie więc także okresową funkcją dwóch zmiennych. W przypadku (IV), indukcyjność wzajemna zależeć będzie od trzech niezależnych zmiennych: położenia jednej z cewek względem stojana, jej położenia względem wirnika oraz kąta wzajemnego przesunięcia cewek

$$L_{r,s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_{k,l}^{r,s} e^{jkx} e^{jly} e^{jmz} .$$

Tego typu analizy własności zbiorów indukcyjności własnych i wzajemnych cewek reprezentujących niezależne uzwojenia maszyny umieszczone na stojanie i na wirniku pozwalają określić macierz indukcyjności przez minimalną liczbę niezależnych funkcji. Gwarantuje to odtworzenie przez model matematyczny wszystkich cech wynikających z ewentualnych symetrii obwodu magnetycznego i uzwojeń maszyny. Określenie tych niezależnych funkcji, czy tylko współczynników ich szeregów Fouriera, może być prowadzone różnymi drogami - w pierwszym przybliżeniu, w oparciu o uproszczoną analizę rozkładu promieniowej składowej indukcji w szczelinie powietrznej, lecz także w wyniku rozwiązania równań pola w trójwymiarowym obszarze maszyny.

Założenie liniowości obwodu magnetycznego nie linearyzuje jednak układu równań opisującego maszyny elektryczne. Przyjmuje on postać

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(\varphi)\,\mathbf{i} + \mathbf{R}\,\mathbf{i} = \mathbf{u} , \tag{6a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{\partial \mathbf{L}(\varphi)}{\partial \varphi}\mathbf{i} + T_m . \tag{6b}$$

Nieliniowość tego układu ma charakter strukturalny i nie da się jej wyeliminować, gdyż wynika z kwadratowej zależności koenergii magnetycznej od prądów. Jedynie rozdzielenie jednoczesności zmian zjawisk elektrycznych i mechanicznych, tj. znajomość ruchu przy analizie zjawisk elektromagnetycznych czy znajomość prądów przy analizie ruchu mechanicznego, powoduje, że każde z tych równań staje się autonomiczne, a wówczas staje się liniowe ze względu na swoje zmienne.

Uproszczenie postaci równań (6) jest jednym z ważnych elementów procesu modelowania matematycznego maszyn elektrycznych, wręcz warunkującym techniczną użyteczność modeli. Można wskazać co najmniej dwa zasadnicze cele:

- dekompozycję równań elektrycznych (6a) na niezależne podukłady, czyli zmniejszenie liczby wzajemnie powiązanych równań,
- wyeliminowanie bezpośredniej zależności elementów macierzy indukcyjności od kąta obrotu.

Osiąga się to poprzez zmianę zmiennych użytych do opisu maszyny. W miejsce naturalnych prądów uzwojeń maszyny wprowadza się ich kombinacje liniowe, przeważnie zależne także od kąta obrotu. Z matematycznego punktu widzenia odpowiada to liniowemu przekształceniu współrzędnych. W celu zachowania zależności w układach przed i po transformacji stosuje się kogradientne przekształcanie prądów i napięć przez macierze unitarne (lub ortogonalne), które można ogólnie zapisać w postaci

$$\mathbf{i}_H = \mathbf{H}(\varphi)\,\mathbf{i} ; \qquad u_H = H(\varphi)\,u. \tag{7}$$

Macierz transformacji wybiera się tak, aby sprowadzić układ równań (6) do postaci

$$\mathbf{L}_H \frac{d}{dt}\mathbf{i}_H + \omega\,\mathbf{M}_H\,\mathbf{i}_H + \mathbf{R}_H\,\mathbf{i}_H = \mathbf{u}_H , \tag{8a}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{i}}_H)^T(\mathbf{M}_H + (\dot{\mathbf{M}}_H)^T)\,\mathbf{i}_H + T_m , \tag{8b}$$

w których wszystkie macierze $\mathbf{L}_H$, $\mathbf{M}_H$ oraz $\mathbf{R}_H$ mają elementy stałe, niezależne od kąta obrotu. Nie zawsze jest to jednak możliwe i powodzenie zależy głównie od struktury macierzy indukcyjności $\mathbf{L}(\varphi)$, gdyż macierz ta powinna transformować się do macierzy stałej

$$\mathbf{L}_H = \mathbf{H}(\varphi)\,\mathbf{L}(\varphi)\,\mathbf{H}(\varphi)^{-1} . \tag{9}$$

