

Lesław GOŁĘBIEWSKI<sup>1</sup>, Tomasz DRABEK<sup>2</sup>**MODEL POLOWO-OBWODOWY SILNIKÓW ELEKTRYCZNYCH PRZEŁĄCZALNYCH**

**Streszczenie.** Przedstawiono model polowo-obwodowy przeznaczony do symulacji cyfrowych dowolnych stanów pracy silników przełączalnych: przełączalnego silnika reluktancyjnego (SRM) i przełączalnego silnika indukcyjnego klatkowego (SICM). W modelu tym dla każdego kroku całkowania równań obwodowych dynamiki silnika wyznaczane jest pole magnetyczne w przekroju poprzecznym maszyny za pomocą metody elementów skończonych 2.5D, z uwzględnieniem nasycenia jarzma. Uwzględniane jest także zjawisko wypierania prądu w prętach klatki oraz rzeczywisty, sterowany położeniem wirnika, sposób zasilania uzwojeń stojana. Opiszano sposób uwzględniania warunków brzegowych, jako problemu zasadniczego dla szybkości i dokładności obliczeń. Wyniki obliczeń zostały zweryfikowane pomiarowo.

**FIELD-CIRCUIT MODEL OF SWITCHED ELECTRIC MOTORS**

**Summary.** A field-circuit model for the numerical simulation of any states of switched reluctance and induction cage motors is presented in the paper. For each integration step of circuit equations of motor dynamics the magnetic field is determined in the transverse section of a machine with the finite elements method 2.5D, when taking into account the yoke saturation. The effect of dislodging the current in the rods of the cage as well as the actual (and controlled by rotor position) feeding mode of the stator windings are also taken into consideration. The way for taking into account the boundary conditions in view of the speed and accuracy of calculations is described. The calculation data were verified by measurements.

**Key words:** switched motors, finite element method, boundary conditions, SICM

**1. OPIS MODELU**

Dokładne obliczenia stanów dynamicznych silników przełączalnych wymagają zastosowania polowego opisu zjawisk elektromagnetycznych. W modelu matematycznym stanów dynamicznych silnika równania opisujące rozkład pola elektromagnetycznego muszą być sprzężone z równaniami obwodu elektrycznego oraz z równaniami bilansu momentów działających na wirnik. Dlatego opracowano program komputerowy symulacji niustalonych sprzężonych zjawisk polowych, obwodowych oraz mechanicznych. W algorytmie uwzględniono nieliniowe własności ferromagnetyczne rdzenia. Nieustalone pole elektromagnetyczne w silniku jest wymuszane napięciowo. Nie jest zadany przed wyznaczeniem rozkładu pola przebieg prądu w uzwojeniu. Nie są więc z góry znane źródła pola. Dlatego został też zamodelowany układ zasilający każdą fazę stojana zbudowany na tranzystorach.

Cykl pracy silnika zawiera stany dynamiczne, czyli nieustalone pod względem mechanicznym. Kąt obrotu i prędkość wirowania wirnika zmienia się w sposób z góry nieznan. Obrót jest wynikiem działania momentu elektromagnetycznego zależnego od poszukiwanego rozkładu niustalonego pola elektromagnetycznego. Konieczne jest więc włączenie do modelu matematycznego także równań równowagi mechanicznej.

Założono symetrię układu względem płaszczyzny XY, która jest prostopadła do osi maszyny. Jest to możliwe dzięki przyjętemu założeniu, że żłobki silnika nie mają skosu. Dlatego można było zastosować do obliczania pola magnetycznego w przekroju XY maszyny (tj. w przekroju prostopadłym do wału wirnika) metodę elementów skończonych 2D. Kompleksowy model

<sup>1</sup> Dr hab. inż., Politechnika Rzeszowska, ul. Wincentego Pola 2, 35-959 Rzeszów, tel. (0-17) 85-44-120, fax (0-17) 85-420-88, e-mail: golebiye@prz.rzeszow.pl

