

Andrzej DEMENKO¹⁾

POLOWE METODY ANALIZY MASZYN ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. W pracy opisano w skrócie historię rozwoju numerycznych metod analizy pola elektromagnetycznego w przetwornikach elektromechanicznych oraz przedstawiono wyniki wybranych badań nad formułowaniem trójwymiarowych polowych modeli maszyn elektrycznych o strukturze walcowej. Rozpatrzono ujęcia wykorzystujące elektryczne i magnetyczne potencjały skalarny i wektorowy. Podano odpowiadające tym ujęciom równania MES dla podejścia wykorzystującego wielkości krawędziowe do opisu potencjału wektorowego. Przedstawiono obwodową reprezentację równań MES. Omówiono równania opisujące rozptył prądu w uzwojeniach maszyn elektrycznych przy wymuszeniach napięciowych. Scharakteryzowano najczęściej stosowane metody symulacji ruchu wirnika i metody obliczania momentu elektromagnetycznego w układach zdyskretyzowanych. Przedstawiono tematykę współczesnych prac nad doskonaleniem metod polowych i wykorzystaniem tych metod w badaniach maszyn elektrycznych.

FIELD METHODS OF ELECTRICAL MACHINE ANALYSIS

Summary. The history of the numerical method of electromagnetic field analysis in electromechanical converters is shortly described and the selected results of the works on the 3D field models of electrical machines are presented. The scalar and vector potential formulations are considered. For these formulations the equations of FEM (with edge elements for vector potentials) are given. The circuit representation of FEM equations is shown. The equations that describe the currents in the electrical machine winding are discussed. The methods of rotor movement simulation and the methods of electromagnetic torque calculation in the FE analysis of electrical machines are described. Finally, the paper presents the subjects of the recent works that are related to the numerical methods of electromagnetic field analysis and to the applications of these methods in the investigations of electrical machines.

Key words: electrical machines, electromagnetic field, finite element method, edge element method, electromagnetic torque

1. WPROWADZENIE

Od ponad 30 lat w analizie i projektowaniu maszyn elektrycznych stosuje się komputerowe metody rozwiązywania równań pola elektromagnetycznego. Metodami komputerowymi rozwiązuje się także równania opisujące rozkład pola temperaturowego, pola przepływowego czynników chłodzących i pola naprężeń mechanicznych. W pracy zagadnienia związane z analizą tych pól nie będą rozpatrywane. Pisząc o polowej analizie maszyny elektrycznej autor będzie miał na myśli analize zjawisk opisanych równaniami pola elektromagnetycznego.

Najczęściej stosowaną komputerową metodą rozwiązywania równań pola elektromagnetycznego jest metoda elementów skończonych (MES) [2, 11, 15, 25, 29, 31], rzadziej wykorzystuje się metodę różnic skończonych [10, 27, 38, 49] i metodę elementów brzegowych [2]. Do komputerowych metod analizy pola magnetycznego zalicza się także metodę sieci reluktancyjnych i permeancyjnych, które wyrosły na gruncie obwodowych schematów zastępczych [37, 39, 48].

Najstarszą numeryczną metodą rozwiązywania równań pola elektromagnetycznego jest metoda różnic skończonych. Metodę tę stosowano już 50 lat temu. Do rozwiązywania równań różnicowych używano wówczas siatkowych analizatorów pola, tj. maszyn analogowych odwzorowujących te równania na siatce rezystancyjno-pojemnościowej. Duże zasługi w rozwoju różnicowych metod rozwiązywania równań pola magnetycznego ma Liebmann. W kierowanym przez niego laboratorium AEI w Anglii już na początku lat 50. z powodzeniem stosowano analizator siatkowy do badania rozkładu pola magnetycznego w soczewkach magnetycznych [26]. Analizatory siatkowe do rozwią-

¹⁾ Prof. dr hab. inż. Politechnika Poznańska, ul. Piotrowo 3A, 60-965 Poznań, tel. +48(61)6652126, fax +48(61)6652381, e-mail andrzej.demenko@put.poznan.pl

zywania różnicowych równań pola elektromagnetycznego w maszynach elektrycznych stosował Oberretl. Wykorzystał siatkę rezystancyjno-pojemnościową do wyznaczania strat od prądów wirowych wznieczanych przez strumień główny w uzwojeniach twornika turbogeneratorów [36]. Pod koniec lat 60 do rozwiązywania różnicowych równań pola magnetycznego zaczęto stosować technikę cyfrową [9, 45]. Początkowo z uwagi na małą uniwersalność języków programowania, duże koszty i stosunkowo długi czas obliczeń, rozwój komputerowych metod rozwiązywania równań pola elektromagnetycznego był mało dynamiczny. Równocześnie z rozwojem cyfrowej techniki obliczeniowej rozwijały się specjalizowane analizatory polowe. Klasyczne analizatory analogowe zostały wyparte przez analizatory hybrydowe, w których siatka rezystancyjna sprzężona była z maszyną cyfrową [11], a następnie przez analizatory z siatką mikroprocesorową. Zainteresowanie analizatorami z siatką mikroprocesorową było krótkotrwałe, ich następcami stały się specjalizowane systemy obliczeniowe z procesorami tablicowymi. Część pomysłów dotyczących obliczeń równoległych na analizatorach siatkowych została wykorzystana przy opracowywaniu algorytmów rozwiązywania równań pola przy użyciu superkomputerów.

Wraz ze wzrostem mocy obliczeniowej maszyn cyfrowych rosło zainteresowanie numerycznymi metodami analizy pola elektromagnetycznego w maszynach elektrycznych. Od połowy lat 70 przeważać zaczęły prace wykorzystujące MES. Początkowo numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych stosowano głównie do analizy dwuwymiarowego pola magnetostatycznego [43]. Na podstawie wyników obliczeń wyznaczano wybrane parametry całkowite, charakteryzujące właściwości magnetowodu, jak np. współczynniki rozproszenia, współczynnik zapełnienia podziałki biegunowej. Prace idące w tym kierunku są nadal kontynuowane, a ich celem jest najczęściej dokładniejsze obliczenie strumieni i indukcji występujących w równaniach napięciowych uzwojeń maszyny [20, 42]. Rozpatruje się nie tylko układy z cienkimi przewodami, ale także układy z masywnymi elementami przewodzącymi, w których występują prądy wirowe. Indukcyjności „dynamiczne” uzwojeń w układach z prądami wirowymi wyznacza się na podstawie rozwiązań dla sformułowań wykorzystujących potencjał zespolony [4].

Podjęcie polegające na wyznaczeniu metodami polowymi parametrów obwodowego modelu maszyny można z powodzeniem stosować do symulacji stanów pracy maszyn o jednym stopniu swobody elektrycznej, np. silników reluktancyjnych z przełączanym uzwojeniem stojana [40]. W przypadku układów o większej liczbie stopni swobody metoda jest skuteczna tylko wówczas, gdy w badaniach rozpatrywanych stanów można posłużyć się uproszczonym modelem obwodowym, np. gdy można pominąć zjawiska związane z nasycaniem się rdzenia i założyć, że parametry modelu obwodowego nie zależą od poszukiwanego rozwiązania.

Na początku lat 80. do analizy maszyn elektrycznych zaczęto stosować dwuwymiarowe modele polowo-obwodowe. W modelach tych równania MES dla dwuwymiarowego pola elektromagnetycznego są sprzężone z równaniami napięciowymi układu uzwojeń [11, 12, 30]. Występujące w równaniach napięciowych strumienie skojarzone z uzwojeniami wyraża się za pomocą wielkości polowych, a źródła pola elektromagnetycznego określa się na podstawie prądów w uzwojeniach lub napięć przyporządkowanych bokom zwojów. Najpierw dwuwymiarowe modele polowo-obwodowe stosowano do analizy zjawisk w układach o śródowniskach nieruchomych, np. w transformatorach, maszynach o nieruchomym wirniku [11, 30]. Badania nad symulacją ruchu śródownisk na modelach dyskretnych rozpoczęto wprawdzie już ponad 20 lat temu [2], ale dopiero po opracowaniu metody elementów okształcanych zaczęto z powodzeniem wykorzystywać modele polowo-obwodowe do analizy zjawisk związanych z ruchem i do symulacji stanów elektromechanicznie niestabilnych. W 1988 roku Arkkio opublikował wyniki prac nad polową analizą dynamicznych stanów pracy silnika klatkowego [1]. Przyjął, że pole magnetyczne w maszynie charakteryzuje się symetrią płaszczyznową, uwzględnił równania pola przepływowego prądów wirowych w prętach klatki. Moment elektromagnetyczny maszyny obliczał metodą tensora naprężeń. W tym samym czasie w pracach [31, 32] przedstawiono wyniki badań nad polowo-obwodową symulacją stanów pracy przetworników acyklicznych. Analizowano przetworniki z polem magnetycznym o symetrii osiowej. Do rozwiązywania równania równowagi mechanicznej zastosowano dokładniejsze niż Arkkio niejawne schematy numeryczne. Algorytm polowo-obwodowej analizy wykorzystano do obliczeń projektowych rozpatrywanych przetworników.

W następnych latach opracowano algorytmy dwuwymiarowej polowej analizy stanów pracy innych przetworników. Modele polowo-obwodowe zastosowano do obliczeń symulacyjnych i projektowych silników magnetoelektrycznych [47], silników jednofazowych o pomocniczym uzwojeniu

zwartym [29], silników reluktancyjnych [40] i mikrosilników krzemowych [4]. Podjęto prace nad algorytmami rozwiązywania równań modelu polowo-obwodowego maszyny elektrycznej łącznie z równaniami układów zasilających i układów sterujących z elementami półprzewodnikowymi [13, 41]. Równocześnie prowadzono badania nad skuteczniejszymi, nie generującymi szumów, metodami odwzorowania ruchu środowisk [14, 15, 44] oraz nad dokładniejszymi metodami obliczania sił i momentów w układach zdyskretyzowanych [15]. W celu odwzorowania zjawisk w maszynach o żłobkach skośnych zaproponowano stosowanie dwuwymiarowych modeli wielowarstwowych, złożonych z warstw o różnym, odpowiednio dobranym, położeniu żłobków wirnika względem żłobków stojana [15]. Osiągnięcia w badaniach nad dwuwymiarowymi modelami polowo-obwodowymi zawoocowały opracowaniem profesjonalnego oprogramowania, wykorzystywanego obecnie przez wiele ośrodków naukowych. Oprogramowanie to stosuje się przede wszystkim do analizy maszyn elektrycznych o strukturze walcowej.

