ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: GÓRNICTWO z. 205 Nr kol. 1179

Wiesław PIWOWARSKI
Zygmunt NIEDOJADŁO
Instytut Geodezji Górniczej i Przemysłowej
AGH, Kraków

WYZNACZANIE PARAMETRÓW MODELU PRZEMIESZCZEŃ PIONOWYCH PRZY NIEPEŁNYCH WYNIKACH OBSERWACJI ZJAWISKA DEFORMACJI GÓROTWORU W STANIE NIEUSTALONYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązania dotyczące optymalizacji parametrów modeli deformacji górotworu w stanie nieustalonym. Zaprezentowano dwie metody wyznaczania parametrów: metodę największego spadku i metodę regresji oraz charakterystyki użytkowe obu metod.
Dla celów optymalizacji zdefiniowano procedurę wyznaczania brakujących obserwacji wyników pomiaru. Uzupełniona - z wykorzystaniem stosownej procedury - macierz wyników pomiarów geodezyjnych zapewnia stabilność algorytmu identyfikacji. Stąd też metodyka realizacji postawionego zadania optymalizacyjnego jest spójna pod względem formalnym oraz uzasadniona merytorycznie.

DETERMINATION OF PARAMETERS OF A VERICAL DISPLACEMENT MODEL IN THE CASE OF INCOMPLETE OBSERVATRIONS OF ROCKMASS DEFORMATION PROCESS IN ITS DYNAMIC STATE

Summary. The paper presents a discussion on optimization of dynamic rockmass deformation parameters. Two methods of parameter identification: the steepest descent method and regression, are presented and assessed from the point of view of practical applications.
A procedure of determination of missing observations, for the needs of optimisation, is defined. The matrix of geodetic measurements, completed with the use of the procedure, secures stability of the identification algorithm. As a result, the presented method is found to be coherent and sound.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРО МОДЕЛИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ НАБЛЮДЕНИЙ ЯВЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНОГО МАССИВА В НЕУСТАНОВИВ

Резюме. В работе рассматриваются вопросы оптимизации параметров моделей деформации горного массива в неустановившемя состоянии.
Представляются два метода определения параметров: метод самого большого падения и метод регресси,а также экоплуатационные характеристики обоих методов. Для целей оптимизации дается дефиниция процедуры определения недостающих наблюдений результатов съемки. Пополненная - с использованием соответствующей процедуры - матрица результатов геодезийных съемок, обеспечивает стабильность алгоритма идентификации. Поэтому методика реализации поставленного оптимизационного задания когерентна в формальном отношении и по своему существу обоснована.

1. WPROWADZENIE

Podstawowym wymuszeniem powstawania deformacji górotworu jest - co skądinąd wiadomo - wpływ eksploatacji podziemnej. Mechanizm zjawiska deformacji przebiega w sposób nieco odmienny w przypadku wybierania złoża pokładowego tzw. systemem z zawałem stropu inaczej z podsadzką. Prowadzone badania przekształceń geomechanicznych górotworu - zwłaszcza pomiary geofizyczne - nad eksploatacją górniczą pozwalają wyróżnić (w płaszczyźnie pionowej) określone strefy.

W przypadku eksploatacji zawałowej obszar deformacji zawiera z reguły następujące strefy.

- strefa zniszczenia makrociągłości warstw stropowych, czyli zawał stropu bezpośredniego,
- strefa spękań,
- strefa ugięcia stropu zasadniczego.

Inaczej przedstawia się konfiguracja obszaru deformacji w wyniku eksploatacji z podsadzką. W tym przypadku strefa zawału nie występuje, a strefa spękań zaznacza się niekiedy w obszarze stropu bezpośredniego, dominuje tu strefa ugięcia.

Ustalona w wyniku badań in situ konfiguracja obszaru deformacji stanowi przedmiot wielorakich badań. Racjonalny opis strefy zawału sprowadza się najczęściej do określenia zasięgu tej strefy nad eksploatowanym pokładem.

Również strefa **spękań** jest trudna (lub niemożliwa) do zdefiniowania ilościowego. Z drugiej strony obydwie strefy (zawał, spękania) stanowią największe zagrożenie dla bezpośredniej działalności lub dla obiektów inżynierskich w tych strefach. Wprawdzie strefy te wypełniają (objętościowo) niewielką część przestrzeni deformacji i posiadają **pragmatykę empiryczną**, jednak problem dalej pozostaje.