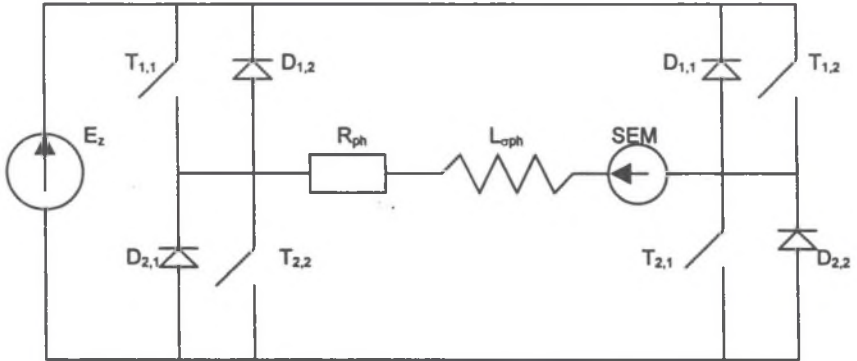
<sup>2</sup> Dr inż., Akademia Górniczo - Hutnicza, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, tel. (0-12) 617-28-23, fax (0-12) 634-10-96, e-mail: drabek@kme.agh.edu.pl

matematyczny niustalonych zjawisk elektromagnetycznych i elektromechanicznych w układzie silnika przełączalnego, który zawiera elementy nieliniowe oraz półprzewodnikowe, musiał obejmować równania opisujące niustalone pole elektromagnetyczne w środowisku nieliniowym i ruchomym. Zadanie to spełniała metoda elementów skończonych (FEM). Oprócz tego model musiał zawierać równania obwodu elektrycznego dla faz stojana z zasilającymi je układami tranzystorowymi oraz równania klatek wirnika (dla silnika przełączalnego indukcyjnego SICM [1]). Z uwagi na przyjęty model pola elektromagnetycznego typu 2D układ musiał być uzupełniony o indukcyjności rozproszeń i rezystancje połączeń czołowych. Opracowany model musiał też uwzględnić równanie równowagi mechanicznej. Analizy czasowej otrzymanego układu równań dokonywano przy wykorzystaniu schematu Crancka - Nicholsona. Jest to schemat z różnicami centralnymi do przybliżania pochodnych czasowych. W celu uwzględnienia nieliniowości układu równań pola, która wynikała z nieliniowej charakterystyki magnesowania ferromagnetycznych części obwodu, zastosowano iteracyjny proces Newtona - Raphsona. Oznacza to przybliżenie charakterystyki żelaza w pobliżu punktu pracy przez styczną do charakterystyki. Pozwala to na duże przyspieszenie obliczeń. Układ równań pola elektromagnetycznego musi być rozwiązywany równocześnie ze zdyskretyzowanym równaniem obwodu elektrycznego. W przekroju silnika uwzględniono 12000 węzłów oraz 23040 elementów skończonych. Zapewniło to wymaganą dokładność obliczeń. Umożliwiło to też podział każdego pręta wirnika na 9 prętów cząstkowych płaszczyznami równoległymi do podstawy pręta. Wszystkie pręty cząstkowe każdego pręta były połączone na bokach silnika pierścieniem zwierającym. Pozwoliło to na uwzględnienie zjawiska wypierania prądów w prętach wirnika.