W dwuwymiarowych modelach polowych maszyn elektrycznych połączenia czołowe rozpatruje się „zerowymiarowo” jako elementy skupione, a więc tak jak w modelach obwodowych. W uproszczony sposób, modyfikując wymiary, uwzględnia się reluktancję dla strumienia skalarnego oraz, który przenika na zewnątrz maszyny poprzez obszar połączeń czołowych i promieniowe kanały wentylacyjne. W układach z maszynowymi elementami pomija się składowe gęstości prądu w kierunku prostopadłym do osi wału. W związku z wymienionymi uproszczeniami, nawet w przypadku maszyn o strukturze walcowej, wyniki obliczeń na podstawie modeli dwuwymiarowych mogą być mało dokładne. Dotyczy to przede wszystkim maszyn o małym współczynniku smukłości.

W ostatnich latach w obliczeniach symulacyjnych i projektowych maszyn elektrycznych zaczęto stosować algorytmy wyznaczania pól trójwymiarowych. Najpierw skoncentrowano się na badaniach nad wykorzystaniem mało uniwersalnej metody zredukowanego potencjału skalarnego oraz nad dostosowaniem klasycznej metody elementów węzłowych do rozwiązywania równań opisujących rozkład wektorowego potencjału magnetycznego A [2]. Opracowano nawet profesjonalne oprogramowanie wykorzystujące te metody i uzupełniające istniejące komercyjne systemy do komputerowej analizy pól elektromagnetycznych w układach dwuwymiarowych. Ostatnio do trójwymiarowej polowej analizy maszyn elektrycznych coraz powszechniej stosowana jest metoda elementów krawędziowych (MEK), w której rozkład pola magnetycznego opisuje się na podstawie wartości całek z wektorowego potencjału magnetycznego wzdłuż krawędzi elementów.

Do wyznaczania rozkładu pola elektromagnetycznego elementy krawędziowe po raz pierwszy wykorzystał Bossawit [7]. Zaproponował stosowanie tych elementów do badania pola przepływowego od prądów wirowych, nie posługiwał się potencjałem wektorowym. Dopiero 10 lat po pierwszych pracach Bossawita zaczęto stosować MEK do analizy pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym. Wiązało się to przede wszystkim z opracowaniem nowych sposobów opisu wymuszeń i wdrożeniem skutecznych procedur rozwiązywania równań MEK [3]. Duży wpływ na rozwój MEK miały wyniki prac nad kompleksowym ujęciem funkcji elementu skończonego. W monografii [34] element rozpatrywany kompleksowo został nazwany elementem uogólnionym. Dzięki zastosowaniu funkcji elementu uogólnionego uzyskuje się uniwersalne formuły numeryczne dla równań pola magnetycznego połączonej z równaniami opisującymi rozpyły prądu w uzwojeniach. W związku z tym metoda elementów uogólnionych okazała się bardzo przydatna w trójwymiarowej polowej analizie maszyn elektrycznych. Zaletą metody jest też jej pogłębliwość. Równania metody odpowiadają bowiem równaniom sprzężonych przez źródła siatek „magnetycznej” i „elektrycznej”. W związku z tym poniżej, przy omawianiu polowych metod analizy maszyn elektrycznych, skoncentrowano się na metodzie ujmującej element skończony kompleksowo.

Najpierw omówiono równania opisujące rozkład pola w maszynach elektrycznych i podano odpowiadające tym równaniom schematy numeryczne dla MES. Przedstawiono obwodową reprezentację równań MES. Rozpatrzono równania opisujące rozpyły prądu w uzwojeniach o cienkich przewodach i uzwojeniach prętowych. Następnie scharakteryzowano metody odwzorowania ruchu środowisk w polowej analizie maszyn elektrycznych oraz metody wyznaczania momentu ponderomotorycznego. W końcowej części artykułu przedstawiono tematykę niektórych współczesnych prac nad doskonaleniem komputerowych metod analizy pola elektromagnetycznego i wykorzystaniem tych metod w badaniach i projektowaniu przetworników elektromechanicznych.

2. RÓWNANIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W UJĘCIU KOMPLEKSOWYM

2.1. Opis pola elektromagnetycznego

Polowy model zjawisk w maszynach elektrycznych tworzy się na podstawie równań opisujących rozkład pola magnetycznego

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = \nu\mathbf{B} \quad (1)$$

oraz równań opisujących rozkład pola przepływowego prądu

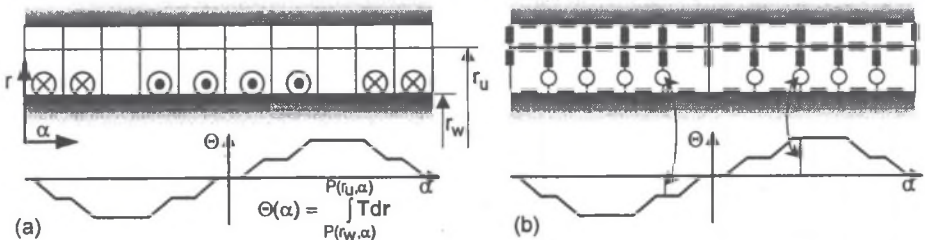
$$\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \text{div}\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \quad (2)$$

W celu rozwiązania tych równań wielkości polowe wyraża się za pomocą potencjałów skalarnych magnetycznego Ω i elektrycznego V lub potencjałów wektorowych magnetycznego \mathbf{A} i elektrycznego \mathbf{T} . W przypadku metody potencjałów wektorowych przyjmuje się, że

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{T}. \quad (3a,b)$$

Powyższe relacje są polowymi reprezentantami podstawień polegających na wyrażaniu wielkości gałęziowych za pomocą wielkości oczkowych w analizie obwodów magnetycznych i elektrycznych. Potencjały \mathbf{A} i \mathbf{T} można rozpatrywać jako liniowe gęstości strumienia i prądu oczkowego. Wektor \mathbf{T} odpowiada wektorowi namagnesowania magnesu trwałego. Całki z wektorów \mathbf{A} i \mathbf{T} wzdłuż krawędzi elementu skończonego (nazywane wartościami krawędziowymi potencjału wektorowego) mogą być rozpatrywane jak strumienie i prądy oczkowe w oczkach wokół krawędzi. Choć wielkość krawędziowa potencjału \mathbf{T} jest wykorzystywane w analizie pola elektromagnetycznego dopiero od dziesięciu lat, to jej szczególna reprezentacja jest stosowana w teorii maszyn elektrycznych już od dawna. Przedstawiony na rysunku 1a rozkład przepływu w szczelinie powietrznej można bowiem traktować jako rozkład krawędziowej wielkości \mathbf{T} . Na podstawie rozkładu przepływu określa się gałęziowe siły magnetomotoryczne (smm) w przedstawionym na rysunku 1b siatkowym modelu permeacyjnym rozpatrzonego układu. Równania siatki o zadanych gałęziowych smm najdogodniej jest rozwiązywać metodą potencjałów węzłowych. Potencjały węzłowe siatki permeacyjnej są węzłowymi wartościami skalarnego potencjału magnetycznego, a więc dzięki wyrażeniu rozkładu źródeł pola za pomocą rozkładu smm do analizy pola magnetycznego w przedstawionym przykładzie można zastosować metodę potencjału skalarnego. Takie same korzyści wynikają z podstawienia $\mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{T}$. Po wyrażeniu rozkładu gęstości prądu za pomocą potencjału \mathbf{T} rozkład pola magnetycznego można opisać za pomocą potencjału skalarnego. Uwzględnić należy przy tym, że $\mathbf{H} = \mathbf{T} = \text{grad}\Omega$. Z przedstawionych wyjaśnień wynika, że odnoszące się do pola elektrycznego podstawienie (3b) jest przydatne w analizie pola magnetycznego. Proces poszukiwania wektora \mathbf{T} przy danym wektorze \mathbf{J} w teorii pola można utożsamiać z procesem poszukiwania smm gałęziowych na podstawie danych smm oczkowych w analizie obwodów magnetycznych.

Podobnie można rozpatrywać podstawienie (3a), które jest stosowane w analizie pola magnetycznego. Po zastosowaniu tego podstawienia równania pola przepływowego prądu można rozwiązać metodą potencjału skalarnego V . Należy przy tym uwzględnić, że $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = \text{grad}V$.



Rys. 1. Rozkład krawędziowej wielkości potencjału \mathbf{T} w szczelinie (a) i permeacyjny model szczeliny (b)
Fig. 1. Distribution of edge value of potential \mathbf{T} in air gap (a) and permeance model of air gap (b)

W tabelicy 1 przedstawiono równania opisujące rozkład pola magnetycznego i przepływowego prądu, które uzyskuje się po zastosowaniu omówionych podstawień. Na podstawie podanych równań otrzymuje się trzy – zestawione w tabelicy 2 – formy (metody) opisu pola elektromagnetycznego.

Tabela 1

Opis pola magnetycznego i przepływowego prądu za pomocą potencjałów wektorowych i skalar-nych

| | Pole magnetyczne | | Pole przepływowe prądu | |
|-----------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| | Potencjał A | Potencjał Ω | Potencjał T | Potencjał V |
| Podstawienia | $\mathbf{B} = \text{rotA}$ | $\mathbf{J} = \text{rotT} ,$ $\mathbf{H} - \mathbf{T} = \text{grad}\Omega$ | $\mathbf{J} = \text{rotT}$ | $\mathbf{B} = \text{rotA} ,$ $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = \text{gradV}$ |
| Spełnione równanie | $\text{div}\mathbf{B} = 0$ | $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$ | $\text{div}\mathbf{J} = 0$ | $\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ |
| Rozwiązywane równanie | $\text{rot}(\nu\text{rotA}) = \mathbf{J}$ | $\text{div}[\nu^{-1}(\text{grad}\Omega + \mathbf{T})] = 0$ | $\text{rot}(\sigma^{-1}\text{rotT}) = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ | $\text{div}\left[\sigma(\text{gradV} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})\right] = 0$ |

Tabela 2

Równania podstawowych metod opisu pola elektromagnetycznego

| Metoda | Równania | |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ω-T | $\text{div}[\nu^{-1}(\text{grad}\Omega + \mathbf{T})] = 0$ | $\text{rot}(\sigma^{-1}\text{rotT}) = -\frac{\partial}{\partial t}[\nu^{-1}(\text{grad}\Omega + \mathbf{T})]$ |
| A-V | $\text{rot}(\nu\text{rotA}) = \sigma\text{gradV} - \sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ | $\text{div}\left[\sigma(\text{gradV} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})\right] = 0$ |
| A-T | $\text{rot}(\nu\text{rotA}) = \text{rotT}$ | $\text{rot}(\sigma^{-1}\text{rotT}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rotA})$ |