Dobór macierzy $\mathbf{H}(\varphi)$ jest oddzielnym zagadnieniem. Należy odnotować, że macierz ta musi spełniać związek

$$\mathbf{H}(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{H}(\varphi)^{-1} = \mathbf{C}\ ;\ \mathbf{C}\text{ - macierz o elementach stałych} \tag{10}$$

i powinna być unitarna, aby spełnić warunek niezmienniczości mocy. Klasa takich macierzy jest dobrze znana w maszynach elektrycznych. Ogólnie można je przedstawić w postaci iloczynu trzech macierzy unitarnych

$$\mathbf{H}(\varphi) = \mathbf{P}\,\Lambda(\varphi)\,\Theta\,, \tag{11}$$

z których środkowa musi być macierzą diagonalną o postaci

$$\Lambda(\varphi) = \mathrm{diag}\left[e^{jk_1\varphi}\quad e^{jk_2\varphi}\quad \dots\quad e^{jk_N\varphi}\right]. \tag{12}$$

Zbiór liczb $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ zależy od struktury macierzy indukcyjności $\mathbf{L}(\varphi)$ oraz od numerów harmonicznych, które należy uwzględnić w jej szeregu Fouriera. Macierz Θ jest najczęściej tworzona na bazie macierzy wielofazowych składowych symetrycznych (wyjątek stanowią układy dwufazowe) o ogólnej postaci

$$\mathbf{S}_M = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & a^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & a^{M-1} & \cdots & a^{(M-1)^2} \end{bmatrix};\quad a = e^{j\alpha};\quad \alpha = \frac{2\pi}{M}. \tag{13}$$

Macierz $\mathbf{P}$ występuje wówczas, gdy zmienne definiowane przez transformację $\mathbf{H}(\varphi)$ pozostają w ciele liczb rzeczywistych. Jej zadaniem jest sprowadzenie wielkości zespolonych otrzymanych w wyniku transformacji $\Lambda(\varphi)\,\Theta$ do wielkości rzeczywistych.

Postać równań (8) jest szczególnie korzystna przy analizie przebiegów elektromagnetycznych zachodzących przy stałej prędkości obrotowej $\Omega = const$, gdyż wówczas układ równań elektrycznych (8a), nie dość że jest liniowy ze względu na prądy, to dodatkowo ma stałe współczynniki. Dla tej klasy równań możliwe jest znajdywanie rozwiązań wyrażonych funkcjami elementarnymi, co jest bardzo cenne przy jakościowej i ilościowej analizie własności maszyn na podstawie modelu matematycznego.

Na podstawie układu równań (8a) szczególnie prosto dokonywać można analizy stanów ustalonych klasycznymi metodami teorii obwodów. Dla elementarnego wymuszenia typu $u_H = U_s e^{j\Omega_s t}$ można bowiem przewidzieć rozwiązanie w postaci $i_H = I_s e^{j\Omega_s t}$ i sprowadzić poszukiwanie rozwiązania do równania algebraicznego

$$\left(j\Omega_s L_H + \Omega M_H + R_H\right) I_s = U_s\,. \tag{14}$$

Korzyści z opisu maszyn układem równań o postaci (8) uzyskuje się także przy rozwiązywaniu stanów dynamicznych, podczas których prędkość ulega istotnym zmianom, gdyż układ ten można bardzo prosto zapisać w postaci normalnej $dx/dt = f(x,t)$, wymaganej przez większość komercyjnych pakietów dla numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych.