W szczelinie powietrznej silnika przyjmowano 4 warstwy elementów skończonych. Było to związane zarówno ze sposobem modelowania obrotu wirnika, jak również miało istotny wpływ na dokładność. Porównawcze obliczenia rozkładu pola magnetycznego w przekroju maszyny dla założonych prądów przeprowadzone za pomocą systemu EMAG/NISA czy też OPERA 2D lub ANSYS dały wynik z maksymalną względną różnicą w stosunku do obliczeń dokonanych przedstawianą metodą wynoszącą 3%. W obliczeniach tymi systemami także należało przyjąć kilka (4 lub 5) warstw elementów skończonych w szczelinie. Założono, że w trakcie ruchu wirnika deformują się warstwy elementów od 2 do 4 przy wirniku, a warstwa górna przy stanie nie zmienia swego położenia. Jeśli ruch obrotowy wirnika jest większy od kroku dyskretyzacji siatki, to deformuje się ta siatka tylko o część ułamkową z ilorazu kąta przez krok dyskretyzacji; o część całkowitą z tego ilorazu następuje przenumerywanie węzłów wirnika. Moment elektromagnetyczny był liczony ze wzoru J.L.Coulomba [3], czy to w górnej warstwie, czy też w trzech dolnych, deformujących się podczas obrotu. Podczas obliczeń momentu należało zakładać, że cały ruch wirnika jest odzwierciedlany deformacją aktualnie rozpatrywanej warstwy. W rzeczywistości jednak podczas obrotu dokonuje się deformacja tylko trzech warstw dolnych przy wirniku. Moment elektromagnetyczny obliczany z warstwy górnej był bardziej stabilny numerycznie i dlatego on był uwzględniany przy obliczeniach dynamiki silnika. Otrzymane układy równań zawierały wiele elementów zerowych, dlatego mogły być efektywnie rozwiązywane metodami macierzy rzadkiej. Zaprogramowany model silnika umożliwiał dwukierunkowe zasilanie faz stojana. Układ zasilania fazy stojana jest przedstawiony na rysunku 1. Elementy  $T_{1,1}$ ;  $T_{2,1}$ ;  $D_{1,1}$ ;  $D_{2,1}$  dla  $i = 1$  gwarantowały dodatni kierunek przepływu prądu. Dla  $i = 2$  kierunek prądu był przeciwny. Ta możliwość była wykorzystywana do obliczeń symulacyjnych różnych stanów pracy silnika.

Aby układ zasilania mógł pracować dla dodatniego kierunku prądu, jego tranzystor  $T_{2,1}$  musi być załączony. Decyduje o tym układ sterujący w zależności od położenia wirnika. Tranzystor  $T_{1,1}$  służy do utrzymania wartości prądu fazy na zadanej wartości. Przy załączonym tranzystorze  $T_{1,1}$  faza silnika jest załączona do źródła zasilania  $E_2$ . Gdy  $T_{1,1}$  jest wyłączony, to prąd zanika w obwodzie  $D_{2,1}$  - faza silnika -  $T_{2,1}$ . Gdy faza silnika ma być całkiem wyłączona, to wyłącza się tranzystor  $T_{2,1}$ . Występuje zanik prądu ze zwrotem energii do źródła w obwodzie  $E_2 - D_{1,1}$  - faza stojana -  $D_{2,1}$ .

W stanach przejściowych prądy wirowe deformują rozkład pola magnetycznego. Wypierają strumień magnetyczny w kierunku zewnętrznych powierzchni zębów i jarzma. Przeciwdziała temu w znacznej mierze zjawisko składania rdzeni magnetycznych z cienkich blach oddzielonych od siebie warstwą nieprzewodzącą. Zjawisko to nie jest w sposób bezpośredni uwzględnione w obliczeniach numerycznych. Może być jednak przewidziane „a posteriori” z otrzymanych wyników.



Rys. 1. Model zasilania jednej fazy silnika przełączalnego  
Fig. 1. Feed model for one phase of a switched motor

## 2. WARUNKI BRZEGOWE I ICH WPŁYW NA DOKŁADNOŚĆ I SZYBKOŚĆ OBLICZEŃ

Do obliczeń pola magnetycznego w przekroju maszyny elektrycznej, zwłaszcza jej stanu dynamicznego, są potrzebne warunki początkowe i brzegowe. Warunki początkowe to znany potencjał pola magnetycznego (potencjał wektorowy  $A$ ) w przekroju maszyny elektrycznej dla poprzedniego kroku czasowego. Warunki brzegowe to znany potencjał wektorowy na brzegach obliczanego obszaru dla konkretnie obliczanego czasu. W przedstawianym modelu maszyna była otoczona warstwą powietrza zarówno na zewnątrz stojana, jak i wewnątrz jarzma wimika (zamiast wału). Warunki brzegowe były przyjmowane na zewnątrz tego obszaru, a występujące powietrze łagodziło skutki ewentualnych błędów w ich zadawaniu.

