

Lech NOWAK<sup>1)</sup>, Andrzej DEMENKO<sup>2)</sup>, Wojciech SZELAĞ<sup>3)</sup>, Patric DULAR<sup>4)</sup>

## STANY PRZEJŚCIOWE W TRANSFORMATORZE TRÓJFAZOWYM NA PODSTAWIE TRÓJWYMIAROWEGO POLOWEGO MODELU ZJAWISK ELEKTROMAGNETYCZNYCH

**Streszczenie.** W stanach przejściowych występujących w trójkolumnowym transformatorze trójfazowym składowe aperiodyczne strumieni silnie nasycają poszczególne części rdzenia. Składowe te zamykają się ponadto w przestrzeni otaczającej rdzeń i uzwojenia transformatora. Pole w tym obszarze ma charakter trójwymiarowy. Zaproponowano metodę relaksacji blokowej rozwiązywania zagadnień trójwymiarowego pola magnetycznego na bazie metody elementów skończonych. W zaproponowanym algorytmie zadanie trójwymiarowe zdekomponowano, zastępując je iteracyjnym ciągiem zadań quasi-dwuwymiarowych. W analizie stanów przejściowych równania trójwymiarowego pola sprężono z równaniami obwodów transformatora. Wyznaczono przykładowe przebiegi prądów fazowych po załączeniu napięć zasilających - dla różnych wartości napięcia i różnych wartości kąta fazowego.

## TRANSIENTS OF THREE-PHASE, THREE-COLUMN TRANSFORMER ON THE BASIS OF 3D MODEL OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA

**Summary:** The periodic components of the magnetic flux during the transients of a three-phase, three-column transformer cause the saturation of the core parts. The magnetic flux lines close within the space surrounding the core. The field in this region must be considered as three-dimensional. A special block-relaxation algorithm for calculation of the 3D magnetic field has been proposed. The algorithm is based on the finite element method. The 3D global task has been decomposed and substituted with iterative sequence of quasi 2D problems. In the analysis of the transients the equations describing the 3D magnetic field have been conjugated with the equations of the transformer electric circuits. Some exemplary calculations of the transient currents after the application of the system of supply voltages for different values of voltages and their phase angles have been made.

**Key words:** transformers, magnetic field, 3D field, transients

### 1. WPROWADZENIE

Komputerowe narzędzia symulacyjne zapewniają konstruktorowi możliwość weryfikacji pomysłów już na etapie projektowania urządzenia. Symulacja komputerowa wymaga jednak tworzenia dokładnych modeli matematycznych zjawisk zachodzących w projektowanych urządzeniach. Dlatego współcześnie coraz częściej stosuje się matematyczne modele zjawisk elektromagnetycznych, w których parametry przetworników są wyznaczane na podstawie rozkładu pola. W układach charakteryzujących się symetrią płaszczyznową lub symetrią osiową stosuje się dwuwymiarowy opis pola. Także w analizie stanów pracy większości maszyn elektrycznych, jeżeli pominąć skos żłobków, kanały wentylacyjne oraz zjawiska w otoczeniu połączeń czołowych, zazwyczaj wystarczającą dokładność uzyskuje się po zastosowaniu ujęcia dwuwymiarowego. Jednak do symulacji stanów pracy wielu innych urządzeń, takich jak np.: silniki liniowe, maszyny o biegunach kłowych, silniki tarczowe, łożyska magnetyczne, układy separacji magnetycznej, takie podejście nie jest wystarczające. W urządzeniach tych bowiem silnie zaznacza się trójwymiarowość rozkładu pola.