Klasa macierzy $L(\varphi)$, które udaje się sprowadzić do macierzy stałej L_H, jest jednak ograniczona, a przy zwiększaniu dokładności jej odwzorowania przez szereg Fouriera zawsze napotka się barierę sprowadzalności. W takich przypadkach dobre rezultaty daje zastosowanie transformacji współrzędnych niezależnych od kąta obrotu, porządkujących jedynie macierz indukcyjności. Najczęściej są to odpowiednio dobrane macierze składowych symetrycznych, które upraszczają strukturę macierzy indukcyjności tym bardziej, im bardziej jest ona bliższa macierzy dla maszyny symetrycznie zbudowanej. W wyniku takiej transformacji otrzymuje się jednak układ, którego postać nie różni się w zasadzie od (6), gdyż nowe macierze w dalszym ciągu zależą od kąta obrotu. Dlatego w dalszych rozważaniach będzie on przyjęty za bazowy.

Układ równań (6) stwarza dość duże trudności przy bezpośrednim rozwiązywaniu. Już nawet sprowadzenie go do postaci normalnej stanowi problem, gdyż w istocie rozwiązywać należy układ równań różniczkowo-algebraicznych. W tym przypadku, niezależnie od wyboru zmiennych - prądów czy strumieni skojarzonych - pojawia się konieczność obliczania macierzy $\mathbf{L}(\varphi)^{-1}$. Może to

prowadzić do kłopotów z uzyskaniem wystarczającej dokładności wyników, w przypadkach gdy szybkość zmian indukcyjności jest duża.

W przypadku ograniczenia rozważań do zjawisk elektromagnetycznych, zachodzących przy stałej prędkości obrotowej $\Omega = const$, układ równań (6a) staje się co prawda liniowy względem prądów, lecz jego współczynniki są okresowo zmienne w czasie, gdyż

$$\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{L}(\Omega t + \varphi_0) = \mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(t+T) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_r e^{jr\Omega t}\ ; \qquad \Omega = 2\pi/T\ . \tag{15}$$

Przyjmuje on postać

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t)\,\mathbf{i} + \mathbf{R}\,\mathbf{i} = \mathbf{u}\ , \tag{16}$$

a dla jego rozwiązania należy wykorzystać własności liniowych równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach. Najważniejszą własnością tej klasy równań jest ich sprowadzalność do równań o współczynnikach stałych.

Poniżej zostaną przypomniane podstawowe własności rozwiązań układów okresowych w stanach ustalonych przy harmonicznych wymuszeniach. Dla elementarnego monoharmonicznego wymuszenia typu $\mathbf{u} = \mathbf{U}_s e^{j\Omega_s t}$ (analogicznego jak w przypadku równania (8a)) prąd w stanie ustalonym należy przewidzieć w postaci szeregu Fouriera funkcji prawieokresowej

$$\mathbf{i} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{s,r} e^{j(\Omega_s + r\Omega)t}\ , \tag{17}$$

a współczynniki tego szeregu muszą spełniać nieskończony układ równań algebraicznych o postaci

$$\left(j\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & (\Omega_s+\Omega)E & & & \\ & & \Omega_s E & & \\ & & & (\Omega_s-\Omega)E & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & L_0 & L_1 & L_2 & \\ \ddots & L_{-1} & L_0 & L_1 & \ddots \\ & L_{-2} & L_{-1} & L_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & R & & & \\ & & R & & \\ & & & R & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{s,1} \\ I_{s,0} \\ I_{s,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ U_s \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{18}$$

Pomimo dość oczywistego charakteru tych równań, z których wynika równanie (14) jako przypadek szczególny, nie są one jeszcze rozpowszechnione. Otrzymuje się je w wyniku przeprowadzenia bilansu harmonicznych po obu stronach równania (16), po podstawieniu odpowiednich szeregów Fouriera. Taka metodyka bilansu harmonicznych jest odpowiednikiem metody symbolicznej, stosowanej powszechnie przy analizie obwodów prądu przemiennego, i wydaje się, że powinna się stać podstawową metodą analizy stanów ustalonych w maszynach elektrycznych, w których zarówno ruch obrotowy, jak i harmoniczne pobudzenie napięciowe decydują o przebiegach prądów w uzwojeniach maszyny.