Testowano trzy sposoby zadawania warunków brzegowych:

1. W jednym punkcie na brzegu wewnętrznym  $I$  (wał) zadawano warunek Dirichleta  $A = 0$ . W pozostałych punktach brzegowych brzegu  $I$  oraz  $II$  (powietrze otaczające maszynę) zadawano warunki Neumana  $\partial A / \partial n = 0$ , gdzie  $n$  to normalna do brzegu.
2. Na obu brzegach zadawano warunki Dirichleta we wszystkich punktach  $A = 0$ . Na rys. 2 - 4 oznaczono je jako 9d2.
3. Na brzegu wewnętrznym  $I$  zadawano warunki Dirichleta  $A = 0$  we wszystkich punktach, natomiast na brzegu zewnętrznym  $II$  warunki Neumana  $\partial A / \partial n = 0$ . Na rysunkach oznaczono je jako 9d1.

Pierwszy sposób zadawania warunków brzegowych odpowiada sytuacji, gdy na zewnątrz układu, poza brzegiem otaczającego powietrza znajduje się materiał o nieskończonej przenikalności magnetycznej  $\mu$ . Ponieważ od układu maszyny elektrycznej oddziela go gruba warstwa powietrza, więc nie wpływa on na zjawiska zachodzące w maszynie. Natomiast jest bardzo proste zaprogramowanie występujących tu głównie warunków Neumana. W MES wystarczy nie podejmować żadnych działań.

Drugi sposób zadawania warunków brzegowych wydaje się sztuczny i najmniej nadający się do interpretacji fizycznej. Oznacza on, że strumień magnetyczny przepływający przez dowolną krzywą w przekroju maszyny o końcach położonych jeden na powierzchni granicznej  $I$ , a drugi na powierzchni  $II$  wynosi 0.

Trzeci sposób zadawania warunków brzegowych można interpretować przez przyłożenie do powierzchni granicznej  $II$  (z zewnątrz maszyny) ośrodka o bardzo dużej przenikalności magnetycznej, natomiast do powierzchni granicznej  $I$  (wewnątrz maszyny) ośrodka o bardzo małej przenikalności magnetycznej. Powoduje to, że przez powierzchnię graniczną  $I$  nie wypływa żaden strumień na zewnątrz. Jak wykazały obliczenia testowe, wszystkie trzy sposoby zadawania

warunków brzegowych dawały te same wyniki również w przypadku nieliniowej charakterystyki magnesowania żelaza i przy odpowiedniej szerokości pasma zewnętrznego z powietrzem.

Do rozwiązywania układu równań metody elementów skończonych w związku z nieliniowością magnesowania żelaza wykorzystywano metodę Newtona-Raphsona. W jej efekcie otrzymywano macierze rzadkie, o dużej liczbie zerowych elementów. Celowe okazało się zastosowanie do rozwiązania układów równań z taką macierzą metody multifrontalnej należącej do rodziny metod macierzy rzadkiej opisanych w pracach [2, 4, 5]. Wykonano szereg testów efektywności metody w nawiązaniu do 3 metod zadawania warunków brzegowych. Wykonywano obliczenia dynamiki maszyny po jej załączeniu, a ich wyniki dla różnych sposobów zadawania warunków brzegowych przy zastosowaniu metody macierzy rzadkiej porównywano na końcu przebiegu po wykonaniu około 400 kroków czasowych o wielkości 0,00005 s. Wynikiem wzorcowym były obliczenia prowadzone dla sposobu zadawania warunków brzegowych typu 1 bez stosowania macierzy rzadkiej. Przebieg wielkości określających proces numeryczny podczas tych obliczeń wykreślono jednocześnie w funkcji czasu. Zauważono, że proces Newtona-Raphsona generuje pewną liczbę małych co do swej wartości absolutnej elementów macierzy układu równań. Dlatego zakładano możliwość ich wyzerowania przed rozwiązywaniem układu. Badano wpływ tego postępowania na dokładność i szybkość obliczeń.