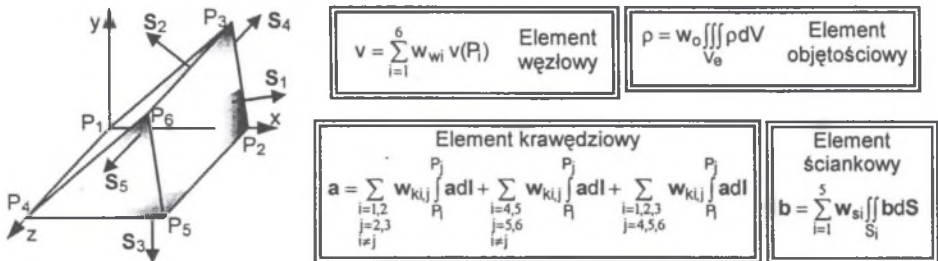
2.2. Funkcje interpolujące elementu skończonego

Najczęściej stosowaną metodą rozwiązywania równań pola elektromagnetycznego jest metoda elementów skończonych. W omawianym dalej ujęciu element skończony rozpatruje się jako węzłowy, krawędziowy, ściankowy i objętościowy [8, 22]. Element jest rozpatrywany jako węzłowy wówczas, gdy rozkład wielkości skalarnej w elemencie jest wyrażany za pomocą wartości tej wielkości w węzłach. Element jest nazywany krawędziowym wówczas, gdy funkcję interpolującą rozkład wielkości wektorowej w jego obszarze tworzy się na podstawie zadanych wartości całek z tej wielkości wzdłuż krawędzi elementu – całki te są nazywane wielkościami krawędziowymi. W elemencie ściankowym funkcję opisującą wielkość wektorową formuluje się na podstawie zadanych wartości całek z tej wielkości po powierzchni ścianek elementu – całki te nazywa się wielkościami ściankowymi. Natomiast elementem objętościowym jest element, w którym rozkład wielkości skalarnej określa się na podstawie zadanych wartości całek objętościowych z tej wielkości – całki te nazywa się wielkościami objętościowymi.

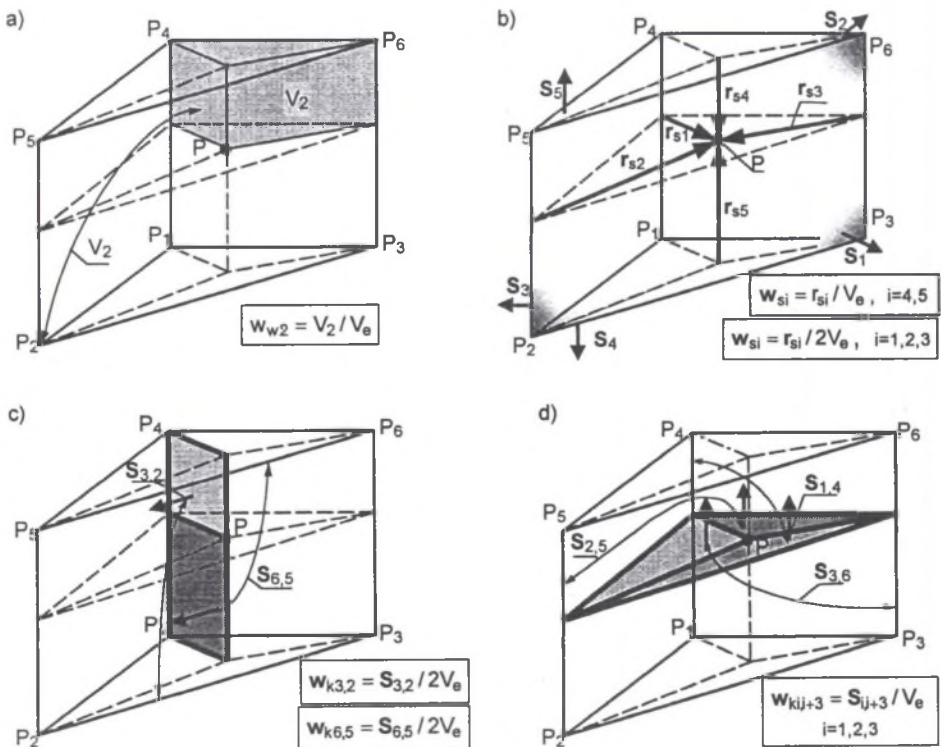
Na rysunku 2 przedstawiono pięciościan, który w odniesieniu do wielkości skalarnej v i p jest elementem węzłowym i objętościowym, zaś w odniesieniu do wielkości wektorowych \mathbf{a} i \mathbf{b} odpowiednio elementem krawędziowym i ściankowym. W podanych na rysunku wyrażeniach zastosowano następujące oznaczenia: w_{wi} – funkcje interpolacyjne elementu węzłowego, $w_{ki,j}$ – wektorowe funkcje interpolacyjne elementu krawędziowego, w_{si} – wektorowe funkcje interpolacyjne elementu ściankowego, w_o – funkcja skalarna elementu objętościowego, która w przypadku przedstawionego elementu jest równa odwrotności jego objętości V_o . Dla pięciościanu wymienione funkcje są reprezentowane przez formy geometryczne (objętości, ścianki i krawędzie) przedstawione na rysunkach 3. Na przykład, wartość funkcji w_{w2} w punkcie P jest równa względnej objętości „podelementu” V_2 , a wartość funkcji ściankowej w_{s4} w tym punkcie odpowiada wektorowi krawędzi r_{s4} odniesionemu do objętości elementu.

W analizie pola elektromagnetycznego klasyczną MES wykorzystuje się tylko funkcje elementu węzłowego oraz wielkości węzłowe potencjału skalarne lub składowych potencjału wektorowego

[2, 33, 35]. W rozpatrywanej metodzie elementów uogólnionych korzysta się z funkcji wektorowych elementu krawędziowego i ściankowego. Wielkościami krawędziowymi są całki z wektorowego potencjału A i T , które reprezentują strumienie i prądy oczkowe w oczkach otaczających krawędzie [16]. Wielkościami krawędziowymi mogą być także całki z gradientu potencjału, które opisują napięcia międzywęzłowe. Wielkościami ściankowymi są całki powierzchniowe z wektorów B i J . Całki te opisują strumienie i prądy przenikające przez ścianki elementu.



Rys. 2. Element 6-węzłowy, 9-krawędziowy, 5-ścienny
Fig. 2. 6-nodal, 9-edge, 5-facet element

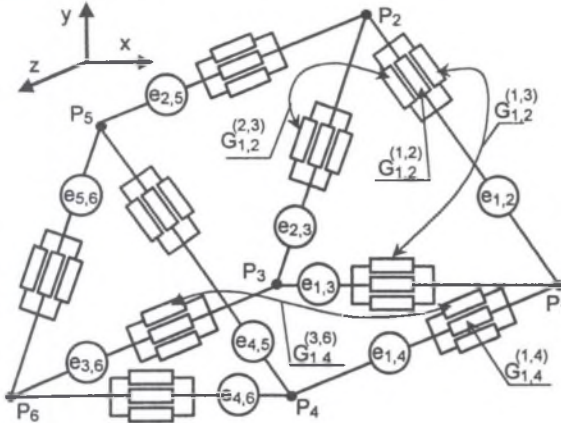


Rys. 3. Graficzna reprezentacja funkcji interpolacyjnych elementu z rys. 2; funkcje węzłowe (a), ściankowe (b), krawędziowe (c,d)

Fig. 3. Graphical representation of interpolation functions for element in Fig. 2, nodal (a), facet (b), edge functions (c,d)

2.3. Obwodowe modele elementu skończonego i układu połączonych elementów

Równania metody elementów uogólnionych odpowiadają równaniom węzłowym i oczkowym siatek magnetycznej i elektrycznej złożonych z obwodowych modeli elementu. Wyodrębnia się dwa typy obwodowych modeli elementów skończonych: (a) modele o grafie krawędziowym (MKE) i (b) modele o grafie ściankowym (MSE). Obwodowe modele pięciostianu przedstawiono na rysunkach 4, 5. W modelach o grafie ściankowym gałęzie są przyporządkowane krawędziom elementów, a w modelach o grafie ściankowym odcinkom łączącym środki ścianek ze środkami ciężkości elementu.

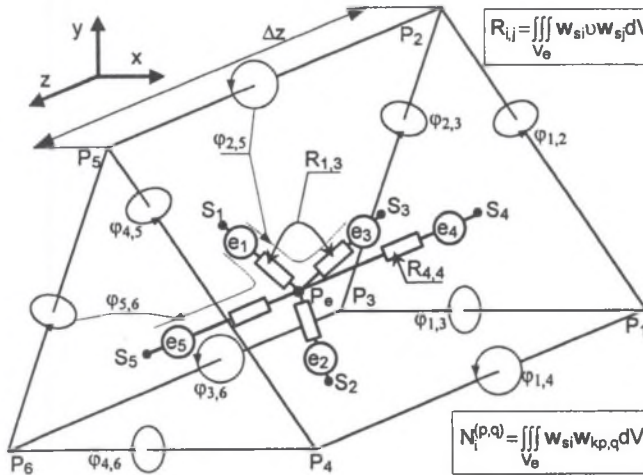


$$G_{ij}^{(p,q)} = \iiint_{V_e} w_{ki} \xi w_{kp,q} dV$$

Pole magnetyczne: $\xi = v^{-1}$,
 $G_{ij}^{(p,q)} = \Lambda_{ij}^{(p,q)}$ – permeancja
 $e_{ij} = \Theta_{ij} = \int_R T dl$ – smm

Pole przepł. prądu: $\xi = \sigma$,
 $G_{ij}^{(p,q)}$ – konduktancja
 $e_{ij} = -\frac{d}{dt} \int_R A dl$ – sem

Rys. 4. Krawędziowy model elementu (MKE)
 Fig. 4. Edge model of element (MKE)



$$R_{ij} = \iiint_{V_e} w_{si} v w_{sj} dV$$

Pole magnetyczne: $v = v$,
 $R_{ij} = R_{\mu ij}$ – reluktancja
 $\Phi_{ij} = \int_R A dl$ – strumień oczkowy
 $e_i = \Theta_i = \sum_{p,q} N_i^{(p,q)} \int_{P_p} T dl$ – smm