Przeważająca część przestrzeni deformacji - w rozumieniu geometrii - to **strefa ugięcia** obejmująca również **powierzchnię terenu**. Właśnie strefa ugięcia stanowi przedmiot wielu różnorodnych prac badawczych.

Niniejsze rozważania dotyczyć będą **estymacji parametrów** modelu procesu deformacji ugięcia pod wpływem eksploatacji podziemnéj (stan nieustalony). Przy czym optymalizację modelu przeprowadzono na bazie wyników pomiarów przemieszczeń pionowych przy brakujących pomiarach - w sensie pojedynczych obserwacji. Przyjęto tu założenie, że ośrodek (górotwór) w obszarze strefy ugięcia jest ciągły.

2. MODEL PROCESU

Pod względem metodologicznym wyróżnia się tu:

- opis wektorowego pola przemieszczeń w stanie ustalonym $\vec{U}$

$$u_x = u(x,y,z) = u$$

$$u_y = v(x,y,z) = v$$

$$u_z = w(x,y,z) = w$$

gdzie:

u_x, u_y, u_z - składowe wektora przemieszczeń U o pierwotnych współrzędnych (x,y,z) będących funkcjami tych współrzędnych.

Do opisu przyjęto kartezjański układ współrzędnych, gdzie płaszczyzna (x,y) pokrywa się z płaszczyzną stropu eksploatowanego pokładu poziomo zalegającego. Oś "z" jest skierowana do góry (w kierunku powierzchni). Podstawowe kierunki prac badawczych w zakresie opisu procesu deformacji w stanie ustalonym obejmują:

- rozwiązania oparte na formułach całkowych [5, 7],
- prace bazujące na teorii ośrodka ciągłego [2, 3, 9],
- teoria ośrodka stochastycznego [4, 11],
- **modelowanie pola przemieszczeń w stanie nieustalonym U(x,y,z,t)**

$$u_x = u(x,y,z,t) = u(\cdot\,,t)$$

$$u_y = v(x,y,z,t) = v(\cdot\,,t)$$

$$u_z = w(x,y,z,t) = w(\cdot\,,t).$$

Ze względu na czasoprzestrzenny charakter zjawiska deformacji górotworu zachodzi konieczność opisu procesu w stanie nieustalonym. Ilustrację badań w tym zakresie przedstawił K. Trojanowski [14]. Istotny wpływ na rozwój badań nad zagadnieniem działania czynnika czasu wiąże się z pracami polskich uczonych [6, 10] - szczególnie S. Knothego [6].

Przedmiotem opisu będzie tu jedynie **pole przemieszczeń pionowych**

$$u_z = w(x,y,z,t) = w(\cdot\,,t)\ .$$

Korzystając z [13], opis przemieszczeń pionowych w stanie nieustalonym, dla rozwijającej się eksploatacji podziemnej, przedstawia tu zależność (1).

$$W(t_n) = \sum_{i=1}^{n} W_i^k\{1 - \exp[-(n-i+1)*c*\Delta t\}\ , \tag{1}$$

gdzie:

Δt - przyrost czasu trwania zjawiska,

$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$,

$i = \{1,2,\dots,n\}$ kolejne dyskretne chwile czasu,

W_i^k - obniżenie końcowe w chwili n.

Na podstawie [5] W_i^k określone jest zależnością (2)

$$W_i^k = \frac{a*g}{r^2} \iint \exp\left[-\pi\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2}\right)\right] dP_i\ , \tag{2}$$

$$r = \frac{H}{tg\beta}$$

gdzie:

a - parametr (współczynnik eksploatacji),

g - miąższość eksploatowanego pokładu,

H - głębokość zalegania złoża (pokładu),

β - kąt zasięgu (rozproszenia) wpływów głównych,

r - promień rozproszenia wpływów głównych.