<sup>1)</sup> Dr hab. inż., prof. nadzw., Politechnika Poznańska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań, tel: 061 6652 380, fax: 061 6652 381, e-mail: lech.nowak@put.poznan.pl

<sup>2)</sup> Prof. dr hab. inż., Politechnika Poznańska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań, tel: 061 6652 126, fax: 061 6652 381, e-mail: andrzej.demenko@put.poznan.pl

<sup>3)</sup> Dr hab. inż., Politechnika Poznańska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań, tel: 061 6652 116, fax: 061 6652 381, e-mail: wojciech.szela@put.poznan.pl

<sup>4)</sup> Dr, Universite de Liege, Institut Montefiore, Bat. B28 Parking 32, B-4000 Liege, Belgium, tel: +32 4 366 3710, fax: +32 4 366 2910, e-mail: ptric.dular@ulg.ac.be

Zę względu na stosunkowo prostą strukturę obwodu magnetycznego transformatorów wydaje się, że w analizie ich stanów pracy wystarczającą dokładność można uzyskać stosując model obwodowy lub dwuwymiarowy model połowy. Jednak w przypadku analizy stanów niesymetrycznych lub stanów nieustalonych takie ujęcia mogą prowadzić do znacznych błędów. Szczególnie dotyczy to transformatorów trójfazowych z rdzeniem trójkolumnowym. W stanie przejściowym, występującym np. po załączeniu napięć zasilających, w przebiegach prądów i strumieni występują znaczne składowe aperiodyczne, które wywołują bardzo silne nasycenie części rdzenia. Składowe te oddziałują na siebie i silnie zakłócają symetrię rozkładu pola. Reluktancje kolumn i odcinków jarzmowych różnią się o rzędy wielkości, przy czym ich wzajemne relacje zmieniają się w czasie. W przypadku rdzenia trójkolumnowego jednokierunkowe składowe strumieni zamykają się poprzez przestrzeń otaczającą rdzeń i uzwojenia. Pole w tym obszarze ma charakter trójwymiarowy.

Zaproponowano blokową metodę rozwiązywania trójwymiarowych zagadnień quasi-magnetostatycznych z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES), przy czym do opisu pola magnetycznego wykorzystano potencjał wektorowy. W zaproponowanym algorytmie zadanie trójwymiarowe zdekomponowano, zastępując je iteracyjnym ciągiem zadań quasi-dwuwymiarowych. Dekompozycja odbywa się dwupoziomowo i polega na pozornym oddzieleniu od siebie składowych potencjału wektorowego oraz podziale rozpatrywanego obszaru na „plastry”. Uwzględniono nieliniowe i anizotropowe właściwości rdzenia.

W celu wyznaczenia rozkładu pola w poszczególnych chwilach czasowych konieczna jest znajomość prądów w uzwojeniach. Przebiegi tych prądów nie są jednak znane „a priori”, tj. przed wyznaczeniem rozkładu pola. Konieczne jest więc sprężenie równań trójwymiarowego pola magnetycznego z równaniami obwodów transformatora. Opracowano zatem i poniżej przedstawiono algorytm rozwiązywania sprzężonych równań pola i równań obwodów transformatora (model polowo-obwodowy zjawisk elektromagnetycznych).

## 2. BLOKOWA METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ POLA TRÓJWYMIAROWEGO

Po zastosowaniu modelu polowo-obwodowego rozkład trójwymiarowego pola w środowisku nieliniowym musi być – podczas analizy stanu nieustalonego – wyznaczany setki lub tysiące razy. Dlatego jest ważne opracowanie efektywnej procedury rozwiązywania układu równań pola (układu równań MES), w której wykorzystywany byłby fakt, że w kolejnych krokach czasowych i w kolejnych iteracjach związanych z nieliniowością macierz sztywności zmienia się nieznacznie, a pole jest generowane przez zbliżone do siebie wektory prądów. W zaproponowanym algorytmie zadanie trójwymiarowe zastąpiono iteracyjnym ciągiem zadań quasi-dwuwymiarowych. Proces obliczeniowy obejmuje trzy pętle:

- główną pętlę obliczeniową związaną z dyskretyzacją czasu ( $n = 1, 2, \dots$ );
- nadrzędną procedurę iteracyjną związaną z nieliniowością rozpatrywanego obiektu ( $k = 1, 2, \dots$ );
- podstawową procedurę „iteracji blokowych” wyznaczania składowych  $A_{xi}, A_{yi}, A_{zi}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Metody potencjału wektorowego polegają na podstawieniu  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Poszukiwanie rozkładu pola w środowisku niejednorodnym sprowadza się wówczas do rozwiązywania równania [1,6]:

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \vec{A}) = \vec{J} \quad (1)$$

przy czym:

$\vec{J}$  – wektor gęstości prądu,

$\nu = \mu^{-1}$  - reluktywność środowiska.