Pole przepł. prądu: $v = \sigma^{-1}$,
 R_{ij} – rezystancja
 $\Phi_{ij} = \Theta_{ij} = \int_R T dl$ – prąd oczkowy
 $e_i = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{p,q} N_i^{(p,q)} \int_{P_p} A dl \right)$ – sem

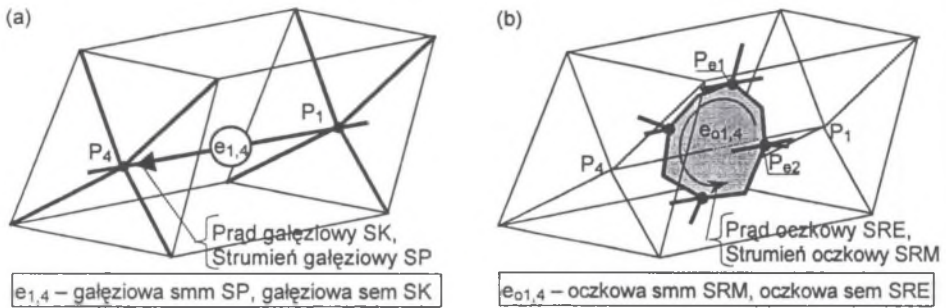
$$N_i^{(p,q)} = \iiint_{V_e} w_{si} w_{kp,q} dV$$

Rys. 5. Ściankowy model elementu (MSE)
 Fig. 5. Facet model of element (MSE)

Elementami gałęziowymi siatki magnetycznej i elektrycznej o grafie krawędziowym są odpowiednio permeancje i konduktancje, które wyznacza się na podstawie funkcji elementu krawędziowego (rys. 4) [19]. Elementami gałęziowymi MSE są reluktancje i rezystancje, które oblicza się na podstawie funkcji elementu ściankowego (rys. 5) [16]. W obu typach modeli źródła gałęziowe są wyrażone za pomocą wielkości krawędziowych, a więc są określane na podstawie strumieni i prądów oczkowych wokół krawędzi. Na rysunku 5 strumienie i prądy oczkowe oznaczono w postaci wirów.

W odróżnieniu od klasycznych modeli siatkowych w MKE występują permeancje i konduktancje wzajemne, a w MSE rezystancje i reluktancje wzajemne.

Po połączeniu MKE otrzymuje się siatkowy model permeancyjny (SP) rozpatrywanego obszaru z polem magnetycznym lub siatkowy model konduktancyjny (SK) rozpatrywanego obszaru z polem przepływowym prądu (rys.6a). Równania węzłowe SP i SK odpowiadają równaniom MES dla ujęć wykorzystujących potencjały skalarnie. Podobnie w wyniku połączenia MSE otrzymuje się siatkowy model reluktancyjny (SRM) obszaru z polem magnetycznym lub siatkowy model rezystancyjny (SRE) układu z polem przepływowym prądu (rys.6b). Równania oczkowe tych siatek odpowiadają równaniom MES dla ujęć wykorzystujących potencjały wektorowe. Prądom i strumieniom oczkowemu odpowiadają wielkości krawędziowe i dlatego metodę nazywa się metodą elementów krawędziowych (MEK) [16, 19]. W tablicy 3 przedstawiono obwodowe reprezentacje równań MES w ujęciu uogólnionym dla trzech podanych wcześniej w tablicy 2 metod analizy pola elektromagnetycznego. Równania modeli siatkowych zestawiono w tablicy 4.



Rys. 6. Gałąź siatki permeancyjnej i konduktancyjnej (a) oraz oczko siatki rezystancyjnej i reluktancyjnej (b) przy-
porządkowane krawędzi P_1P_4

Fig. 6. Branch of permeance or conductance network (a); loop of reluctance or resistance network for edge P_1P_4

Tablica 3

Obwodowa reprezentacja MES dla podanych w tablicy 2 metod opisu pola elektromagnetycznego

| Metoda | Pole magnetyczne | Pole przepływowe prądu | Powiązania pomiędzy modelami siatkowymi |
|-------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ω -T | Równania węzłowe siatki permeancyjnej (SP) – rys. 6a | Równania oczkowe siatki rezystancyjnej (SRE) – rys. 6b | Gałęziowe smm w SP = Prądy oczkowe w SRE Oczkowe sem w SRE = - d(Strumienie gałęziowe w SP)/dt |
| A-V | Równania oczkowe siatki reluktancyjnej (SRM) – rys. 6b | Równania węzłowe siatki konduktancyjnej (SK) – rys. 6a | Oczkowe smm w SRM = Prądy gałęziowe w SK Gałęziowe sem w SK = - d(Strumienie oczkowe w SP)/dt |
| A-T | Równania oczkowe siatki reluktancyjnej (SRM) – rys. 6b | Równania oczkowe siatki rezystancyjnej (SRE) – rys. 6b | Oczkowe smm w SRM oblicza się na podstawie prądów gałęziowych lub oczkowych w SRE Oczkowe sem w SRE oblicza się na podstawie zmian strumieni gałęziowych lub oczkowych w SRE |

Z równań MEK wynikają równania klasycznej MES, stosowanej powszechnie w analizie dwuwymiarowych pól magnetycznych opisanych potencjałem wektorowym. W ujęciu dwuwymiarowym rozpatruje się tylko jedną składową wektorowego potencjału A, np. składową A_z . Dla układu, w którym występuje tylko składowa A_z , strumienie oczkowe wokół krawędzi ścianek trójkątnych pięciokątnian z rysunku 5 są równe zero. Równe zero są też strumienie w gałęziach przyporządkowanych ściankom S4, S5. Gałęzie te można więc pominąć. W rezultacie otrzymuje się model elementu przedstawiony na rysunku 7.

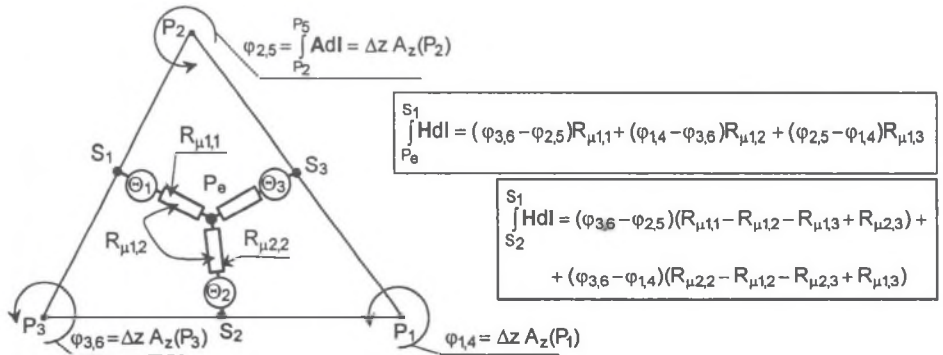
Tablica 4

Równania metody elementów uogólnionych

| Metoda | Równania | Opis oznaczeń |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ω -T | $\begin{bmatrix} k_w^T \Lambda_g k_w & k_w^T \Lambda_g \\ p \Lambda_g k_w & k_o^T R_g k_o + p \Lambda_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | Ω – wektor potencjałów węzłowych SP; i_o – wektor prądów oczkowych SRE; φ – wektor strumieni oczkowych SRM; V – wektor potencjałów węzłowych SK; k_w – macierz incydencji węzłowych SP i SK (siatkowa reprezentacja operatora <i>grad</i>); k_o – macierz oczkowa SRE i SRM (siatkowa reprezentacja operatora <i>rot</i>); R_g – macierz rezystancji gałęziowych SRE; Λ_g – macierz permeancji gałęziowych SP; $R_{\mu g}$ – macierz reluktancji gałęziowych SRM; G_g – macierz konduktancji gałęziowych SK; N_c – macierz transformująca prądy i strumienie przenikające przez ścianki w prądy i strumienie przenikające przez oczka SRM i SRE, $p=d/dt$ |
| A-V | $\begin{bmatrix} k_o^T R_{\mu g} k_o + G_g p & -G_g k_w \\ -k_w^T G_g p & k_w^T G_g k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | |
| A-T | $\begin{bmatrix} k_o^T R_{\mu g} k_o & -N_c k_o \\ k_o^T N_c^T p & k_o^T R_g k_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | |

W analizie dwuwymiarowej $A_z \neq f(z)$, a więc całka z wektorowego potencjału wzdłuż krawędzi $P_i P_{i+3}$ ($i=1,2,3$) jest równa iloczynowi długości Δz i wartości $A_z(P_i)$ potencjału A_z węzła P_i – rys. 7. Wielkości krawędziowe wyraża się więc za pomocą potencjałów węzłów. Składnikami lewej strony równań MES są wyrażenia reprezentujące całkę z wektora natężenia pola wzdłuż odcinków łączących punkty S_i ze środkiem P_o elementu. Na rysunku 7 przedstawiono przykładowo wyrażenie opisujące całkę wzdłuż odcinka $P_o S_1$ oraz wyrażenie uzyskane po zsumowaniu całek wzdłuż odcinków $P_o S_1, S_2 P_o$, a więc opisujące napięcie magnetyczne między punktami S_2, S_1 . Wyrażenie to odpowiada składnikowi lewej strony równania klasycznej MES dla węzła P_3 (składnik odnosi się do pojedynczego elementu). Składnikiem prawej strony tego równania jest różnica $\Theta_1 - \Theta_2$ reprezentująca część oczkowej smm, przyporządkowaną elementowi. W klasycznej MES składnik ten wyznacza się na podstawie rozkładu składowej J_z gęstości prądu. W procesie obliczeń nie wyodrębnia się gałęziowych smm Θ_i . W MEK też w celu wyznaczenia oczkowych smm nie trzeba najpierw obliczać smm gałęziowych. Smm oczkowe można bowiem określić na podstawie wielkości ściankowych, tj. prądów przenikających przez ścianki [17]. Po zastosowaniu takiego podejścia dla układu dwuwymiarowego z rysunku 7 uzyskuje się równania, w których przepływy przyporządkowane węzłom elementu trójkątnego są równe jednej trzeciej prądu przenikającego przez element.

Na podstawie równań podanych w tablicy 4 można uformować równania opisujące rozkład pola magnetycznego i rozpyły prądów w uzwojeniach maszyn elektrycznych.