Przyjmowano względny poziom odrzucania elementów  $p = 10^{-k}$ , gdzie  $k = 9$  w metodach zadawania warunków brzegowych 2 oraz 3. Natomiast w metodzie 1,  $k = 5, 6, 7, 8, 9$ . Element macierzy głównej  $[M]$  o wskaźnikach  $i, j$ ,  $M_{ij}$  był odrzucany, gdy:

$$|M_{ij}| < 10^{-k} \cdot \sqrt{|M_{ii} M_{jj}|}.$$

Na rys. 2 przedstawiono względną liczbę odrzucanych w ten sposób elementów. Do obliczeń należało liczbę odrzucanych elementów podzielić przez ogólną liczbę elementów macierzy  $M$ . Przyjmowano ją jako liczbę elementów macierzy pasmowej o wymiarze równym liczbie wszystkich węzłów elementów skończonych i o szerokości pasma. Pasma to było równe uśrednionej maksymalnej różnicy numerów kolumn w kolejnych wierszach macierzy.

Rys. 2 potwierdza dużą liczbę usuwanych w ten sposób elementów macierzy. Ma to wpływ na zwiększenie szybkości metody. Efektem tego jest też zmniejszenie względnego zapelnienia macierzy odwrotnej przedstawione na rys. 3 w funkcji czasu dla sposobów postępowania opisanych na rys. 2. Oznaczenie „0” określa brak odrzucanych elementów przy stosowaniu metody 1 zadawania warunków brzegowych. Po włączeniu maszyny na początku obliczeń panuje małe nasycenie obwodu magnetycznego. Tym można wytłumaczyć kształt przebiegów na rys. 2 i 3 na początku obliczeń.

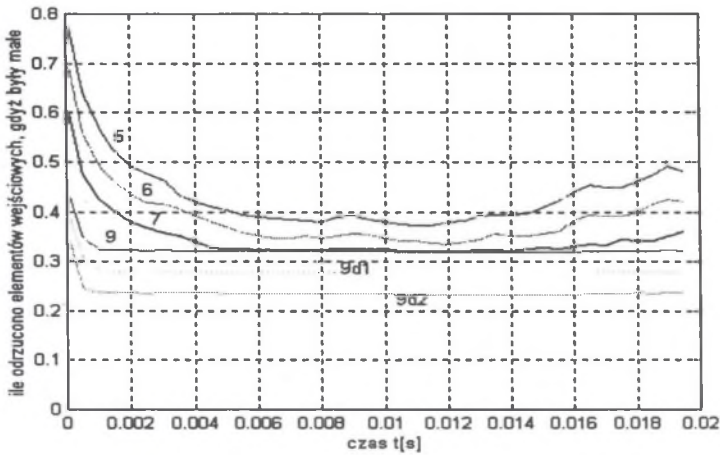
Na rys. 4 jest przedstawiony zakres wielkości elementów pozostałych w macierzy po odrzuceniach jako stosunek najmniejszego do największego elementu pozostałej macierzy.

Oczywiście, o efektywności metody nie decyduje przyspieszenie obliczeń, lecz ich dokładność. Jeśli rozwiązywano układ  $Mx = P$ , to miarą dokładności jego rozwiązania była względna wartość

residuum  $\gamma = \frac{\|P - Mx\|_2}{\|P\|_2}$ , gdzie  $\|\cdot\|_2$  oznacza normę Euklidesa.