Analiza momentu elektromagnetycznego w takich przypadkach, aczkolwiek metodycznie prosta, prowadzi do dość skomplikowanych zależności. Nie wchodząc w szczegóły, przy wymuszeniu napięciami okresowo-zmiennymi o pulsacji Ω_0, wyrażenie na moment można zapisać w postaci potrójnego szeregu Fouriera

$$T_{em} = j\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} T_{k,l,r} e^{j((l-k)\Omega_0 + r\Omega)t}\ , \tag{19}$$

którego współczynniki określone są formami kwadratowymi odpowiednich komponent prądów oraz indukcyjności. Z tego wyrażenia wynika następująca klasyfikacja możliwych komponent momentu elektromagnetycznego:

- moment asynchroniczny, czyli składowa stała szeregu (19), dla ($k = l,\ r = 0$),
- momenty synchroniczne, dla ($k \neq l,\ r \neq 0$),
- momenty synchroniczne w zerze, dla ($k = l,\ r \neq 0$),
- momenty pulsacyjne, dla ($k \neq l,\ r = 0$).

Można także poszukiwać analitycznych postaci rozwiązań nieustalonych dla układu równań (16), lecz prowadzi to do rozwiązywania zagadnienia własnego dla macierzy nieskończonej,

stanowiącej pewną modyfikację macierzy układu (18). Ze względu na mniejsze znaczenie takich rozwiązań i ich skomplikowaną postać, nie będą one tu przytaczane.

3. MODELE OBWODOWE UWZGLĘDNIAJĄCE NIELINIOWOŚĆ OBWODU MAGNETYCZNEGO

Liniowość obwodu magnetycznego jest jednak dość silnym założeniem upraszczającym, które w zasadzie nigdy nie jest spełnione. Formalnie poprawne modele obwodowe uwzględniające nieliniowość są jednak bardzo skomplikowane, gdyż wymagają znajomości zbioru nieliniowych charakterystyk cewek reprezentujących uzwojenia maszyny. Dla układu *N* cewek należy określić zbiór *N* nieliniowych funkcji *N+1* zmiennych

$$\psi_n(i_1,...,i_N,\varphi), \tag{20}$$

które, dodatkowo, muszą spełniać warunki (1.3). Już przy paru niezależnych uzwojeniach w maszynie problem opisu takich nieliniowych charakterystyk staje się tak skomplikowany, że technika stara się go ominąć. Pewne uproszczenie problemu daje zmiana podejścia polegająca na przyjęciu, że punktem startu do analizy jest funkcja koenergii o postaci $E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)$, z której wynikają charakterystyki cewek

$$\psi_n(i_1,...,i_N,\varphi) = \frac{\partial E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)}{\partial i_n}\text{; dla } n = 1,...,N \tag{21}$$

spełniające warunki (1.3). W dalszym ciągu istnieje jednak konieczność operowania funkcją o *N+1* zmiennych.

Jedną z dróg pozwalających na pokonanie bariery dużej liczby niezależnych zmiennych jest przyjęcie założenia, że obwody magnetyczne dla strumienia głównego i strumieni rozproszeń poszczególnych uzwojeń w maszynie mogą być rozpatrywane rozdzielnie. Jest to ewidentne uproszczenie zjawisk wywoływanych nieliniowością, czego nie musi się tu specjalnie wyjaśniać. Założenie to odpowiada wydzieleniu w funkcji koenergii członów odpowiadających koenergii głównego obwodu magnetycznego oraz koenergii obwodów strumieni rozproszeń

$$E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi) = E_g(i_1,...,i_N,\varphi) + \sum_{n=1}^{N} E_{\sigma,n}(i_n). \tag{22}$$

Używając ogólnie przyjętego w maszynach elektrycznych pojęcia przepływu magnetycznego można znacząco ograniczyć liczbę zmiennych funkcji $E_g(i_1,...,i_N,\varphi)$, wprowadzając pojęcia zastępczych przepływów magnetycznych dla poszczególnych harmonicznych, określanych przez zastępcze prądy magnesujące $i_{\mu k}$ proporcjonalne do ich amplitud oraz ich położenia kątowe $\alpha_{\mu k}$ względem wybranej osi odniesienia. Takie zmienne zastępcze można stosunkowo prosto powiązać analitycznymi zależnościami z prądami $i_1,...,i_N$ oraz kątem φ. Funkcję koenergii głównego obwodu magnetycznego można wówczas zapisać w postaci

$$E_g(i_1,...,i_N,\varphi) = E_g(i_{\mu 1},\alpha_{\mu 1},...,i_{\mu K},\alpha_{\mu K}). \tag{23}$$