Po uwzględnieniu warunku Coulomba  $\text{div } \vec{A} = 0$  składowe wektorowego równania (1) można zapisać następująco:

$$\text{div}(\nu \text{grad } A_u) = -J_u + \text{grad } \nu \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \quad (2)$$

przy czym  $u = x, y, z$ . Pomimo wprowadzenia warunku Coulomba, składowe potencjału w środowisku niejednorodnym pozostają od siebie zależne. W przypadku środowiska cechującego się anizo-

tropią prostokątną [1,7] pojedyncza składowa wektorowego równania (1), np. składowa „x”, ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( v_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -J_x + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_z \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \right). \quad (3)$$

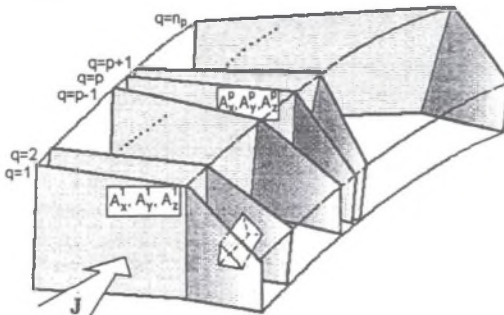
Przestawiając cyklicznie współrzędne oraz indeksy x, y, z, z otrzymuje się pozostałe dwa równania. Trudności związane z oprogramowaniem algorytmu metody elementów skończonych z wykorzystaniem potencjału wektorowego wynikają z dużego zapotrzebowania na pamięć operacyjną. Jeśli bowiem trójwymiarowa siatka dyskretyzująca zawiera  $l_w$  węzłów, to należy rozwiązać układ  $3l_w$  równań zawierający  $3l_w$  niewiadomych [1]. Zwykle liczba niewiadomych jest rzędu kilkuset tysięcy. Dlatego stosuje się metody iteracyjne, w tym także metody z podziałem macierzy sztywności **S** na bloki. W opracowanym algorytmie zastosowano metodę iteracji „warstwami”, którą można zaliczyć do grupy metod relaksacji blokowej [2].

Pierwszy poziom dekompozycji polega na pozornym oddzieleniu od siebie składowych potencjału wektorowego. Wzajemne powiązania pomiędzy składowymi są uwzględniane iteracyjnie - poprzez dodatkowe źródła pola, tj. dodatkowe składniki po prawej stronie układu równań MES, odpowiadające drugiemu i trzeciemu członowi po prawej stronie równania (3). W takim przypadku po lewej stronie równań dotyczących poszczególnych składowych występują tylko wartości węzłowe tych składowych. Macierz globalną stopnia  $3l_w \times 3l_w$  można wstępnie podzielić na 9 następujących bloków, związanych z poszczególnymi składowymi potencjału [3]:

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Podmacierz  $S_{u,w}$  stopnia  $l_w$  opisuje wszystkie sprzężenia pomiędzy wartościami składowych  $A_u$  i  $A_w$  potencjału w węzłach siatki, przy czym:  $w, u = x, y, z$ .

Drugi poziom dekompozycji polega na podziale przestrzeni za pomocą  $n_p$  nie przecinających się powierzchni. Dyskretyzacja na powierzchniach jest przeprowadzana dwuwymiarowo za pomocą elementów trójkątnych. Dwa odpowiadające sobie trójkąty leżące na dwóch sąsiadujących powierzchniach (rys. 1) stanowią podstawy trójkątnej pryzmy, która jest bazowym trójwymiarowym elementem skończonym [3].



Rys. 1. Podział przestrzeni  
Fig. 1. Space division

Każda z podmacierzy  $S_{u,w}$  może być z kolei przedstawiona w postaci zbioru „pod-podmacierzy”  $S_{u,w}^{p,q}$  opisujących sprzężenia pomiędzy składowymi  $A_u$  i  $A_w$  w punktach leżących na p-tej i q-tej

powierzchni, przy czym  $q = p - 1, p, p + 1$ . Jeżeli  $w = u$  oraz  $q = p$ , to  $S_{u,u}^{p,p}$  opisuje „dwuwymiarowy” rozkład  $A_u^p$  składowej  $A_u$  na powierzchni  $p$ -tej.