Rys. 7. Model reluktancyjny elementu trójkątnego dla układu z polem dwuwymiarowym
 Fig. 7. Reluctance model of triangle for 2D magnetic field

3. RÓWNANIA NAPIĘCIOWE UKŁADU UZWOJEŃ W UJĘCIU POŁOWYM

3.1. Uzwojenia wykonane z cienkich przewodów

Rozpatrywany jest układ z cewkami wielozwojowymi o cienkich przewodach. Nie uwzględnia się zjawisk związanych z wypieraniem prądu. Przewody są traktowane jako włókna. Kierunek wektora gęstości prądu jest prostopadły do powierzchni przekroju przewodu, jest więc znany. Analizowany jest najbardziej typowy przypadek wymuszeń. Przyjęto, że zadany jest przebieg napięć zasilających uzwojenia złożone z szeregowo połączonych zwojów, a poszukiwany jest rozkładu pola magnetycznego i przebiegi prądów w uzwojeniach. W klasycznych, obwodowych metodach wyznaczenia prądów w uzwojeniach przy zadanych przebiegach napięć zasilających najpierw oblicza się indukcyjności własne i wzajemne uzwojeń, a następnie rozwiązuje się równania obwodów z tymi indukcyjnościami. Z uwagi na występowanie indukcyjności wzajemnych do analizy obwodów stosuje się metodę prądów obwodowych. W języku MEK prądy oczkowe są nazywane wielkościami macierzyowymi elektrycznego potencjału wektorowego T . Prądy oczkowe reprezentowane przez wielkości krawędziowe potencjału T odnoszą się do oczek wokół krawędzi elementów. Prądy oczkowe w klasycznych metodach obwodowych są zaś przyporządkowane obwodom złożonym z uzwojeń. Tory tych prądów w przestrzeni trójwymiarowej mają skomplikowane kształty. Mogą wielokrotnie otaczać dużą liczbę krawędzi. Przenosząc metodę prądów oczkowych na grunt numerycznych metod analizy pola należy oczko układu uzwojeń zastąpić zbiorem oczek otaczających krawędzie. Można przy tym zastosować metodę przedstawioną w pracy [16]. Po zastosowaniu tej metody rozkład uzwojeń opisuje się za pomocą macierzy z_0 . Wyraz i -tej kolumny i j -tego wiersza tej macierzy opisuje liczbę zwojów i -tego oczka układu uzwojeń otaczających j -tą krawędź. Iloczyn j -tego wiersza macierzy z_0 i wektora i_{oc} prądów oczek układu uzwojeń odpowiada całce liniowej z wektora T wzdłuż j -krawędzi siatki dyskretyzującej. Na podstawie macierzy z_0 można więc utworzyć wyrażenia opisujące gałęziowe s_{mm} w siatce reluktancyjnej i permeancyjnej – rys. 4 i 5. Macierz z_0 służy także do wyznaczania strumieni skojarzonych z oczkami układu uzwojeń. Wektor ψ tych strumieni jest równy iloczynowi transponowanej macierzy z_0 i wektora ϕ strumieni przyporządkowanych krawędziom. W metodzie potencjału skalarnego strumienie przyporządkowane krawędziom są równe strumieniom gałęziowym siatki permeancyjnej. W metodzie potencjału wektorowego strumienie przyporządkowane krawędziom odpowiadają strumieniom przenikającym przez oczka siatki, a więc strumieniom, które w równaniach metody A–T, zapisanych w tablicy 4, są reprezentowane przez wyrażenie $k_0^T N_c^T \phi$.

Wcześniej, przy omawianiu równań MES, zauważono, że wymuszenia w metodzie potencjału wektorowego A można określać na podstawie wielkości ściankowych, tj. prądów przenikających przez ścianki elementów. Dla układu z cienkimi przewodami tego typu opis uzyskuje się wyrażając wektor i_s prądów przenikających przez ścianki za pomocą iloczynu macierzy z_s liczb przewodów obwodów uzwojeń przechodzących przez ścianki i wektora i_{oc} prądów tych obwodów. Wyraz i -tej kolumny i j -tego wiersza macierzy z_s opisuje liczbę przewodów i -tego obwodu układu uzwojeń przechodzących przez j -tą ściankę [17]. Znak tej liczby odpowiada znakowi iloczynu skalarnego wektora powierzchni ścianki i wektora gęstości prądu obwodowego. Na podstawie transponowanej macierzy z_s i wektora ϕ strumieni oczkowych można wyznaczyć strumienie skojarzone z obwodami układu uzwojeń. Wyrażenie opisujące te strumienie jest równe $z_s^T N_c^T \phi$.

W tablicy 5 przedstawiono równania MES uzyskane po zastosowaniu omówionych metod opisu uzwojeń o cienkich przewodach i wykorzystaniu ogólnych postaci równań podanych wcześniej w tablicy 4. Przy formułowaniu równań opisujących rozptył prądów oczkowych i_{oc} uwzględniono, że w obwodach z tymi prądami występują „zewnętrzne” źródła napięciowe.

Podane w tablicy 5 równania można uzupełnić równaniami oczkowymi obwodów zewnętrznymi, np. obwodów układu zasilającego [17, 18, 24].

3.2. Masywne elementy rdzenia i uzwojenia prętowe

Przedstawione wyżej modele układu z uzwojeniami o cienkich przewodach są reprezentantami ujęć wykorzystujących wektorowy potencjał elektryczny T . Metodę potencjału T można także zastosować do analizy układu z masywnymi elementami przewodzącymi i uzwojeniami prętowymi, w któ-

rych występują prądy wirowe. Przy stosowaniu tej metody rozptyw prądów w masywnych przewodach wyraża się za pomocą prądów oczkowych i_o w rezystancyjnym modelu (SRE) uzwojeń. Wyodrębnią się przy tym dwie grupy oczek: (a) oczka z prądami i_o wokół krawędzi, które można traktować jako oczka prądów wirowych i (b) oczka przyporządkowane obwodom układu uzwojeń, w których mogą występować sem źródeł „zewnętrznych”. Oczka (b) można opisać za pomocą macierzy z_o , uformowanej podobnie jak dla uzwojeń o cienkich przewodach. Po uwzględnieniu, że dla oczek (a) macierz z_o jest macierzą jednostkową, przedstawione w tablicy 5 równania (dla metod wykorzystujących tę macierz) można zastosować do opisu rozkładu pola i rozptywu prądów w układzie z masywnymi przewodami. W przypadku uzwojeń prętowych równania opisujące prądy i_{oc} dotyczą zarówno oczek przyporządkowanych obwodom układu uzwojeń, jak i oczek z prądami wirowymi. Jeśli obszar ze środowiskiem przewodzącym obejmuje masywne elementy rdzenia i jest spójny, to w SRE występują tylko oczka z prądami wirowymi. Równania MES przyjmują postać podanych w tablicy 4 równań dla metod wykorzystujących potencjał T.

Tablica 5

Równania opisujące rozkład pola i równania napięciowe układu uzwojeń o cienkich przewodach

| Metoda | Opis uzwojeń | Równania | Oznaczenia |
|-------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ω -T | Macierz z_o liczb „oczek” wokół krawędzi | $\begin{bmatrix} k_w^T \Lambda_g k_w & k_w^T \Lambda_g z_o \\ p z_o^T \Lambda_g k_w & R_o + p z_o^T \Lambda_g z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i_{oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{oc} \end{bmatrix}$ | i_{oc} – wektor prądów oczkowych układu uzwojeń; R_o – macierz rezystancji oczkowych; e_{oc} – wektor oczkowych sem źródeł „zewnętrznych”; |
| A-T | Macierz z_o liczb „oczek” wokół krawędzi | $\begin{bmatrix} k_o^T R_{\mu g} k_o & -N_c k_o z_o \\ z_o^T k_o^T N_c^T p & R_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ i_{oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{oc} \end{bmatrix}$ | pozostałe oznaczenia jak w tablicy 4. |
| | Macierz z_s liczb przewodów przechodzących przez ścianki | $\begin{bmatrix} k_o^T R_{\mu g} k_o & -N_c z_s \\ z_s^T N_c^T p & R_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ i_{oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{oc} \end{bmatrix}$ | |

Wadą metod wykorzystujących potencjał wektorowy T jest mała dokładność odwzorowania prądów wirowych w otoczeniu powierzchni brzegowej masywnych przewodów. Pod tym względem dokładniejsza jest metoda wykorzystując potencjał skalarny V, a więc metoda, której obwodowym reprezentantem jest siatka konduktancyjna. O większej dokładności tej metody można się przekonać rozpatrzywszy układ ze środowiskiem przewodzącym zawartym w obrębie tylko jednego elementu. W modelu rezystancyjnym tego układu (rys. 5) wszystkie oczka są „otwarte”, a więc na modelu tego typu nie odzworuje się prądów wirowych w pojedynczym elemencie. Model konduktancyjny układu zawiera oczka „zamknięte” (rys. 6). Na podstawie prądów w tym modelu można utworzyć liniową funkcję interpolującą rozkład gęstości prądów w elemencie.

Metodę potencjału skalarnego V stosuje się łącznie z metodą potencjału wektorowego A. Równania opisujące rozkład pola magnetycznego i rozkład pola przepływowego prądu mają więc postać równań przedstawionych w tablicy 4 dla metody A-V. Wymuszenia napięciowe odwzorowuje się zadając potencjał V powierzchni brzegowych prętów [15]. Do równań opisujących rozkład potencjałów elektrycznych można także dołączyć równania obwodów zewnętrznych. W ten sposób powstaje się tworząc dwuwymiarowy model uzwojenia klatkowego. Zakłada się, że końce prętów są ekwipotencjalne i uwzględnia się, że w węzłach przyporządkowanym tym końcom schodzą się gałęzie odwzorowujące pręt i dwa wycinki pierścieni zwierających. W niektórych pracach przyjmuje się, że reprezentantem uzwojenia klatkowego jest układ o zerowej impedancji wycinków pierścieni i zmodyfikowanej konduktywności materiału prętów [15]. W przypadku układów symetrycznych uzyskuje się model o zerowych napięciach na prętach (zerowych potencjałach wszystkich węzłów siatki konduktancyjnej) i niezerowych sem tylko w gałęziach przyporządkowanych krawędziom równoległym do osi z. W celu wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego i rozptywu prądów w prętach tego modelu wystarczy rozwiązać tylko te równania układu podanego w tablicy 4, które opisują wielkości krawędziowe φ . Rozkład gęstości prądów w prętach wyznacza się na podstawie prądów i_o w gałęziach ekwiwalentnego modelu konduktancyjnego. Uwzględnia się przy tym, że $i_g = -G_o p \varphi$.