Liczba par $i_{\mu k},\alpha_{\mu k}$ zastępczych zmiennych w tej funkcji zależy od wyboru liczby harmonicznych, które należy uwzględniać. Wiadomo, że istotny wpływ na nasycenie głównego obwodu magnetycznego maszyny mają jedynie przepływy o największych amplitudach, a tych jest zwykle kilka. W skrajnym przypadku, gdy ograniczyć się wyłącznie do podstawowej harmonicznej przepływu, otrzymuje się funkcję dwóch zmiennych $E_g(i_{\mu p},\alpha_{\mu p})$. Ogólne własności takich funkcji można przewidzieć na podstawie fizykalnej interpretacji zjawisk w maszynie. Tytułem przykładu, dla obwodu magnetycznego charakteryzującego się równomierną szczeliną, magnesowanego przez przepływ monoharmoniczny, koenergia będzie funkcją wyłącznie jednej zmiennej $E_g(i_{\mu p})$, a dla obwodu o wydatnych biegunach na wirniku, będzie także okresowo zmienna względem kąta $\alpha_{\mu p}$ i może być przewidziana w postaci $E_g(i_{\mu p},\alpha_{\mu p}) = E_{g,0}(i_{\mu p}) + E_{g,2}(i_{\mu p})\cos 2p\alpha_{\mu p} + \cdots$, jeżeli liczyć kąt $\alpha_{\mu p}$ od osi symetrii bieguna na wirniku.

Jakościowe określenie funkcji koenergii $E_g(i_{\mu 1},\alpha_{\mu 1},...,i_{\mu K},\alpha_{\mu K})$ oraz $E_{\sigma,n}(i_n)$ pozwala zapisać równania maszyn w formie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\sigma,n}}{\partial i_n}+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu k}}\frac{\partial i_{\mu k}}{\partial i_n}+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial E_g}{\partial \alpha_{\mu k}}\frac{\partial \alpha_{\mu k}}{\partial i_n}\right)+R_n i_n=u_n\,;\ n=1,...,N, \tag{24a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu k}}\frac{\partial i_{\mu k}}{\partial \varphi}+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial E_g}{\partial \alpha_{\mu k}}\frac{\partial \alpha_{\mu k}}{\partial \varphi}\right)+T_m\,, \tag{24b}$$

w których nieliniowość obwodu magnetycznego maszyny jest reprezentowana przez pochodne cząstkowe funkcji $E_g(i_{\mu 1},\alpha_{\mu 1},...,i_{\mu K},\alpha_{\mu K})$ względem jej zmiennych. Równania te nie operują indukcyjnościami zależnymi od prądów ani nawet tzw. indukcyjnościami dynamicznymi. Ich duża użyteczność wynika z faktu, że wykorzystują one jakościowe cechy funkcji koenergii, określone heurystycznie na podstawie cech szczególnych magnesowania obwodu magnetycznego maszyny. Są one uniwersalne, gdyż obowiązują zarówno dla obwodu magnetycznie liniowego i nieliniowego. Określenie funkcji koenergii dla nieliniowego obwodu magnetycznego wymaga znajomości rozkładu indukcji i natężenia pola magnetycznego w maszynie i jest możliwe jedynie na podstawie numerycznego wyznaczenia tego rozkładu. Wydzielenie jej składowych odpowiadających obwodowi głównemu i obwodom rozproszeń nie jest zadaniem prostym, tym bardziej że w równaniach (25) występują pochodne cząstkowe tych składowych, co wymaga ich określania z dużą dokładnością.