Spośród  $3l_w$  równań globalnego układu MES można wyodrębnić  $n_u^p$  równań opisujących rozkład składowej  $A_u$  potencjału na  $p$ -tej powierzchni, przy czym  $n_u^p$  jest liczbą węzłów na  $p$ -tej powierzchni, w których nie jest zadany warunek brzegowy Dirichleta dla składowej  $A_u$ . Po przeniesieniu wyrażen zawierających potencjały  $A_w^q$  ( $q \neq p$  lub  $w \neq u$ ) na prawą stronę otrzymuje się układ równań o strukturze odwzorowującej strukturę równania (3):

$$S_{u,u}^{p,p} A_u^p = V_u^p J_u^p - \sum_{q=p-1}^{p+1} \sum_{w=x,y,z} S_{u,w}^{p,q} A_w^q \quad (5)$$

przy czym po prawej stronie, jeżeli  $q = p$ , to  $w \neq u$ . Jest to równanie opisujące dyskretny rozkład składowej  $A_u$  potencjału na  $p$ -tej powierzchni. Wprowadzając (w celu przyspieszenia obliczeń) do układu (5) współczynnik nadrelaksacji [2,3]  $\omega \in (1,2)$ , proces iteracyjny można zapisać następująco:

$$S_{u,u}^{p,p} (A_u^p)_m = V_u^p J_u^p - \sum_{q=p-1}^{p+1} \sum_{w=x,y,z} S_{u,w}^{p,q} \left\{ \omega (A_w^q)_m + (1-\omega) (A_w^q)_{l-1} \right\} \quad (6)$$

przy czym  $m$  oznacza numer iteracji procesu podstawowego, natomiast  $l = m$  lub  $l = m - 1$ . Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (6) reprezentuje źródła pola (prądy)  $u$ -tej składowej na  $p$ -tej powierzchni. Pozostałe wyrazy po prawej stronie tego równania są w  $m$ -tej iteracji znane z iteracji poprzedniej (gdy  $q = p+1$ ) lub z iteracji bieżącej (gdy  $q = p - 1$ ).

Równanie (6) jest rozwiązywane metodą rozkładu macierzy  $S_{u,u}^{p,p}$  na iloczyn macierzy trójkątnych (metodą Cholesky'ego [2,7]). Macierze są rozkładane jeszcze przed rozpoczęciem procesu iteracji blokowej i zapisywane w pamięci w postaci rozłożonego półpasma  $L_{u,u}^{p,p}$ . W jednej iteracji głównej podstawowego procesu iteracyjnego należy rozwiązać  $3n_p$  układów postaci (6).

Zbieżność procesu iteracyjnego w algorytmie relaksacji blokowej zależy w bardzo dużym stopniu od siły powiązań pomiędzy blokami [5]. O zbieżności procesu decyduje zatem sposób podziału macierzy  $S$  na bloki. Podział ten powinien odpowiadać podziałowi rozpatrywanego obszaru na podobszary, w których rozkłady pola są od siebie „mało zależne”. Pożądanym jest podział przestrzeni powierzchniami „możliwie prostopadłymi” do kierunku dominującej składowej potencjału wektorowego, a więc np. powierzchniami prostopadłymi do linii wektora gęstości prądu. Rozkłady potencjałów na poszczególnych powierzchniach są wówczas prawie dwuwymiarowe. W układach zawierających rdzeń składany z wykrojów blach powierzchnie podziału powinny być płaszczyznami równoległymi do blach. Wtedy w obszarze rdzenia dominuje składowa potencjału wektorowego prostopadła do powierzchni blach, a jej rozkład ma charakter prawie dwuwymiarowy.