Do analizy maszyn elektrycznych, w których występują zarówno uzwojenia o cienkich przewodach, jak i elementy z prądami wirowymi, np. uzwojenia prętowe, najkorzystniej jest stosować metodę wykorzystującą magnetyczny potencjał wektorowy A i potencjały elektryczne: wektorowy T w obszarze z cienkimi przewodami oraz skalarny V w obszarze z prądami wirowymi (metoda A-T,V).

Takie podejście stosuje się w pracach wykorzystujących do analizy maszyn zarówno modele dwuwymiarowe, jak i trójwymiarowe. Na przykład, w pracy [18] metodę A-T,V zastosowano do trójwymiarowej analizy zjawisk w silniku magnetoelektrycznym z uwzględnieniem prądów wirowych w magnesach trwałych.

4. SYMULACJA RUCHU ŚRODOWISK

Odwzorowanie ruchu jest jednym z najtrudniejszych zadań w polowej analizie maszyn elektrycznych. Dotyczy to przede wszystkim ruchu o zmiennej prędkości obrotowej w stanach elektromechanicznie niestabilnych. Prezentowane w literaturze metody symulacji ruchu można podzielić na dwie grupy: (a) metody o nieruchomej siatce dyskretyzującej i środowiskach przemieszczających się względem siatki i (b) metody o ruchomej siatce dyskretyzującej obszar wirnika [15, 34, 50].

4.1. Modele o nieruchomej siatce

W klasycznych ujęciach do opisu ruchu środowisk zwykle wykorzystuje się transformację Galileusza. Przyjmuje się, że środowiska ruchome przemieszczają się względem nieruchomego układu współrzędnych, a położenie punktów obszaru ze środowiskami ruchomymi opisuje się w nieruchomym układzie współrzędnych. Na podstawie takiego opisu ruchu otrzymuje się modele dyskretne o nieruchomej siatce dyskretyzującej i środowiskach przemieszczających się względem siatki. W tego typu modelach siatka powinna być tak uformowana, aby dla wszystkich rozpatrywanych położzeń spełniony był warunek mówiący o jednorodności środowiska w elementach. Tylko w szczególnych przypadkach spełnienie tego warunku nie wymaga bardzo gęstej dyskretyzacji obszaru wirnika lub nie wiąże się z koniecznością ograniczenia liczby położzeń. W związku z tym modele o siatce ruchomej stosowane są przede wszystkim do symulacji przemieszczeń obszarów ze środowiskiem jednorodnym w kierunku ruchu, np. do analizy silników kubkowych, silników o masywnym wirniku, silników liniowych o jednorodnym biegniku [15]. Modele o siatce nieruchomej wykorzystywane są także do dwuwymiarowej analizy maszyn indukcyjnych klatkowych [15, 29, 50]. W obliczeniach pojawiają się zjawiska związane z ułobkowaniem wirnika.

Stosując metodę o nieruchomej siatce należy uwzględnić, że siły elektromotoryczne w modelach konduktancyjnych i rezystancyjnych obszaru z prądami przewodnictwa zawierają składnik reprezentujący sem rotacji. Na przykład, jeśli do rozwiązywania równań MES dla sformułowania A-V stosuje się metodę kroków czasowych i schemat Cranka-Nicholsona, to wyrażenie opisujące dla chwili $t=t_n$ sem $e_{i,j} = -p_{i,j}$ w gałęzi SK, przyporządkowanej nieruchomej krawędzi $P_i P_j$, należy wyznaczyć z formuły różnicowej

$$\frac{1}{2}(p_{\varphi_{i,j}})_{t=t_n} + \frac{1}{2}(p_{\varphi_{p,q}})_{t=t_{n-1}} = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} [\varphi_{i,j}(t=t_n) - \varphi_{p,q}(t=t_{n-1})], \quad (4)$$

w której $\varphi_{p,q}$ jest wartością krawędziową potencjału A dla odcinka łączącego punkty P_p, P_q odległe od punktów P_i, P_j o kąt $\Delta\alpha_n$ obrotu wirnika w czasie $t_n - t_{n-1}$, np. jeśli w cylindrycznym układzie współrzędnych r, z, ψ , $P_i = P(r_i, z_i, \psi_i)$, to $P_p = P(r_i, z_i, \psi_i - \Delta\alpha_n)$. W formule (4) wartość krawędziowa $\varphi_{p,q}$ i pochodna $p_{\varphi_{p,q}}$ odnoszą się do chwili $t=t_{n-1}$ o znanym rozwiązaniu i można je wyznaczyć metodami interpolacyjnymi. W szczególnym przypadku, przy rozpatrywaniu ruchu o stałej prędkości, długość kroku czasowego $t_n - t_{n-1}$ można tak dobrać, że odcinek $P_p P_q$ będzie się pokrywał z krawędzią siatki.

W dwuwymiarowej analizie maszyn indukcyjnych klatkowych często jest stosowana metoda zespolonego potencjału magnetycznego [50]. W metodzie tej wektor zespolonych sem gałęziowych SK opisany jest wyrażeniem $\underline{g} = -j\omega s \underline{g}$, w którym s jest poślizgiem, a \underline{g} wektorem zespolonych wartości krawędziowych. Metoda dotyczy tylko stanów elektromechanicznie ustalonych i nie ujmuje zjawisk związanych z występowaniem wyższych harmonicznym w prądach uzwojenia klatkowego.

4.2. Modele o ruchomej siatce

Modele o nieruchomej siatce są mało uniwersalne. Szersze zastosowanie mają modele o siatce ruchomej. W tego typu modelach rozpatrywany obszar dzieli się na część nieruchomą i część ru-

chomą. W maszynach elektrycznych o strukturze walcowej część nieruchoma przyporządkowana jest stojanowi, a ruchoma wirnikowi. Pomiedzy tymi częściami buduje się pasmo powiązań wzajemnych. Różnica pomiedzy prezentowanymi w literaturze modelami o siatce ruchomej dotyczą przede wszystkim sposobu tworzenia pasma i formułowania równań powiązań w paśmie. Wyodrębnić można następujące metody realizacji powiązań pomiedzy obszarem ruchomym a nieruchomym:

- ujęcie polegające na odwzorowaniu powiązań w paśmie metodą elementów brzegowych (rzadko stosowane w praktyce),
- metodę, w której pasmo jest jednym elementem, makroelementem szczelinowym (do tej pory stosowana tylko w modelach dwuwymiarowych) [44],
- metodę powierzchni ślizgowej, w której pasmo jest sprowadzone do powierzchni powiązań wzajemnych, wszystkie ścianki elementów przyporządkowane tej powierzchni mają jednakową szerokość kątową $\Delta\alpha$ w kierunku ruchu (rozpatrywane są tylko położenia odległe od siebie $\Delta\alpha$ i w związku z tym metoda jest stosowana głównie do analizy stanów elektromechanicznie ustalonych),
- metodę z pasmem o jednorodnych elementach, odkształcanych w wyniku przesunięcia wirnika i zmienianej strukturze połączeń elementów, gdy są one nadmiernie odkształcone (metoda bardzo często stosowana zarówno do analizy pól dwu-, jak i trójwymiarowych, w pracach polskojęzycznych nazywana metodą odkształcanych elementów – MOE) [15, 17, 47],
- metodę nachodzących elementów, w której dla każdego położenia formowana jest nowa siatka „optymalnie” dyskretyzująca pasmo (znane zastosowania tej metody dotyczą analizy dwuwymiarowej, pasmo dzielone jest na elementy bikwadratowe, elementy mogą być niejednorodne),
- metodę z pasmem o jednorodnych elementach, w której macierz powiązań dla pasma jest opisana wielomianem interpolacyjnym opartym na zadanych wartościach macierzy strukturalnej dla wybranych położzeń wirnika (pasmowa metoda interpolacyjna) [14, 15].

W większości wymienionych metod zmiany położenia wirnika wiążą się ze zmianami podmacierzy reluktancji oczkowych $k_o^T R_{\mu g} k_o$, odnoszącej się do pasma. Na przykład, w MEO w wyniku odkształcania elementów zmieniają się reluktancje gałęziowe obwodowych modeli elementów pasma, a gdy odkształcenia są nadmierne zmienia się macierz oczkowa k_o . W metodzie nachodzących elementów także zmieniają się zarówno macierz reluktancji gałęziowych, jak i macierz oczkowa. W metodzie powierzchni ślizgowej „skokowo” zmienia się tylko macierz oczkowa k_o . W pasmowej metodzie interpolacyjnej macierz k_o opisuje się za pomocą trygonometrycznego wielomianu interpolacyjnego opartego na danych, którymi są macierze oczkowe dla położzeń odległych od siebie o kątową długość krawędzi elementów, równoległych do kierunku ruchu (w paśmie o jednorodnych elementach długość tych krawędzi jest jednakowa).

Najmniej czasochłonny jest algorytm obliczeniowy wykorzystujący MEO. Wadą tej metody jest nieciągłość pochodnej macierzy reluktancji pasma względem kąta opisującego położenie wirnika. W związku z tym w uzyskiwanych przebiegach sem rotacji i wielkości zależnych od tej sem pojawiają się „szumy”. Tę samą wadę ma metoda nachodzących elementów. Szumy można zmniejszyć zagęszczając siatkę dyskretyzującą. W celu uniknięcia szumów należy stosować metodę makroelementu szczelinowego lub pasmową metodę interpolacyjną. Z uwagi na bardzo gęstą macierz reluktancji pasma algorytmy obliczeniowe wykorzystujące te metody są czasochłonne.

5. OBLICZANIE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Jedną z najważniejszych zalet polowych metod analizy maszyn elektrycznych jest możliwość dokładniejszego niż w ujęciach klasycznych wyznaczania momentu elektromagnetycznego. Formuły opisujące moment elektromagnetyczny na podstawie rozkładu pola elektromagnetycznego można podzielić na dwie grupy: (a) formuły wyrażające moment za pomocą jego gęstości objętościowej, (b) formuły wykorzystujące tensor naprężeń powierzchniowych. W literaturze zwykle prezentowane są wzory opisujące moment na podstawie zadanego rozkładu indukcji magnetycznej, np. wzór wykorzystujący tensor naprężeń Maxwella [1, 23, 28]. Stosując te wzory należy indukcję wyrazić za pomocą wykorzystywanego potencjału. Korzystniej jest jednak posługiwać się wzorami, w których objętościowa gęstość momentu czy naprężenia są wyrażone bezpośrednio za pomocą zadanych potencjałów – tablica 6. Różnice pomiedzy podanymi w tablicy wzorami można sobie uzmysłowić na gruncie teorii obwodów, rozpatrując różne, dające ten sam wynik, metody obliczania

mocy dostarczonej do obwodu elektrycznego. Na przykład, przy analizie obwodu metodą prądów oczkowych, obliczając chwilową wartość mocy dostarczonej do zadanej jego części, można: (a) najpierw na podstawie prądów oczkowych obliczyć prądy gałęziowe i następnie sumować iloczyny sem i prądów gałęziowych lub (b) sumować iloczyny prądów i sem oczkowych. W obu metodach sumowanie dotyczy tylko gałęzi i oczek zadanej części obwodu. Metody te odpowiadają podejściu polegającemu na obliczaniu momentu na podstawie jego objętościowej gęstości dla pola opisanego potencjałem A . Metoda (a) dotyczy wzoru, w którym indukcję traktuje się jako daną, wyznaczaną z zależności $B = \text{rot } A$, a metoda (b) wzoru opisującego moment bezpośrednio na podstawie potencjału A . Moc dostarczoną do zadanej części obwodu można wyznaczyć także na podstawie prądów i napięć w gałęziach lub oczkach otaczających tę część. Takim методом obliczania mocy odpowiada podejście polegające na wyznaczaniu momentu na podstawie naprężeń powierzchniowych.

