

Stanisław GÓRA
Tadeusz WIECZOREK

ANALIZA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W INDUKCYJNYM UKŁADZIE GRZEJNYM
WSAD RUROWY - WZBUDNIK Z TRÓJFAZOWYM POLEM BIEGNĄCYM

Streszczenie. W pracy poddano analizie pole elektromagnetyczne w indukcyjnym układzie grzejnym zawierającym wsad rurowy z wewnętrznym wzbudnikiem składającym się z uzwojeń cylindrycznych ułożonych na rdzeniu magnetycznym. Do obliczeń zastosowano metodę całki Fouriera [1, 2]. Podano równania określające rozkłady potencjału wektorowego oraz indukcji magnetycznej. Przeprowadzone obliczenia i pomiary wykazały dobrą zbieżność wyników.

1. Wstęp

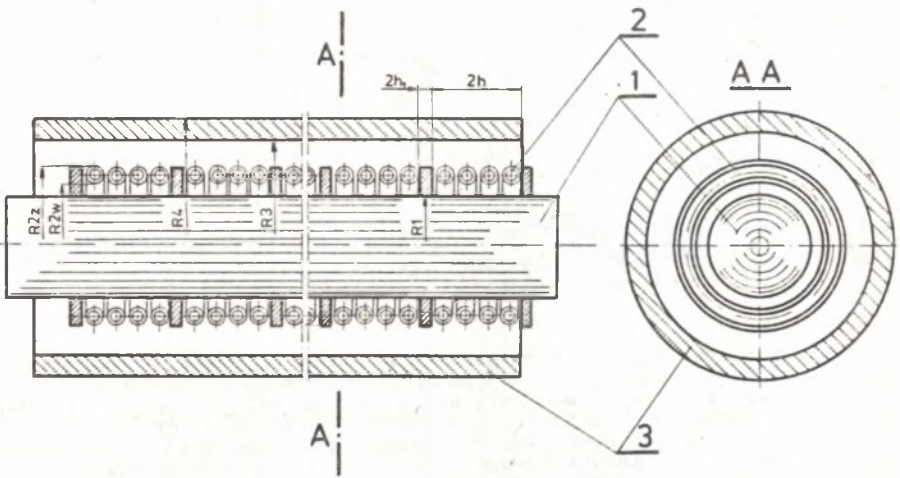
Obliczenia parametrów pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzewczym mają podstawowe znaczenie. Równania na natężenie pól elektrycznego i magnetycznego stanowią punkt wyjścia do wyznaczenia rozkładu mocy we wsadzie nagrzewanym indukcyjnie. Te zaś z kolei umożliwiają obliczenie lub ocenę występujących rozkładów temperatur.

Jak wiadomo, nagrzewanie cienkościennych rur o grubości ścianki poniżej 0,02 m wzbudnikami zewnętrznymi jest nie ekonomiczne [2]. Dla wyeliminowania tej trudności zaproponowano grzanie indukcyjne wewnętrznym wzbudnikiem [3]. Przy nagrzewnicy wewnętrznej praktycznie nie ma ograniczeń co do minimalnej grubości ścianki rury.

Przedmiotem artykułu jest nagrzewnica indukcyjna z wewnętrznym trójfazowym wzbudnikiem (rys. 1.).

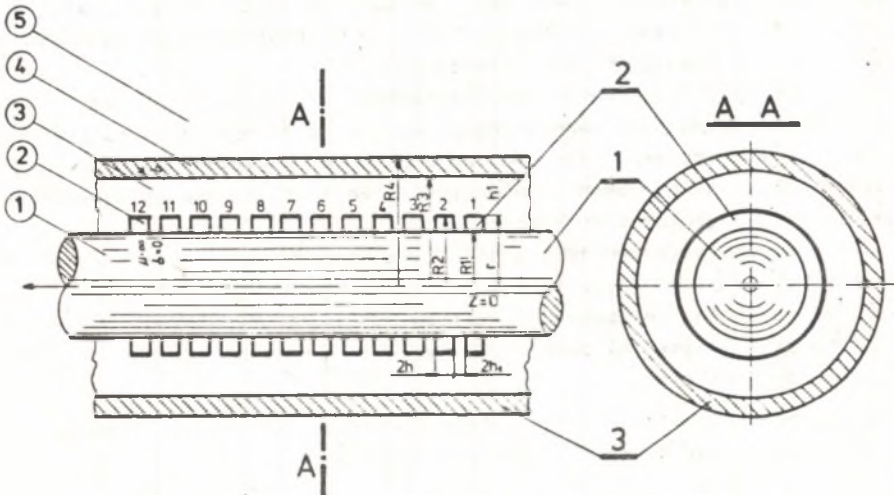
Przeprowadzenie obliczeń dla układu na rys. 1 jest trudne, dlatego posłużono się modelem obliczeniowym (rys. 2). W modelu tym przyjęto następujące uproszczenia:

- uzwojenie trójfazowe [2] nawinięte z rurki miedzianej zastępuje je uzwojeniem nieskończenie cienkim, którego promień R_2 jest wartością średnią z promieni rurki R_{2w} i R_{2z} . Pomiędzy kolejnymi cewkami uzwojenia zachowuje się odstępy o wysokości $2h_1$ odpowiadające wysokościom przekładek elektroizolacyjnych,
- rdzeń magnetyczny o skończonej długości zastąpiono walcem nieskończenie długim o przenikalności magnetycznej $\mu = \infty$ i konduktywności $\sigma = 0$,
- parametry elektryczne i magnetyczne wsadu są stałe.



Rys. 1. Indukcyjny układ grzejny

1 - rdzeń magnetyczny, 2 - uzwojenie trójfazowe, 3 - wąż rurowy



Rys. 2. Model obliczeniowy

1 - rdzeń magnetyczny, 2 - uzwojenie trójfazowe, 3 - wąż rurowy, 1, 2, 3, 4, 5 - obszary obliczeniowe

W przyjętym modelu obliczeniowym pominięto elementy konstrukcyjne, układziny termoizolacyjne, doprowadzenia prądowe i inne, które nie mają zasadniczego wpływu na parametry elektromagnetyczne urządzenia.

2. Wielkości i zależności podstawowe

Dla obliczenia wielkości pola elektromagnetycznego posłużono się równaniami Maxwella, z których wyznaczono:

\vec{E} - natężenie pola elektrycznego,

\vec{H} - natężenie pola magnetycznego,

\vec{B} - indukcję magnetyczną.

Wprowadzając potencjał wektorowy \vec{A} poprzez równanie:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (1)$$

można równania Maxwella przedstawić w postaci:

$$\nabla^2 \vec{A} - m^2 \vec{A} = 0 \quad (2)$$

gdzie $m^2 = j\omega\mu\epsilon$.

Tak więc, przez wprowadzenie potencjału wektorowego równania Maxwella zostały zastąpione jednym równaniem różniczkowym, co w zasadniczy sposób upraszcza obliczenia. Znajomość potencjału wektorowego \vec{A} zezwala na określenie wektorów pola elektromagnetycznego.

Powyższe równanie (2) zapisane jest w ogólnej postaci wektorowej. Z uwagi na to, że analizowane zagadnienie posiada symetrię cylindryczną, można je przedstawić we współrzędnych walcowych (r, φ, z).

Rozwiązanie równania różniczkowego dla ogólnego przypadku stanowi skomplikowany problem matematyczny. Jednak dla rozważanego układu (rys.2) równanie (2) upraszcza się. Wynika to z faktu, że w rozpatrywanym modelu gęstości prądu posiadają tylko składową kątową:

$$I_{\varphi} \neq 0$$

pozostałe zaś składowe są równe zero:

$$I_r = I_z = 0.$$

Kierunek potencjału wektorowego jest zgodny z kierunkiem wektora gęstości prądu, który go wywołuje, a więc:

$$A_{\varphi} \neq 0$$

zaś:

$$A_r = A_z = 0$$

Z uwagi na to, że potencjał wektorowy jest niezależny od φ :

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \varphi^2} = 0$$

W związku z tym równanie (2) ma postać:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(m^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] A = 0 \quad (3)$$

gdzie:

$$A = A(r, z, t) \bar{i}_\varphi = A \bar{i}_\varphi$$

Potencjał wektorowy określony równaniem (3) zgodnie z rys. 2 spełnia następujące warunki brzegowe na granicach obszarów obliczeniowych [4]:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_3 && \text{dla } r = R_2 && \text{(a)} \\ A_3 &= A_4 && \text{dla } r = R_3 && \text{(b)} \\ A_4 &= A_5 && \text{dla } r = R_4 && \text{(c)} \\ H_{z2} &= 0 && \text{dla } r = R_1 && \text{(d)} \\ H_{z2} - H_{z3} &= J(z) && \text{dla } r = R_2 && \text{(e)} \\ H_{z3} &= H_{z4} && \text{dla } r = R_3 && \text{(f)} \\ H_{z4} &= H_{z5} && \text{dla } r = R_4 && \text{(g)} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$H_{zi} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_i)}{\partial r}$$

A_1 i H_{zi} - potencjały wektorowe i składowe styczne natężenia pola magnetycznego w poszczególnych obszarach obliczeniowych (rys. 2).

$$J(z) = \frac{NI}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k}{k} \sum_{n=1}^{12} e^{-j\alpha_n} \cos k [z - (2n-1) \cdot (h+h_1)] dk \quad (5)$$

$J(z)$ - skład prądowy wzbudnika.