### 3. ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA SPRĘŻONYCH RÓWNAŃ POLA I RÓWNAŃ OBWODÓW

Załóżmy, że rozpatrywany obwód elektryczny składa się z  $n_g$  gałęzi, przy czym  $i$ -ta gałąź zawiera uzwojenie o rezystancji  $R_i$  skojarzone ze strumieniem  $\psi_i$  oraz indukcyjność skupioną  $L_i$ . Po zastosowaniu schematu z różnicami wstecznymi do dyskretyzacji czasu układ równań napięciowych opisujących gałęzie obwodu przyjmuje w  $n$ -tej chwili czasowej postać:

$$\psi_{i,n} - \psi_{i,n-1} + L_i (\dot{i}_{i,n} - \dot{i}_{i,n-1}) + \Delta t R_i \dot{i}_i = \Delta t u_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n_g \quad (7)$$

Załóżmy wstępnie, że rozpatrywany obwód jest liniowy. Do wyznaczania rozkładu potencjału można wówczas wykorzystać zasadę superpozycji. Niech wektor  $A_{j0}$  oznacza rozkład potencjału pochodzący od założonego wstępnie prądu  $i_0$  w  $j$ -tym uzwojeniu, podczas gdy prądy w pozostałych uzwojeniach są równe zeru. Rozkład  $A_{j0}$  jest więc generowany przez wektor prądów:

$I_{j0} = [00 \dots i_0 \dots 00]^T$ . Niech  $\psi_{ij0}$  oznacza strumień skojarzony z  $i$ -tym uzwojeniem, ale pochodzący tylko od prądu w  $j$ -tym uzwojeniu, tzn. pochodzący od wektora  $I_{j0}$ . Wówczas

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \psi_{ij0} \quad (8)$$

przy czym  $\lambda_j$  oznacza stosunek rzeczywistego prądu w uzwojeniu  $j$ -tym do prądu  $i_0$ . Równania obwodów dla  $n$ -tej chwili czasowej można wówczas przedstawić w postaci:

$$\sum_{j=1}^{n_g} \lambda_{j,n} \psi_{ij0,n} + \lambda_{i,n} (L_i + \Delta t R_i) i_0 = \Delta t u_{i,n} + \psi_{i,n-1} + I_i i_{i,n-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n_g \quad (9)$$

Jest to układ  $n_g$  równań zawierający  $n_g$  niewiadomych  $\lambda_{j,n}$ . Po jego rozwiązaniu obliczany jest wypadkowy rozkład pola, prądy w uzwojeniach oraz strumienie skojarzone z uzwojeniami:

$$A_n = \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_{j,n} A_{j0}; \quad i_{i,n} = \lambda_{i,n} i_0; \quad \psi_{i,n} = \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_{j,n} \psi_{ij0} \quad (10a,b,c)$$

W przypadku obwodu liniowego w pierwszym kroku czasowym należy wyznaczyć  $n_g$  rozkładów przyczynkowych  $A_{j0}$  i na tej podstawie  $n_g^2$  przyczynkowych strumieni  $\psi_{ij0}$ . W następnych krokach czasowych obliczanie rozkładów pola nie jest już konieczne. Przedstawiona procedura jest więc równoważna wyznaczeniu indukcyjności własnych i wzajemnych na podstawie trójwymiarowego połowego modelu zjawisk magnetycznych, a następnie analizie stanu nieustalonego klasycznymi metodami obwodowymi (schematu zastępczego).

#### 4. NIELINIOWOŚĆ

Zagadnienie komplikuje się w przypadku nieliniowego obwodu magnetycznego. W kolejnych krokach czasowych zmienia się bowiem stopień nasycenia, a więc reluktancje poszczególnych części rdzenia. Zmienia się więc macierz sztywności układu równań MES. Macierz ta zależy od poszukiwanego rozwiązania, musi być więc poszukiwana iteracyjnie. Ponieważ w każdej iteracji rozpatrywane jest zagadnienie liniowe, zatem opisana powyżej procedura może być wykorzystana także w przypadku nieliniowym. Jednak rozkłady przyczynkowe muszą być wyznaczone w każdym kroku czasowym, a nawet w każdej iteracji dotyczącej nieliniowości „od nowa”. W pojedynczej iteracji wszystkie rozkłady przyczynkowe są wyznaczone przy tej samej macierzy sztywności układu równań MES, skonstruowanej jednak na podstawie wypadkowego rozkładu pola w iteracji poprzedniej, pochodzącego od obliczonych wg zależności (10b) prądów w uzwojeniach. Wartości prądów w każdym kroku czasowym są więc także wyznaczone iteracyjnie [4].