Tabela 6

Formuły opisujące moment elektromagnetyczny na podstawie wielkości połowych wyrażonych w cylindrycznym układzie współrzędnych r, ψ, z

| Dane | Całka z objętościowej gęstości momentu | Całka z tensora naprężeń powierzchniowych | Opis oznaczeń i uwagi |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Indukcja B | $\iiint_{V_w} r a_\psi \mu_0^{-1} [(\text{rot} B) \times B] dV$ | $\iint_{S_w} r \mu_0^{-1} (B B_\psi - a_\psi 0,5 B^2) dS$ | a_ψ – wektor jednostkowy w kierunku osi ψ , V_w – objętość wimika, S_w – powierzchnia otaczająca wirnik; |
| Potencjał Ω | $\iiint_{V_w} (\partial \Omega / \partial \psi) \text{div}(\mu_0 \text{grad} \Omega) dV$ | $\iint_{S_w} \mu_0 [(\partial \Omega / \partial \psi) \text{grad} \Omega - r a_\psi 0,5 (\text{grad} \Omega)^2] dS$ | nik; $\mu_0^{-1} \text{rot} B = J_A + J$ J_A – gęstość prądów Ampera |
| Potencjał A | $\iiint_{V_w} (\partial A / \partial \psi) \text{rot}(\mu_0^{-1} \text{rot} A) dV$ | $\iint_{S_w} \mu_0^{-1} \{(\text{rot} A) \times (\partial A / \partial \psi) + r a_\psi 0,5 (\text{rot} A)^2\} dS$ | |

Najprostszym sposobem obliczania momentu na podstawie rozkładu pola wyznaczonego metodą elementów skończonych polega na zastąpieniu podanych w tablicy 6 całek sumami skończonymi i wyrażeniu składników podcałkowych za pomocą obliczonych wielkości połowych. Takie postępowanie może jednak prowadzić do niedokładnych wyników, na co zwrócono uwagę już w pierwszych pracach poświęconych obliczaniu momentu na modelach dyskretnych.

Z badań nad numerycznymi metodami obliczania momentu wynika, że w celu uzyskania jak najdokładniejszych wyników należy stosować siatkę o jednorodnych elementach w kierunku współrzędnej ψ , a więc w kierunku ruchu wirnika. Procedury obliczania momentu korzystnie jest dostosowywać do wykorzystywanej metody odwzorowywania ruchu, a formuły opisujące moment wyznaczać bezpośrednio z zasady prac wirtualnych. W przypadku modeli o siatce nieruchomej po rozpatrzeniu wirtualnych przesunięć obszarów z prądami przewodnictwa i prądami magnetyzacji względem siatki otrzymuje się formuły, która są numerycznymi reprezentantami wzorów opisujących moment na podstawie jego objętościowej gęstości przy zadanych potencjałach. W modelach o siatce ruchomej rozpatruje się wirtualne przesunięcia siatki dyskretyzującej obszar wirnika względem siatki dyskretyzującej obszar stojana. W wyniku takiego przesunięcia zmienia się tylko energia magnetyczna zmagazynowana w paśmie przejściowym. W rezultacie otrzymuje się formuły, które są numeryczną reprezentacją całki z tensora naprężeń po powierzchni przechodzącej przez obszar pasma. Dla ujęć wykorzystujących wektorowy potencjał magnetyczny formuły te wynikają z następującej formy kwadratowej:

$$T = -0,5 \varphi_p^T \left(\frac{d}{d\alpha} R_{\mu p} \right) \varphi_p \quad (5)$$

gdzie: $R_{\mu p}$ - jest macierzą składników reluktancji oczkowych, a φ_p wektorem krawędziowych wartości potencjału A (strumieni oczkowych) dla pasma.

Z przedstawionej zależności wynika, że w celu uzyskania jednoznacznych wyników macierzy reluktancji powinna być ciągłą funkcją kąta opisującego położenie wirnika. Nie gwarantują tego najczęściej stosowane w praktyce metody symulacji ruchu, np. metoda odształcanych elementów. W przypadku stosowania tych metod korzystnie jest się posługiwać różnicową formą opisu pochodnej reluktancji [12, 17]. Z punktu widzenia dokładności obliczeń istotne jest, aby elementy pasma, do którego odnosi się relacja (5), były jednorodne.

6. PODSUMOWANIE

Pomimo że przedstawiono już przykłady rozwiązywania trójwymiarowych polowych modeli maszyn elektrycznych łącznie z równaniami układów zasilających i równaniem równowagi mechanicznej, to ciągle prace nad trójwymiarową analizą maszyn elektrycznych z uwzględnieniem typowych dla nich wymuszeń i ruchu należą do studialnych. Poszukiwane są skuteczne metody odwzorowania na modelach dyskretnych skosu zębów i połączeń czołowych. Trwają badania nad metodami generacji trójwymiarowej siatki dyskretyzującej. Nie opracowano jeszcze modeli ujmujących zjawiska związane z występowaniem prądów w rdzeniu pomiędzy prętami klatki oraz prądów błądzących w łożyskach maszyn elektrycznych. W początkowej fazie są badania nad analizą zagadnień sprzężonych opisanych równaniami pola elektromagnetycznego i pola naprężeń mechanicznych oraz pola temperaturowego, w tym badania dotyczące naciągu magnetycznego w układach z polem trójwymiarowym oraz prace związane z poszukiwaniem rozkładu sił lokalnych i naprężeń mechanicznych [51]. Na rozwiązanie czekają zadania analizy stanów dynamicznych układów o więcej niż jednym stopniu swobody mechanicznej.

W ostatnich latach komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego są wykorzystywane powszechnie w obliczeniach symulacyjnych i projektowych maszyn magnetoelektrycznych. Prace z tego zakresu należą do jednych z najliczniej prezentowanych w literaturze. Rozpatrywane są układy o złożonej strukturze obwodu magnetycznego i układy z magnesami trwałymi o odpowiednio kształtowanym rozkładzie wektora namagnesowania. Poszukiwane są skuteczne algorytmy projektowania i optymalizacji obwodów magnetycznych tych maszyn w ujęciu polowym. Ostatnie prace koncentrują się na zagadnieniach związanych z implementacją algorytmów genetycznych.

Coraz częściej modele polowe są stosowane do symulacji stanów pracy maszyn elektrycznych zasilanych z układów przekształtnikowych. Opracowywane są programy komputerowe do rozwiązywania równań modeli polowo-obwodowych łącznie z równaniami układów przekształtnikowych i równaniami opisującymi układy sterujące. Wyniki obliczeń są wykorzystywane do pogłębionej analizy strat w rdzeniu, strat wiroprądowych w uzwojeniach i w magnesach trwałych. Rozpatrywane są możliwości zastosowania modeli polowych w projektowaniu układów sterujących oraz nowe strategie sterowania, wykorzystujące modele polowe [5, 21].

Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego są bardzo pomocne w obliczeniach przetworników elektromechanicznych o nietyposwej strukturze, np. silników o biegunach kłowych, silników tarczowych i liniowych, przetworników acyklicznych o strukturze tubowej. Do wyznaczania rozkładu pola w tych przetwornikach można stosować komercyjne systemy obliczeniowe, których zaletą jest uniwersalność. Konsekwencją nadmiernej uniwersalności oprogramowania jest duża zasobochłonność prac nad odwzorowaniem struktury przetwornika i uformowaniem siatki dyskretyzującej. W związku z tym przewiduje się, że w przyszłości stosowane będą systemy obliczeniowe specjalizowane, dostosowane do określonego typu maszyny, systemy z automatyczną generacją siatki dyskretyzującej. Prace przygotowawcze ograniczą się wówczas tylko do wprowadzenia danych opisujących wymiary maszyny, układ zasilający i obciążenie oraz parametry materiałowe.

W pracach nad rozwojem polowych metod analizy maszyn elektrycznych znaczący udział mają Polacy [46]. Osiągnięcia związane z opracowywaniem, doskonaleniem i stosowaniem tych metod ma większość polskich ośrodków uniwersyteckich i naukowo-badawczych zajmujących się teorią i projektowaniem maszyn elektrycznych.

LITERATURA

1. Arkkio A.: Time stepping finite element analysis of induction motor, ICEM 1988 Proceedings, International Conference on Electrical Machines, Piza, 1988, pp. 275+280.
2. Bins K.J., Lawreson P.J., Trowbridge C.W.: The Analytical and Numerical Solutions of Electric and Magnetic Fields, John Wiley & Sons, Chichester 1992.
3. Biro O., Preis K., Richter K.: On the use of magnetic vector potential in the nodal and edge element analysis of 3d magnetostatic problems, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 32, No. 3, 1996, pp. 651+54.
4. Boukari, Lefevre Y, Spitéri P.: Modelling the movement of electrostatic motors in a 3D finite element code, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 722+27.