3. Obliczenie potencjału wektorowego i indukcji magnetycznej

Celem obliczenia potencjału wektorowego należy rozwiązać równanie różniczkowe (3). Rozwiązanie ogólne tego równania można uzyskać metodą rozdzielania zmiennych w postaci całki Fouriera:

$$A = \int_0^{\infty} \left\{ [C(k)I_1(pr) + D(k)K_1(pr)] \cos kz + [C(k)I_1(pr) + D(k)K_1(pr)] \sin kz \right\} dk \quad (6)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{k^2 + j\omega\mu_0\epsilon} \quad (7)$$

$I_1(pr)$, $K_1(pr)$ - zmodyfikowane funkcja Bessela I i II rodzaju rzędu pierwszego.

Rozwiązanie ogólne (6) przyjmuje następującą postać w wyszczególnionych obszarach obliczeniowych (rys. 2):

$$A_2 = \int_0^{\infty} \left\{ [C_2(k)I_1(kr) + D_2(k)K_1(kr)] \cos kz + [C'_2(k)I_1(kr) + D'_2(k)K_1(kr)] \sin kz \right\} dk$$

$$A_3 = \int_0^{\infty} \left\{ [C_3(k)I_1(kr) + D_3(k)K_1(kr)] \cos kz + [C'_3(k)I_1(kr) + D'_3(k)K_1(kr)] \sin kz \right\} dk$$

$$A_4 = \int_0^{\infty} \left\{ [C_4(k)I_1(pr) + D_4(k)K_1(pr)] \cos kz + [C'_4(k)I_1(pr) + D'_4(k)K_1(pr)] \sin kz \right\} dk$$

$$A_5 = \int_0^{\infty} \left[D_5(k) K_1(kr) \cosh kz + D_5'(k) K_1(kr) \right] \operatorname{sinh} kz \, dk \quad (8)$$

gdzie:

$C_1(k)$, $D_1(k)$, $C_1'(k)$, $D_1'(k)$ - stałe całkowania.

Podstawiając potencjały wektorowe do warunków brzegowych, uzyskuje się dwa układy równań na stałe całkowania. Po rozwiązaniu uzyskano ostateczne wyrażenia na potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach obliczeniowych:

$$A_2 = \frac{NI_0 R_2}{i r h} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sinh} k h}{k} \frac{M_2 I_1(k R_2) + M_1 K_1(k R_2)}{M_1 K_0(k R_1) - M_2 I_0(k R_1)} \cdot \\ \cdot \left[K_0(k R_1) I_1(k r) + I_0(k R_1) K_1(k r) \right] \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \\ \cdot \operatorname{cosh} \left[z - (2n - 1)(h + h_1) \right] dk \quad (9)$$

$$A_3 = \frac{NI_0 R_2}{i r h} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sinh} k h}{k} \frac{N_3}{M_1 K_0(k R_1) - M_2 I_0(k R_1)} \cdot \\ \cdot \left[M_2 I_1(k r) + M_1 K_1(k r) \right] \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \\ \cdot \operatorname{cosh} \left[z - (2n - 1)(h + h_1) \right] dk \quad (10)$$

$$A_4 = \frac{NI_0 R_2}{i h R_3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sinh} k h N_3}{k^2} \frac{N_2 I_1(k r) + N_1 K_1(k r)}{M_1 K_0(k R_1) - M_2 I_0(k R_1)} \cdot \\ \cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{cosh} \left[z - (2n - 1)(h + h_1) \right] dk \quad (11)$$