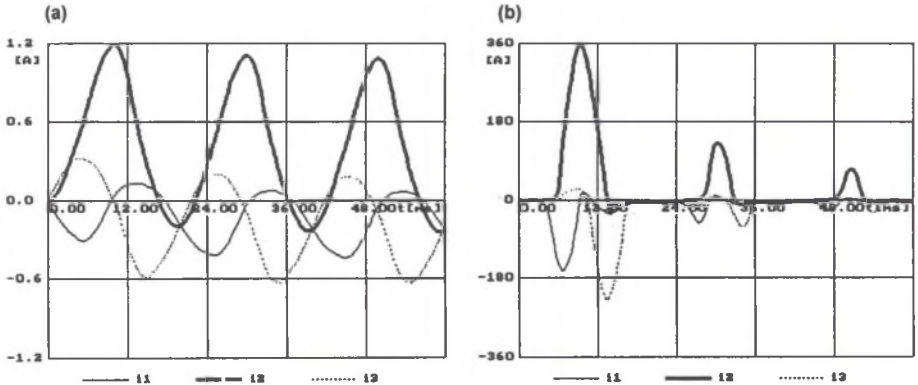
Po wyznaczeniu w  $k$ -tej iteracji (w  $n$ -tym kroku czasowym) rozkładów przyczynkowych  $A_{i0,n}^k$  rozwiązywany jest układ równań napięciowych (9), z którego wyznacza się współczynniki  $\lambda_{i0,n}^k$ , po czym – z zależności (10a,b) – oblicza się wypadkowy rozkład potencjałów  $A_n^k$  oraz prądy w uzwojeniach  $i_{in}^k$ . W końcowym etapie każdej iteracji wyznacza się rozkład modułu indukcji magnetycznej w poszczególnych elementach. Następnie, przed przystąpieniem do obliczeń w kolejnej,  $(k+1)$ -tej

iteracji określa się nowe wartości indukcji – wg reguły wykorzystywanej w metodzie „chord” [3]. W dalszej kolejności, z charakterystyki magnesowania określa się reluktywności elementów skończonych, po czym następuje modyfikacja macierzy sztywności. Obliczenia rozkładów przyczynkowych są powtarzane od nowa. W procesie iteracji blokowych jako przybliżenie początkowe  $(A_{j0,n}^k)_{m=0}$  do obliczania rozkładów przyczynkowych w  $n$ -tym kroku czasowym i w  $k$ -tej iteracji związanej z nieliniowością przyjmuje się rozwiązanie końcowe z  $(k-1)$ -ej, a mianowicie:  $(A_{j0,n}^k)_{m=0} = A_{j0,n}^{k-1}$ , przy czym  $m$  – numer kroku procesu iteracji blokowych. Taka procedura zmniejsza liczbę wykonywanych iteracji blokowych nawet kilkakrotnie. W kolejnych bowiem iteracjach „nieliniowych” wektory wymuszeń (wektory prądów) nie ulegają zmianie; są równe  $I_{j0}$ .

### 5. STAN NIEUSTALONY TRANSFORMATORA

Rozpatrywano stan nieustalony występujący w transformatorze trójfazowym z rdzeniem trójkolumnowym po załączeniu układu napięć fazowych:  $u_j(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{3}} \sin\left(100\pi t + \frac{2}{3}\pi(j-2) + \varphi_u\right)$ , przy czym  $j=1,2,3$  – numer uzwojenia i numer kolumny transformatora (kolumnę środkową oznaczono numerem 2). Strona wtórna nie była obciążona. Taki przypadek ma miejsce po załączeniu napięć do układu połączonego po stronie pierwotnej w gwiazdę z przewodem zerowym lub w trójkąt. Analizowano transformator o mocy znamionowej  $S_n = 160$  kVA i napięciu  $U_n = 20/0,525$  kV.

Na rys.2a,b przedstawiono przebiegi prądów fazowych  $i_j(t)$ ;  $j=1,2,3$  po załączeniu układu napięć o wartości skutecznej równej odpowiednio: 0,3 oraz  $0,9 U_n$ , dla kąta fazowego  $\varphi_u = 0$ .