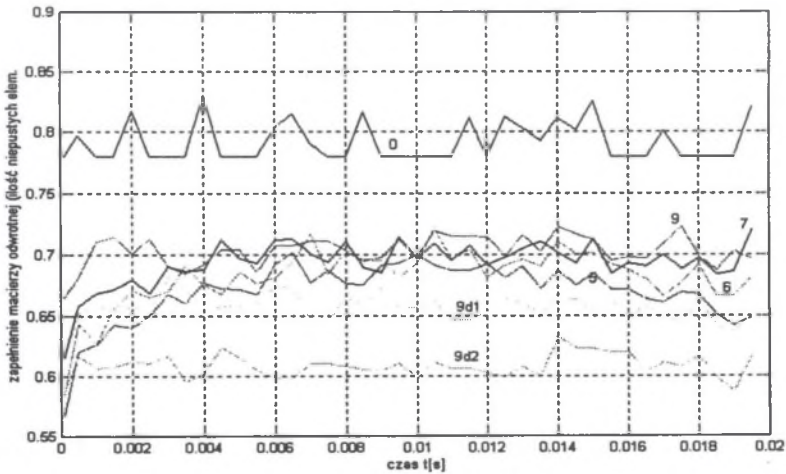
Dokładność ta jest przedstawiona na rys. 5 dla pozostawionej po opisanych odrzuceniach macierzy głównej  $M$ . Jest ona bardzo duża, niemal na poziomie dokładności stosowanej maszyny cyfrowej. Jednak otrzymane w opisany sposób rozwiązanie powinno spełniać układ z dokładną macierzą główną  $M_0$ , która występowała przed odrzucaniem małych elementów.

Wartość względnego residuum z dokładną macierzą  $M_0$  silnie zależy od poziomu odrzucania elementów  $k$ . Praktycznie rozwiązanie z  $k = 9$  dla wszystkich opisanych tu 3 metod spełnienia warunków brzegowych znajduje się na poziomie błędów metody przedstawionej na rys. 5. Wpływ odrzucania małych elementów przy  $k = 9$  nie wpływa zauważalnie na dokładność obliczeń.

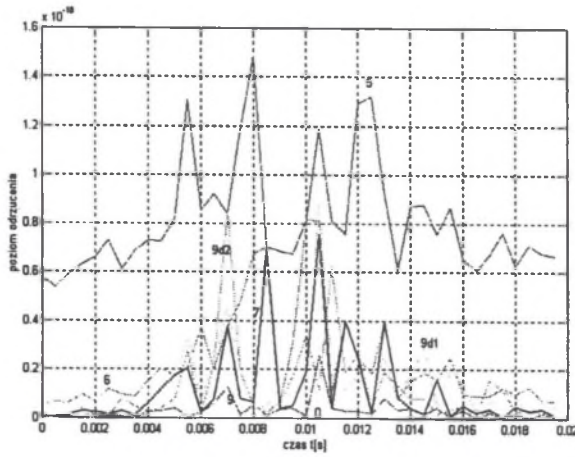


Rys. 2. Względna liczba odrzuconych elementów macierzy głównej układu równań ze względu na ich znikomą wartość podczas obliczeń dynamiki. Krzywą 9d1 uzyskano 3 metodą zadawania warunków brzegowych, z poziomem odrzucania  $10^{-9}$ , krzywą 9d2 z 2 metody zadawania warunków brzegowych, też z poziomem odrzucania  $10^{-9}$ . Pozostałe krzywe otrzymano 1 metodą. Np. krzywa 5 reprezentuje poziom odrzucania  $10^{-7}$ , podobnie np. 7 ma poziom odrzucania  $10^{-7}$ .