5. Brulė S., Tounzi A.: Comparison between FEM and the Park's models to study the control of an induction machine, ICEM 2000 Proceedings, Vol. 1, Helsinki, 2000, pp.548-552.
6. Boboř S.A., Kudła J., Źywiec A.: Parametry elektromagnetyczne maszyny synchronicznej. Wykorzystanie metody elementoów skończonych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.
7. Bossavit A., Verite J.C.: The TRIFOUcode: solving the 3-D FEM-BIEM eddy current by using h as state variable problems. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, No. 6, 1983, pp. 2465-70.
8. Bossavit A.: Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementarily, Edge Elements, San Diego Academic Press, San Diego 1998.
9. Erdelyi E.A., Fush E.F.: Nonlinear magnetic field analysis of D.C. machines, Theoretical fundamentals, Application of improved treatment, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 89, No. 4, 1970, pp. 1546-64.
10. Dąbrowski M.: Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych, WNT, Warszawa 1971.
11. Demenko A.: Modelowanie dyfuzji pola elektromagnetycznego w przetwornikach elektromechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy, Nr 162, Poznań 1985.
12. Demenko A.: Equivalent RC networks with mutual capacitances for electromagnetic field simulation of electrical machine transients, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, 1992, pp. 1406-09.
13. Demenko A.: Time-stepping FE analysis of electric motor drives with semiconductor converters, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, 1994, pp. 3264-67.
14. Demenko A.: Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1553-56.
15. Demenko A.: Symulacja dynamicznych stanów pracy maszyn elektrycznych w ujęciu polowym, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
16. Demenko A.: Nowak L., Szelaę W.: Reluctance network formed by means of edge element method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 5, 1998, pp. 2485-88.
17. Demenko A.: 3D edge element analysis of permanent magnet motor dynamics, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 5, 1998, pp. 3620-23.
18. Demenko A., Pietrowski W.: 3D finite element analysis of electromechanical transients in a brushless motor with conductive permanent magnets, Proceedings of Compumag'99, Vol.1 Sapporo, 1999, pp. 90-91.
19. Demenko A.: Three dimensional eddy current calculation using reluctance-conductance network formed by means of FE method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 741-45.
20. Dems M.: Symulacja komputerowa przebiegów elektromechanicznych w silnikach indukcyjnych klatkowych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Rozprawy Naukowe, Z. 229, Łódź 1996.
21. Di Napoli A., Santini E.: FEM identification of parameters of vector control of induction motors, ICEM 2000 Proceedings, Vol.1, Helsinki, 2000, pp. 71-75.
22. Dular P., Hody J., Nicolet A., Genon A., Legros W.: Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexahedra and prisms, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, 1994, pp. 2980-83.
23. Kawase Y., Yamaguchi T., Hayashi Y.: Analysis of cogging torque of permanent magnet motor by 3-d finite element method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, 1995, pp. 2044-47.
24. Kawase Y., Hayashi Y., Yamaguchi T.: 3D finite element analysis of permanent magnet motor excited from square pulse voltage source, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1537-40.
25. Komeęa K.: Modelowanie pól elektromagnetycznych w urządzeniach elektrycznych z zastosowaniem hierarchicznych elementoów skończonych typu hermitowskiego, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Rozprawy Naukowe, Z. 216, Łódź 1995.
26. Liebmann C.: Resistance-network analogues, Journées Internationales du Calcul Analogique, Sept. 55, International Analogy Computation Meeting, Bruksela, 1955, pp. 346-369.
27. Łukaniszyn M.: Modelowanie pól magnetycznych i elektrycznych trójwymiarowych metodą różnic skończonych z wykorzystaniem szybkich procedur obliczeniowych, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Studia i monografie, Z. 41, Opole 1990.
28. Łukaniszyn M., Wróbel R.: Comparison of 2-D and 3-D solutions for magnetic field in brushless disc-type DC motor with permanent magnet, Archives of Electrical Engineering, Vol. XLVIII, No. 190-4/1999, PWN, Warsaw, 2000, pp.375-384
29. Makowski K.: Jednofazowe silniki indukcyjne z pomocniczym uzwojeniem zwartym w ujęciu obwodowo-polowym, Oficyna Wydawnicza Pol. Wrocławskiej, Prace IMNiPE, Nr 51, Wrocław 2000.

30. Nakata T., Takahashi N.: Direct finite element analysis of flux and current distribution under specific conditions, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No. 2, 1982, pp. 325+330.
31. Nowak L.: Optymalizacja acyklicznych przetworników elektromechanicznych z uwzględnieniem stanów dynamicznych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy, Nr 191, Poznań 1988.
32. Nowak L.: Field diffusion in magnetic circuits containing moving conducting parts, *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 72, 1989, pp. 11+18.
33. Nowak L., Kowalski K.: The 3D coupled field-circuit simulation of transients in nonlinear systems, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1078+81.
34. Nowak L.: Modele polowe przetworników elektromechanicznych w stanach nieustalonych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1999.
35. Nowak L., Demenko A.: The 3D Coupled Field-Circuit simulation of transients in converters with conducting solid parts, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 1412+16.
36. Oberretl K.: Zusätzliche Wiberstromverluste in Nutenleitern infolge eindringendem Luftspaltfeld, 1978, *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 60, 1978, pp. 121+127.
37. Ostrowic V.: Dynamics of Saturated Electric Machine, Springer-Verlag, Berlin 1989.
38. Patecki A.: Symulacja quasi-ustalonych zjawisk elektrodynamicznych metodą różnic skończonych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy, Nr 345, Poznań 1999.
39. Sykulski J., Stoll J., Sikora R., Pawluk K., Turowski J., Zakrzewski K.: *Computational Magnetics*, Chapman & Hall, London 1995.
40. Pelikant A., Wiak S.: The influence of rotor pole shape on the static and dynamic characteristics of switched reluctance motor, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1529+32.
41. Piriou F., Razek A.A.: Coupling of saturated electromagnetic system to nonlinear power electronic devices, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, 1988, pp. 274+77.
42. Pochanke A.: Modele obwodowo-polowe pośrednio sprzężone silników bezstykowych z uwzględnieniem zasilania. Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej, Elektryka, z. 110, Warszawa 1999.
43. Rafinejad P., Sabonnadiere, J.C.: Finite element computer programs in design of electromagnetic devices, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 12, No. 4, 1976, pp. 575+78.
44. Razek A.A., Coulomb J.L., Feliach M., Sobonnardiere J.C.: Conception of an air gap element for the dynamic analysis of electromagnetic field in electric machines, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No. 2, 1982, pp. 655+59.
45. Silvester P., Chari M.V.K.: Finite element solution of saturable magnetic field problems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 89, No. 4, 1970, pp. 1642+51.
46. Sykulski J.K., Krawczyk A., Wiak S.: Computational electromagnetics in Poland: a review, *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 17, No. 4, 1998, pp. 427+438.
47. Szeląg W.: Analiza stanów pracy i synteza silników synchronicznych magnetoelektrycznych, ujęcie polowe, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy, Nr 331, Poznań 1998.
48. Turowski J., Turowski M., Kopec M.: Method of 3-dimensional network solution of leakage flux of 3-phase transformer, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 26, No. 5, 1990, pp. 2911+19.
49. Wiak S.: Analiza pól elektromagnetycznych niestacjonarnych metodą różnic skończonych w obwodach magnetycznych maszyn elektrycznych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Rozprawy Naukowe, Z. 125, Łódź 1989.
50. Williamson S.: Induction motor modelling using finite elements, *ICEM 1994 Proceedings, International Conference on Electrical Machines*, Paryż, Vol. 1, 1994, pp. 1+8.
51. Witczak P.: Wyznaczanie drgań mechanicznych silnika indukcyjnego wywołanych siłami magnetycznymi, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Rozprawy Naukowe, Z. 217, Łódź 1995.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Władysław Paszek

Abstract

Section 1 presents shortly the history of the numerical methods of electromagnetic field calculations in electrical machines. It has been noticed that there are two main categories of the field methods of electrical machine analysis: (a) the methods based on the classical equivalent schemes with the FE calculation of the scheme parameters, (b) the approaches based on the simultaneous solving of FE equations, mechanical equation and the equations that define the winding connections. Attention is paid to the methods (b). The scalar and vector potential formulations are considered – see (3) and Tables 1, 2. It has been shown that the edge value of electric vector potential T represents the magnetomotive force in the permeance network model of a magnetic circuit – Fig. 1. In the presented FE method the interpolation functions of node elements are applied to describe the distribution of scalar potentials. The vector potentials are expressed using the interpolation functions of edge elements. Moreover, the interpolation functions of facet elements are used to define the flux and current density. Thus, the finite element is assumed to be a nodal, edge, and facet element – Fig. 2. The geometric forms that represent nodal, faced and edge functions for prism are shown in Fig. 3. The equations of the presented FE method are given in Table 3.

The network equivalents of FEM are discussed. There are two types of models associated with the finite element: (a) edge model (MKE) – Fig. 4 and (b) faced model (MSE) – Fig. 5. Nodal equations for MKE are equivalent to FE equations that describe the scalar potentials Ω , V and loop equations for MSE are analogous to the equations, which describe the edge values of vector potentials A , T . These edge values are represented by the loop fluxes φ and loop currents I_o in MSE – see Fig. 6. The networks in Figs. 4, 6a represent a permeance networks (SP) for the magnetic field and a conductance network (SK) for the electric field. The networks from Figs. 5, 6b refer to reluctance networks (SRM) and resistance network (SRE). Models for the electromagnetic field are constructed by coupling (via source) magnetic and electric networks. In the case of 2D field the edge element equations can be transformed in the equations of classical FE method for vector potential formulation – see Fig. 7.

Section 3 presents the voltage equations of the machine windings. First, the windings with filamentary conductors are considered. The currents in these windings have been expressed by loop currents I_{oc} . The loops with currents I_{oc} may be defined using: (a) matrix z_o which describes the numbers of loops around the edges or (b) matrix z_s that describes the numbers of intersections of the element facets with loops. In Table 5 the FE equations and the loop equations of winding are given. The method of loop currents can also be used in the analysis of systems with solid conductors. However, in the case of winding with solid conductors, e.g. squirrel-cage winding, it is advantageous to apply the method of nodal potentials, and to form the field model using A – V approach.

The methods of movement simulation in the FE analysis of electrical machines are discussed in Section 4. The methods have been divided into 2 categories: (a) the techniques with the fixed grid independent of rotor position (FG) and (b) the techniques with the moving grid in the rotor region (MG). The FG techniques can be successfully applied to the analysis of systems with homogenous rotor. In the case of application of these techniques special attention should be paid to the numerical representation of time derivatives that describe the electromotive forces – see (4). The MG techniques are more universal. The most popular MG methods have been presented in Section 4.2.

The FE methods of electromagnetic torque calculation are described in Section 5. The formulas that describe the electromagnetic torque are divided into 6 categories – see Table 6. The author advises to form the algorithm of torque calculation on the basis of virtual work principle with virtual displacement that conforms to the applied method of movement simulation. The approach gives (5) in the case of the moving band method. Finally, the paper presents the subjects of the recent works that are related to the field methods in the electrical machine analysis.