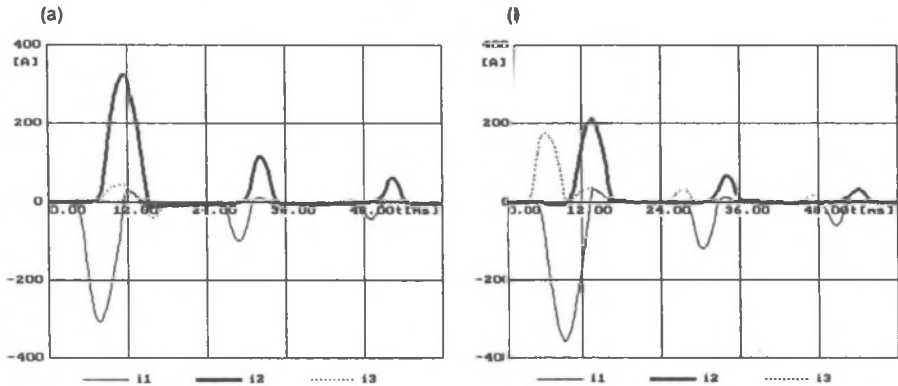
Rys. 2. Przebiegi prądów fazowych dla kąta  $\varphi_u = 0$  oraz dla napięć: (a)  $0,3U_n$ ; (b)  $0,9U_n$

Fig. 2. Phase current waveforms for angle  $\varphi_u = 0$  and for voltages: (a)  $0,3U_n$ ; (b)  $0,9U_n$

Chwilowe wartości prądów w uzwojeniach, nawet dla  $U=0,3 U_n$  kilkakrotnie przewyższają skuteczną wartość ustalonego prądu biegu jałowego (0,24 A), natomiast przy  $U=0,9 U_n$  prąd w impulsie jest o 3 rzędy wielkości większy od tej wartości. Szczytowa wartość prądu jest ponad 70 razy większa od prądu ustalonego przy obciążeniu znamionowym.

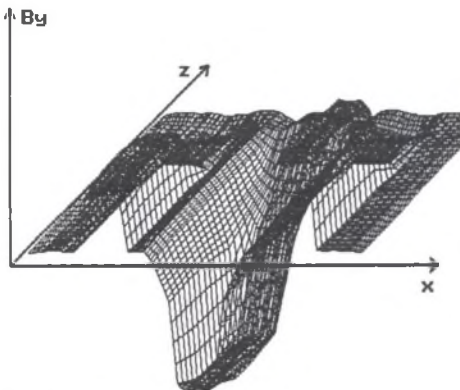
Rysunki 3a,b ilustrują wpływ kąta  $\varphi_u$  na przebiegi prądów. Obliczenia wykonano dla  $U=0,9 U_n$ , dla kątów  $\varphi_u = \pi/6$  i  $\pi/3$ . Na ostatnim rysunku przedstawiono rozkład składowej  $B_y = f(x,z)$  wektora indukcji w płaszczyźnie przecinającej kolumny transformatora w ich środkowych częściach. Początek układu współrzędnych umieszczono w środku symetrii transformatora. Współrzędna  $y$  jest równo-

legła do kolumn; współrzędna  $x$  natomiast – do jarzm transformatora. Współrzędna  $z$  jest prostopadła do płaszczyzny blach rdzenia. Ze względu na symetrię względem płaszczyzny  $z=0=const$  rozpatrywano tylko połowę obszaru (dla  $z \geq 0$ ). Z rozkładu wynika, że wskutek bardzo silnego nasycenia kolumny środkowej strumień  $\Phi_2$  skojarzony z uzwojeniem tej kolumny „przepływa” także równoległą drogą poprzez powietrze w obszarze okien transformatora. Natomiast nasycenie kolumn zewnętrznych powoduje, że strumień  $\Phi_2$  „powraca” poprzez przestrzeń przed i za pakietem rdzenia. Pole transformatora ma więc charakter zdecydowanie trójwymiarowy.