W celu ilustracji, poniżej podano równania maszyn przy traktowaniu szczeliny powietrznej jako równomiernej i uwzględnieniu wyłącznie podstawowej harmonicznej przepływów uzwojeń maszyny

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\sigma,n}}{\partial i_n}+\frac{\partial E_g(i_{\mu p})}{\partial i_{\mu p}}\frac{\partial i_{\mu p}}{\partial i_n}\right)+R_n i_n=u_n\,;\ n=1,...,N, \tag{25a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\partial E_g(i_{\mu p})}{\partial i_{\mu p}}\frac{\partial i_{\mu p}}{\partial \varphi}+T_m\,. \tag{25b}$$

Występuje w nich tylko jedna nieliniowa funkcja $\frac{\partial E_g(i_{\mu p})}{\partial i_{\mu p}}$, którą można interpretować jako charakterystykę magnesowania głównego obwodu magnetycznego maszyny.

Ta klasa modeli jeszcze nie jest dostatecznie rozpoznana, lecz należy sądzić, że stanie się dominująca w grupie modeli obwodowych, uwzględniających nieliniowość obwodu magnetycznego.

Jeżeli założenie o rozdzieleniu obwodów dla strumieni głównego i rozproszeń nie może być przyjęte, wówczas pozostaje powrócić do modeli bazujących na funkcji koenergii w postaci $E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)$ i zapisywaniu na jej podstawie równań maszyn

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)}{\partial i_n}+R_n\,i_n=u_n\,;\ n=1,...,N, \tag{26a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\partial E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)}{\partial \varphi}+T_m. \tag{26b}$$

Z przesłanek fizykalnych i cech obwodu magnetycznego można jednak określić tylko bardzo ogólne własności tej funkcji, takie jak parzystość względem wszystkich prądów czy okresowość względem kąta. Praktycznie pozostaje jedynie jej aproksymacja szeregiem Taylora wielu zmiennych względem prądów, co odpowiada aproksymacji szeregiem potęgowym wielu zmiennych

$$E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}C_{rs}(\varphi)\,i_r\,i_s+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{u=1}^{N}C_{rstu}(\varphi)\,i_r\,i_s\,i_t\,i_u+$$
$$+\frac{1}{6}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}\sum_{w=1}^{N}C_{rstuvw}(\varphi)\,i_r\,i_s\,i_t\,i_u\,i_v\,i_w+\cdots \tag{27}$$

Już przy kilku prądach niezależnych opis taki jest bardzo skomplikowany, gdyż dobra aproksymacja charakterystyk $\psi_n(i_1,...,i_N,\varphi)$, czyli pochodnych funkcji koenergii względem prądów, wymaga użycia stosunkowo dużej liczby wyrazów takich szeregów. Jeżeli przenieść na te charakterystyki doświadczenia z aproksymacji klasycznej krzywej magnesowania względem prądu, to należałoby uwzględniać człony zawierające prądy aż w ósmej lub nawet dziesiątej potędze. Obecnie jest to praktycznie niemożliwe.

Alternatywą jest wybór funkcji energii $E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi)$ jako funkcji bazowej i zastosowanie równań Hamiltona o postaci

$$\frac{d}{dt}\psi_n = u_n - R_n \frac{\partial E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi)}{\partial \psi_n}\ ;\ n=1,...,N, \tag{28a}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\partial E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi)}{\partial \varphi} + T_m. \tag{28b}$$

Korzyść z takiego podejścia wynika z faktu, że łatwiej jest aproksymować klasyczną krzywą magnesowania względem strumienia skojarzonego aniżeli względem prądu. Dotyczy to również funkcji energii i koenergii. Łatwiej jest aproksymować funkcję $E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi)$ aniżeli funkcję $E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)$. Aproksymacja funkcji energii dwoma członami

$$E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} D_{rs}(\varphi)\,\psi_r\,\psi_s + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}\sum_{w=1}^{N} D_{rstuvw}(\varphi)\,\psi_r\,\psi_s\,\psi_t\,\psi_u\,\psi_v\,\psi_w \tag{29}$$

może być efektywniejsza niż aproksymacja funkcji koenergii kolejnymi pięcioma członami szeregu (27). Liczba współczynników we wzorze (29) jest wielokrotnie mniejsza niż w (27), co stwarza szansę na użyteczność techniczną takiego podejścia.