$$A_5 = \frac{NI_0 R_2}{i h R_3 R_4} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sinh} k h}{k^2} \frac{N_3 K_1(k r)}{M_1 K_0(k R_1) - M_2 I_0(k R_1)} \cdot \\ \cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{cosh} \left[z - (2n - 1)(h + h_1) \right] dk \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= qI_0(pR_4)K_1(kR_4) + I_1(pR_4)K_0(kR_4) \\
 N_2 &= qK_0(pR_4)K_1(kR_4) - K_1(pR_4)K_0(kR_4) \\
 N_3 &= K_0(kR_1)I_1(kR_2) + K_1(kR_2)I_0(kR_1) \\
 M_1 &= N_5I_0(kR_3) - qN_4I_1(kR_3) \\
 M_2 &= N_5K_0(kR_3) + qN_4K_1(kR_3) \\
 N_4 &= N_2I_0(pR_3) - N_1K_0(pR_3) \\
 N_5 &= N_2I_1(pR_3) + N_1K_1(pR_3) \\
 q &= \frac{p}{k}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Indukcja magnetyczna wyraża się wzorem:

$$\vec{B}(r, z, t) = \text{rot}[A(r, z, t)\vec{i}_\varphi] = B_r(r, z, t)\vec{i}_r + B_z(r, z, t)\vec{i}_z \tag{14}$$

gdzie:

$$B_r(r, z, t) = - \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial z} \tag{15}$$

$$B_z(r, z, t) = \frac{A(r, z, t)}{r} + \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial r} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 B'_{r2} &= \frac{NI_0 R_2}{2h} \int_0^\infty \text{sin}kh \frac{M_2 I_1(kR_2) + M_1 K_1(kR_2)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot [K_0(kR_1)I_1(kr) + I_0(kr)K_1(kR_1) + K_1(kr)] \cdot \\
 &\cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n z)} \text{sin}k [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{z2} &= \frac{N_{10} R_2}{5h} \int_0^{\infty} \operatorname{snkh} \frac{M_1 I_0(kR_2) + M_1 K_1(kR_2)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot \left[K_0(kR_1) I_0(kr) - I_0(kR_1) K_0(kr) \right] \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \cdot \\
 &\cdot \operatorname{cosk} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{r3} &= \frac{N_{10} R_2}{5h} \int_0^{\infty} \operatorname{snkh} N_3 \frac{M_2 I_0(kr) + M_1 K_2(kr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{snk} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{z3} &= \frac{N_{10} R_2}{5h} \int_0^{\infty} \operatorname{snkh} N_3 \frac{M_2 I_0(kr) - M_1 K_0(kr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{cosk} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{r4} &= \frac{N_{10} R_2}{5h R_3} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{snkh}}{k} N_3 \frac{N_2 I_1(pr) + N_1 K_1(pr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{snk} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{z4} &= \frac{N_{10} R_2}{5h R_3} \int_0^{\infty} \frac{D \operatorname{snkh}}{k^2} N_3 \frac{N_2 I_0(pr) - N_1 K_0(pr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \\
 &\cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{cosk} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$B_{r5} = \frac{NI_0 R_2}{2hR_3 R_4} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k}{k} \frac{N_3 K_1(kr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{sinc} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (23)$$

$$B_{z5} = \frac{NI_0 R_2}{2hR_3 R_4} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k}{k} \frac{N_3 K_0(kr)}{M_1 K_0(kR_1) - M_2 I_0(kR_1)} \cdot \sum_{n=1}^{12} e^{j(\omega t - \alpha_n)} \operatorname{cosec} [z - (2n-1)(h+h_1)] dk \quad (24)$$

4. Sprawdzenie wyników pomiarowych i obliczeniowych

Obliczenia wielkości elektromagnetycznych przeprowadzono dla konkretnego układu wad-wzbudnik (rys. 1). Wymiary oraz parametry wzbudnika i wadu podano w tabelicy 1.

Tabelica 1

R_1 m	R_2 m	R_3 m	R_4 m	$2h$ m	$2h_1$ m	μ_0 H/m	G s/m	ω 1/s
0,075	0,101	0,135	0,160	0,036	0,006	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$1,64 \cdot 10^{-7}$	314,1

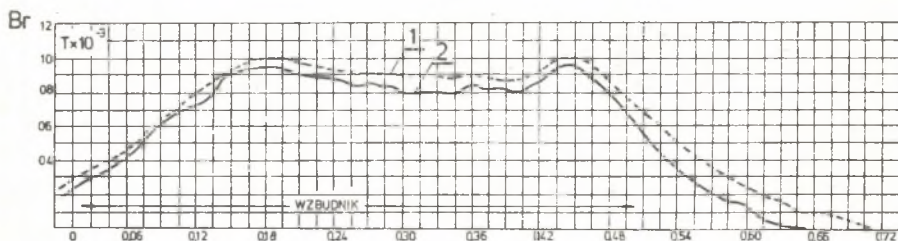
Jako wielkości obliczeniowe przyjęto:

$r = 0,135, 0,140, 0,160$ m - promienie obliczeniowe

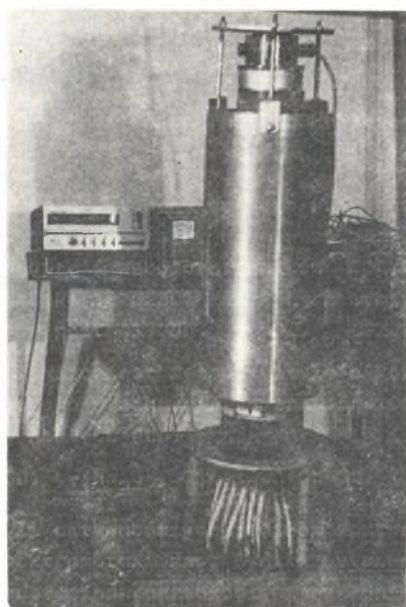
oraz

$z = -0,02, 0,003, 0,039, 0,162, 0,249, 0,252, 0,333, 0,339, 0,417, 0,465, 0,501, 0,701$ - długości obliczeniowe.

Całki (21) została obliczona na EMC Odra 1305 metodą Simpsona. Otrzymany rozkład składowej indukcji magnetycznej B_r przedstawiła krzywa 1 na rysunku 3.



Rys. 3. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej
1 - krzywa obliczeniowa, 2 - krzywa pomiarowa



Rys. 4. Widok układu doświadczalnego podczas prób

Dla sprawdzenia otrzymanych wyników zbudowano układ (rys. 4). Pomiar składowej indukcji magnetycznej B_r przeprowadzono na wsadzie z cynku wykonanym w kształcie tulei. Rozkład składowej promieniowej B_r indukcji magnetycznej na powierzchni tulei cynkowej przedstawia krzywa 2 na rys. 3.

5. Podsumowanie

W pracy przeanalizowano pole elektromagnetyczne w indukcyjnym układzie zawierającym przewodzący wsad rurowy z umieszczonym wewnątrz wzbudnikiem trójfazowym. Mimo uproszczeń poczynionych do obliczeń oraz przyjętego modelu obliczeniowego, otrzymane w niniejszym opracowaniu wyniki posiadają, zdaniem autorów, dużą wartość teoretyczną i praktyczną. Obliczenia podstawowych parametrów indukcyjnego układu grzejnego, takich jak potencjał wektorowy A i indukcja magnetyczna B , stanowią punkt wyjścia do obliczenia prądu indukcyjnego, jak również mocy we wsadzie.

LITERATURA

- [1] Fikus F., Wieczorek T., Góra St., Szczepanski Z.: Obliczanie parametrów elektromagnetycznych dozownika trójfazowego do ciekłych metali. Hutnictwo T.I, Gliwice 1979.
- [2] Fikus F.: Pole magnetyczne w cylindrycznych nagrzewnicach indukcyjnych o skończonej długości. Hutnictwo z. 4, 1974.
- [3] Góra St.: Analiza możliwości sterowania procesami opróżniania przy pomocy urządzeń magnetohydrodynamicznych wybranych pieców metalurgicznych. Praca doktorska, Politechnika Śląska 1980.
- [4] Sajdak Cz.: Analiza pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzejnym płyta wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki z. 4, 1977.

Recenzent: Prof. dr inż. Maciej Krakowski

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИНДУКЦИОННОЙ ПОДОГРЕВАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ТРУБНАЯ ЗАГРУЗКА — ИНДУКТОР С ТРЁХФАЗНЫМ БЕГУЩИМ ПОЛЕМ

Р е з ю м е

В работе проведён анализ электромагнитного поля в индукционной подогревающей системе, состоящей из трубной загрузки и внутреннего индуктора с цилиндрической обмоткой на магнитопроводе. Для расчётов применён метод преобразования Фурье [1,2]. Представлены уравнения определяющие распределения векторного потенциала и магнитной индукции. Проведённые расчёты и измерения показали хорошее совпадение результатов.

ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN INDUCTION
HEATING SYSTEM CONTAINING PIPING CHARGE AN INDUCTOR
WITH THREE-PHASE MAGNETIC FIELD

S u m m a r y

This paper presents an analysis of electromagnetic field in induction heating system containing piping charge with outer inductor composed of cylindrical windings placed on a magnetic core. In the calculations use has been made of, so called, Fourier's integral method (1,2). Formulae describing the distribution of vector potential and magnetic induction have been presented. The convergence of results of calculations and measurements is good.