Rys. 3. Przebiegi prądów fazowych dla  $U=0,9U_n$  oraz dla kątów  $\varphi_U$ : (a)  $\pi/6$ ; (b)  $\pi/3$

Fig. 3. Phase current waveforms for  $U=0,9U_n$  and for angles  $\varphi_U$ : (a)  $0,3U_n$ ; (b)  $0,9U_n$



Rys. 4. Rozkład indukcji w transformatorze  
Fig. 4. Magnetic flux distribution in the transformer

## 6. WNIOSKI

Opracowany algorytm umożliwia wyznaczenie rozkładu trójwymiarowego pola magnetycznego na komputerach klasy PC w stosunkowo krótkim czasie, rzędu pojedynczych sekund. Dlatego oprogramowanie może być skutecznym narzędziem do symulacji przejściowych stanów pracy urządzeń elektromagnetycznych z nieliniowym rdzeniem ferromagnetycznym - na podstawie połowego, trójwymiarowego modelu zjawisk elektromagnetycznych.

Dzięki sprzężeniu równań pola i równań obwodów elektrycznych możliwa jest symulacja stanów występujących przy wymuszeniach napięciowych.

## LITERATURA

1. Demerdash N.A., Nehl T., Fouad F.A., Mohammed O.A.; Three dimensional finite element vector potential formulation of magnetic fields in electrical apparatus, IEEE Transactions. on Power Apparatus and Systems, Vol.100, No.8, 1981, s.4104-4122.

2. Golub G. H., Van Loan C.F.: Matrix computations, North Oxford Academic, Oxford 1983.
3. Nowak L.: Iterative procedure for 3D modelling of electromagnetic actuators. IEEE Transactions on Magnetics, Vol.31, No.3, May 1995, s.1428-1431.
4. Nowak L., Kowalski K.: The 3D coupled field-circuit simulation of transients in non-linear systems. IEEE Transactions on Magnetics, Vol.32, No.3, 1996, s.1078-1081.
5. Nowak L.: Modele polowe przetworników elektromechanicznych w stanach nieustalonych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1999.
6. Preis K., Biro O., Magele C., Renhart K.R., Vrsk.: FEM analysis of 3D magnetostatic fields, Proc. of 4-th International IGTE Symposium, Graz (Austria), 1990, s.195-204.
7. Silvester P.P., Ferrari K.L.: Finite elements for electrical engineers, Cambridge, London 1983.

Recenzent: Dr hab. inż. Marian Łukaniszyn  
Profesor Politechniki Opolskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 lutego 2001 r.

## Abstract

The magnetic field existing in many electromagnetic converters must be considered as three-dimensional. Also the field in a three-phase, three-column transformer during the transients must be considered as 3D. The direct components of the magnetic flux during the transients cause the saturation of the core parts. The magnetic flux lines close within the space surrounding the core.

Numerical implementation of the algorithm is based on FEM. The magnetic vector potential (MVP) has been employed for field description. The potential components are associated with each other – see equation (3). Therefore, the requirement for large computer memory is the main difficulty. The proposed algorithm is an attempt at elaborating an effective and relatively fast tool for 3D computation. A special block-relaxation iterative procedure has been proposed. The 3D global task has been decomposed and substituted with iterative sequence of quasi 2D problems.

The first level of the decomposition consists in separation of the MVP components – see (4). Equations concerning individual components are solved separately. Mutual connections between the components are taken into account iteratively by means of additional field sources of the FEM equations (5) and (6).

The second level of decomposition consists in space division into layers Fig.1. The division is performed by means of number of surfaces. On each surface the discretization is two-dimensional, with triangle elements. The triangular prism with two triangular bases situated on two adjoining surfaces constitute the 3D element.

In order to include nonlinearity of the ferromagnetic core an additional iterative procedure has been applied. This procedure is superior in relation to the basic one used for the solution of the set of FEM equations.

The transient magnetic field in nonlinear structures is usually produced under supply voltage constraint. This means that the currents in converter windings are not known in advance, i.e. prior to the calculation of the field distribution. Therefore, the equations describing the 3D magnetic field has been conjugated with the equations of the transformer electric circuits. In order to solve transient problem the time-stepping algorithm has been applied.

Some exemplary calculations of the transient phase-currents of the three-column transformer after the application of the system of supply voltages for different values of voltages and their phase angles have been made.