Obydwa podejścia, bazujące zarówno na funkcji energii $E_m(\psi_1,...,\psi_N,\varphi)$, jak i na funkcji koenergii $E_{cm}(i_1,...,i_N,\varphi)$, można nazwać granicznymi przy obwodowym traktowaniu maszyn elektrycznych. Obecnie stanowią one raczej odległy cel, do którego należy dążyć, niż realne narzędzie badawcze. Nie są one w ogóle możliwe do utworzenia bez powiązania z numerycznymi analizami pola magnetycznego w maszynach elektrycznych.

4. WNIOSKI

Uwagi zawarte w pracy wyrażają poglądy autora na temat najważniejszych problemów występujących przy tworzeniu i rozwiązywaniu tzw. obwodowych modeli matematycznych maszyn elektrycznych. W ciągu ponad stuletniej historii rozwoju maszyn elektrycznych zgromadzono na ich temat olbrzymią wiedzę. Na jej tle uwagi zawarte w pracy są bardzo wybiórcze i reprezentują jedynie pewien punkt widzenia. Niewątpliwie jednak obwodowe modele maszyn elektrycznych jeszcze długo pozostaną podstawowym narzędziem do badania zjawisk w maszynach oraz w coraz to bardziej skomplikowanych układach z nimi współpracujących.

LITERATURA

1. Concordia CH.: Synchronous Machines, Theory and Performance, J. Wiley & Sons Inc., New York 1951.
2. Kovacs K.P., Racz I.: Transiente Vorgange in Wechselstrommachinen, Verlag der Ung. Akad. Der Wissenschaften 1959.
3. White D.C., Woodson H.H.: Electromechanical Energy Conversion, J. Wiley & Sons Inc., New York 1959.
4. Dubicki B.: Maszyny elektryczne, PWN, Warszawa 1964.
5. Muller G.: Elektrische Maschinen, Technik, Berlin 1967.
6. Dąbrowski M.: Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych, WNT, Warszawa 1971.

7. Adkins B., Harley R.G.: The General Theory of Alternating Current Machines, Chapman Hall, London 1975.
8. Puchała A.: Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych, WNT, Warszawa 1977.
9. Turowski J.; Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych, WNT, Warszawa 1982.
10. Krause P.C.: Analysis of Electric Machinery, McGraw-Hill Book Comp., 1986.
11. Paszek W: Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego, WNT, Warszawa 1986.
12. Vas P.: Electric Machines and Drives: A Space-Vector Theory Approach, Oxford University Press, 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Kazimierz Zakrzewski

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 2001 r.

Abstract

The paper deals with, so-called, circuital models of electrical machines, in which a machine is treated as a set of magnetically coupled coils. Such class of models is very popular because they are relatively simple and lead to quite good results both for electrical machines themselves and for drives or power-engineering problems related to electrical machines. Circuital models, under the general assumptions that current paths are known and the hysteresis of magnetic material is omitted, operate with linked fluxes and currents of machine windings and are described by equations

$$\frac{d}{dt}\psi_n(\mathbf{i},\varphi) + R_n i_n = u_n \text{ ; (for } n = 1,\ldots,N\text{);} \qquad J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial E_{cm}(\mathbf{i},\varphi)}{\partial\varphi} + T_m \,.$$

The co-energy function, which determines the electromagnetic torque, is given by the formula

$$E_{cm}(\mathbf{i},\varphi) = \sum_{n=1}^{N}\int_0^{i_n}\psi_n(i_1,\ldots,i'_n,0,\ldots,0,\varphi)di'_n \,.$$

These general equations are too complicate for engineers and ways of its simplifications are especially important.

In the paper models assuming linearity of magnetic circuit are more deeply discussed, for which most important are self- and mutual inductances of machine windings. Some remarks on calculations of inductances and relations between them are given, which is very important for successful modelling. Two ways of solving such models are discussed: using transformations of variables, and applying the theory of periodic systems. Properties of transformation matrices used for equations of AC machines are generalized. Solutions to machine equations for steady states on those both ways are compared.

Interesting trends in modelling magnetic non-linearity by circuital models are presented, which, however, require the data from the computational analysis of electromagnetic field in a machine.

The paper presents the author's opinion on the existing knowledge and possibly trends in modelling of electrical machines by circuital models, however all the remarks are of subjective nature.