Fig. 2. Relative number of rejected elements of the main matrix of the equation system in view of their low value for the dynamics calculation. Curve 9d1 was obtained by the 3 method of imposing boundary conditions, at the rejection level  $10^{-9}$ ; curve 9d2 was obtained with the 2 method of imposing boundary conditions, at the rejection level  $10^{-9}$ . The remaining curves were obtained by 1 method, e.g., curve 5 represents the rejection level  $10^{-7}$ , and curve 7 represents the rejection level  $10^{-7}$ .

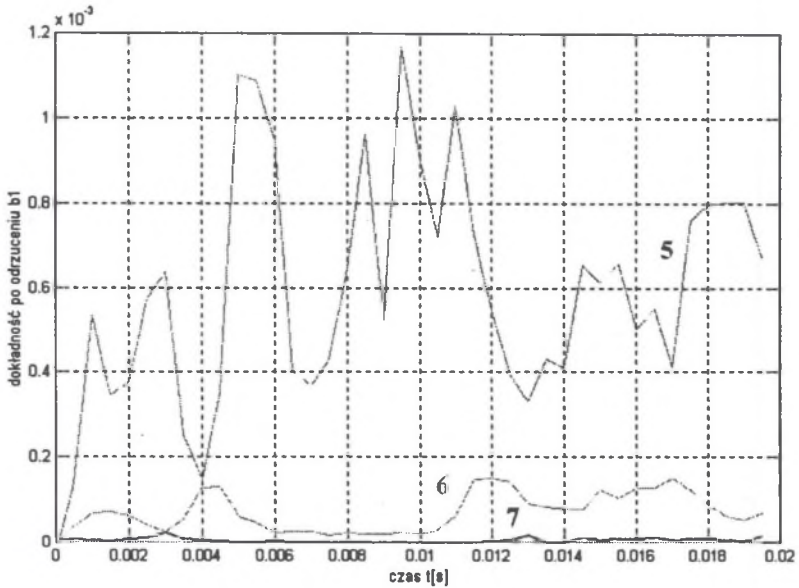


Rys. 3. Względne wypełnienie macierzy odwrotnej głównej układu równań MES podczas obliczeń dynamiki  
Fig. 3. Relative filling of the inverse matrix of the main equation system when calculating the dynamics



Rys. 4. Stosunek najmniejszego do największego elementu macierzy głównej (zakres) po odrzuceniach elementów zgodnie z rys. 2 i 3 podczas obliczeń

Fig. 4. The smallest-to-the-biggest-element ratio in the main matrix, after elements were discarded in line with Fig. 2 and 3 during calculations

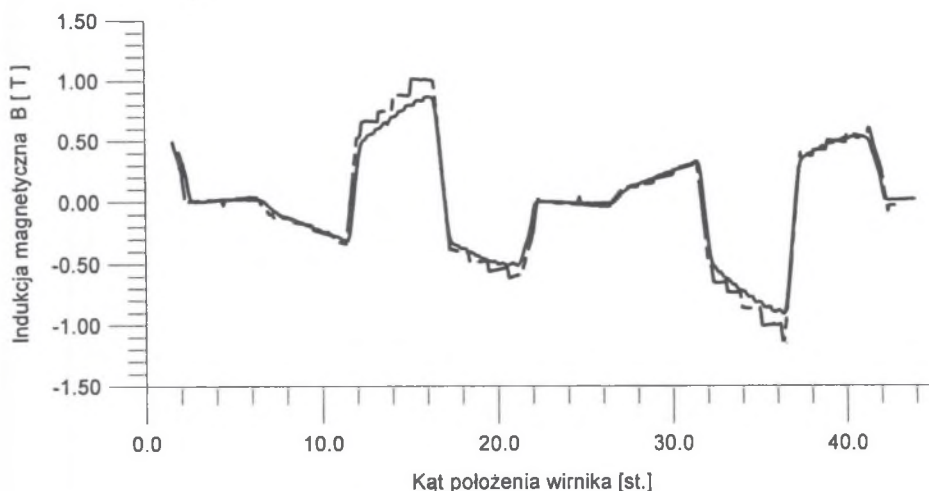


Rys. 5. Dokładność stosowanej metody macierzy rzadkiej z pozostawioną po odrzuceniach macierzą główną  $M$

Fig. 5. Accuracy of the used rare matrix with the main matrix after rejections were made

## 3. WERYFIKACJA POMIAROWA

Weryfikacji pomiarowej dokonano m. in. na czteropasmowym silniku SICM [1] o 24 zębach na stojanie i 18 zębach na wirniku. Rejestrowano przebieg czasowy siły elektromotorycznej indukowanej w cewce pomiarowej nawiniętej wokół jednego z zębów stojana, podczas pracy silnika. Jednocześnie rejestrowano przebieg położenia wirnika w czasie. Z uzyskanych przebiegów wyliczono przebieg zmian indukcji magnetycznej w funkcji kąta położenia wirnika i porównano z analogicznym przebiegiem uzyskanym z obliczeń (rys. 6).



Rys. 6. Przebieg indukcji magnetycznej w funkcji kąta położenia wirnika (linia ciągła - pomiary)

Fig. 6. Course of magnetic induction in the function of angle of rotor's position (continuous line – measurements)

## LITERATURA

1. Drabek T., Gołębiowski L., Skwarczyński J.: Badania symulacyjne i pomiarowe przełączalnego silnika indukcyjnego klatkowego, *Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej*, nr 48, Seria: *Studia i Materiały*, nr 20, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000, strony 131 - 138.
2. Duff I. S., Reid J. K.: The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, nr 9, 1983, strony 302 - 325.
3. Gołębiowski L.: *Residualne modele maszyn elektrycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1996, strony 17 - 57.
4. Liu J. W. H.: On the storage requirement in the out-of-core multifrontal method for sparse factorization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, nr 12, 1986, strony 249 - 264.
5. Liu J. W. H.: The multifrontal method and paging in sparse Cholesky factorization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, nr 15, 1989, strony 310 - 325.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Stein

## Abstract

The paper gives a 2D field-circuit model for numerical simulations of any states of the switched reluctance motors and switched induction motors. The equations describing the distribution of electromagnetic field are connected with equations of electric circuits and equations of torques acting on the rotor. The electric circuits may contain strongly nonlinear elements, e.g. transistors, diodes (Fig. 1). The nonlinear properties of ferromagnetic materials were accounted for. The unsteady states of an electromagnetic field in the motor are voltage-forced; the time course of the current in the winding is not given. Due to the assumed model of 2D electromagnetic field, the system is supplemented with dispersion inductance and resistance of face connections.

The time analysis of the obtained system of equations is based on the Crank-Nicholson model. Owing to the nonlinear characteristic of magnetizing, the Newton-Raphson iteration process was used. As a consequence, rare matrices were obtained with a great number of zero elements. A multiface method, belonging to the family of rare matrices described in [2], [4], [5], was used for solving the equations system with such a matrix. A number of efficiency tests were made for this method, accounting for three ways in which boundary conditions can be imposed. The dynamics of the motor was calculated after switching on. The results of various ways of imposing the boundary conditions with the use of a rare matrix method were compared at the end of the course, after taking about 400 time-steps per 0.00005 s. Among the exemplary results were the calculations performed for boundary conditions imposed in line with mode no. 1, i.e. without rare matrix. The parameters determining the numerical process accompanying the calculations were plotted simultaneously in the function of time. The Newton-Raphson process was observed to generate a number of small absolute elements of the equation system matrix. Therefore, the possibility of their zeroing before solving the equation system was assumed. The influence of this procedure on the accuracy and speed of calculation was analysed. The number of the rejected small elements was big (Figs. 2, 3). After the rejections were made, the accuracy of calculation increased, almost to the level of a numerical machine (Figs. 4, 5).

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego nr 8 T10A 031 17 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.