Zależność (1) - w formie użytkowej - wymaga określenia zbioru parametrów $\varphi = \{a, tg\beta, c\}$. Wyznaczenie jednocześnie wszystkich parametrów modelu (1) - zbiór φ - jest problemem złożonym, ponadto operacja taka byłaby niejednoznaczna, albowiem odwzorowanie (1) nie stanowi ścisłego opisu zjawiska (wyników pomiaru). Zapiszmy więc zależność (1) nieco inaczej, a mianowicie:

$$w(\cdot\ ,t) = \sum_{i=1}^{n} W_i^k(\cdot)*f(c,t_i), \tag{3}$$

stąd zbiór parametrów φ składa się ze zbioru

$$\varphi_1 = \{a, tg\beta\} \wedge \varphi_2 = \{c\}\ ,$$

gdzie:

$$\{c \in \varphi_2 : (c \in \varphi_1) \wedge (c \in \varphi_2)\}\ ;$$

Problem wyznaczenia parametrów zbioru φ_1:$\{a, tg\beta\}$ w teorii S. Knothego stanowi istotne zagadnienie. Wielkości te mogą być wyznaczone dla konkretnych warunków górniczo-geologicznych, w zasadzie dopiero po zrealizowaniu procesu. Powyższy warunek (istnienie fizyczne zbioru wyników pomiaru np. obniżeń w stanie asymptotycznym) mocno ogranicza metodykę prognozowania wskaźników deformacji. W tym przypadku parametry teorii $\{a, tg\beta\}$ w procesie obliczeniowym zadajemy jako ***wielkości prawdopodobne***, co naturalnie rzutuje na dokładność opisu. Względy formalne ograniczają tu inną metodologię dla stanu ustalonego. Stąd identyfikacja modelu (stan nieustalony) - formuła (3) dotyczyć będzie parametru "c".

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Załóżmy, że dana jest seria "l" pomiarów dotycząca "m" punktów obserwacyjnych niecki obniżeniowej oraz wygenerowano na podstawie (2) macierz przemieszczeń pionowych (II)

macierz wyników pomiaru obniżeń (stan nieustalony)

$$W^p = \begin{bmatrix} w^p_{11}, & w^p_{12}, & \dots, & w^p_{1m} \\ w^p_{21}, & w^p_{22}, & \dots, & w^p_{2m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w^p_{l1}, & w^p_{l2}, & \dots, & w^p_{lm} \end{bmatrix} \tag{I}$$

gdzie:

m - ilość punktów obserwacyjnych,

l - długość serii obserwacji (liczba cykli pomiarowych),

w^p_{ij} - przemieszczenie pionowe w "i"-tej serii "j"-go punktu obserwacyjnego

oraz

macierz przemieszczeń pionowych według (2) - stan ustalony

$$W^k = \begin{bmatrix} w^k_{11}, & w^k_{12}, & \dots, & w^k_{1m} \\ w^k_{21}, & w^k_{22}, & \dots, & w^k_{2m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w^k_{n1}, & w^k_{n2}, & \dots, & w^k_{nm} \end{bmatrix} \tag{II}$$

n - długość serii kwantowania czasu (ilość tzw. czasookresów) $n \geq 1$.

Optymalizacja modelu (3) polegać będzie na określeniu takiej wartości parametru c_{opt}, aby:

$$Q_j(c) = \sum_{i=1}^{m} \left[w_{ji}^{p} - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}^{k} * f(c_j, t_k) \right]^2 = \min \qquad (4)$$

4. OPTYMALIZACJA MODELU

Jednym ze sposobów rozwiązania sformułowanego problemu (4) może być metoda największego spadku [8]. Idea tej metody jest następująca:
Niech $Q \subset R^n$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni n-wymiarowej i $f\colon Q \Rightarrow R$ jest funkcją ciągłą rzeczywistą, wówczas przyjmując wartość początkową c_0, tworzymy ciąg $\{c_p\}$ według (5)

$$c_{p+1} = c_p + \alpha_p * g_p \ , \qquad (5)$$

gdzie:

g_p - kierunek największego spadku funkcji f w punkcie c_p,
α_p - rozwiązanie równania (6)

$$f(c_p + \alpha_p * g) = \min_{\substack{\alpha \Rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} f(c_p + \alpha * g) \qquad (6)$$

Z kolei kierunek największego spadku jest to wektor unormowany:

$$\left.\frac{df}{dg_0}\right|_{c_0} = \inf_{\|g\|=1} \left.\frac{df}{dg}\right|_{c_0} , \qquad (7)$$

gdzie:

$\frac{df}{dg}$ - pochodna kierunkowa $(\nabla f(c_0))$

$$\nabla f(c_0) := \lim_{\substack{\alpha \Rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \frac{f(c_0 \pm \alpha \cdot g) - f(c_0)}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} f(c_0 + \alpha \cdot g)\Big|_{\alpha = 0}$$

Z kolei dla postawienia problemu optymalizacyjnego należy określić dwa zbiory zwane sub- i superróżniczką w punkcie "c", muszą to być zbiory zwarte i wypukłe. Jest to znaczne ograniczenie utylitarności metody. Ponadto metoda największego spadku - aczkolwiek efektywna analitycznie - przysparza wiele problemów numerycznych.
Przytoczenie idei tej metody ma na celu zasygnalizowanie możliwości oraz ograniczeń dotyczących analizy ilościowej danego problemu.

Rozwiązanie problemu (4) wygodniej jest - w sensie obliczeniowym - przeprowadzić ***metodą regresji***. Wówczas funkcja "f" może być złożoną nieliniową funkcją i słabsze są tu ograniczenia.

Związek (4) jest funkcją, która dla zadanych w^p_{ji} oraz c_j przyporządkowuje pewną nieujemną liczbę rzeczywistą, ponadto Q(c) jest szczególnym przypadkiem funkcji kwadratowej

$$Q(c) = \|S(c)\|^2 = S^T(c) * S(c) \tag{9}$$

Celem zanalizowania problemu optymalizacyjnego (4) rozwinięto na mocy wzoru Taylora funkcję Q(c) w szereg aż do drugiego wyrazu, mamy:

$$Q(c)> \approx Q(c_i) + (c-c_i) * Q'(c_i) + \frac{1}{2} (c-c_i) * H(c_i) , \tag{10}$$

gdzie:

$H(c_i)$ - wartość hesjanu w punkcie c_i.

Warunki wystarczające dla istnienia minimum funkcji Q(c) w punkcie "c" - jak wiadomo - są następujące:

$$Q'_j(c) = 0 \tag{a}$$

$$(j = 1,2,...,1)$$

$$H(c) > 0 \tag{b}$$

Wstawiając (a) do (10), otrzymano:

$$Q(c) - Q(c_i) = 0,5(c-c_i)^T * H(c_i)*(c-c_i) . \tag{11}$$

Jeżeli macierz H jest dodatnio określona, wówczas minimum funkcji Q(c) otrzymamy rozwiązując układ równań:

$$H(c_i)*(c-c_i) = Q'(c_i) \tag{12}$$

W celu wyznaczenia hesjanu $H(c_i)$ skorzystano z podstawienia (9), wówczas funkcję S(c) można rozwinąć w szereg Taylora, do drugiego wyrazu mamy więc:

$$Q'(c_i) = S'(c_i)^T S(c_i) \tag{13}$$

oraz macierz H

$$H(c_i) = S'(c_i)^T S'(c_i) \tag{14}$$

Formalnie dla określenia parametrów c_i według (12) wystarcza struktura modelu (1) oraz macierz wyników (I). Z dokonanych obliczeń wynika, że macierz (13) jest bliska osobliwej, stąd w rachunkach ową macierz poddajemy regularyzacji przez dodanie macierzy γI (I - macierz jednostkowa, γ - współczynnik). Regularyzacja macierzy $S'(c_i)^T S'(c_i)$ pozwala uzyskać stabilne rozwiązanie.

5. ESTYMACJA BRAKUJĄCYCH WYNIKÓW POMIARU

Często się zdarza, że macierz obserwacji procesu jest niekompletna, brakuje niektórych wyników pomiaru. Najczęściej przyczyną brakujących wyników pomiaru jest fizyczne zniszczenie punktu (punktów).
Określanie wartości brakujących pomiarów w danej serii obserwacji zanalizowano w aspekcie identyfikacji modelu (3 lub 1).
Jeżeli przez "l" oznaczymy liczbę wszystkich obserwacji przemieszczeń pionowych w danej sieci, tzn. liczbę wierszy macierzy obserwacji W^p (I), a przez l_0 - liczbę komplentych obserwacji macierzy W^p. Ponadto l_0 są to obserwacje początkowe (pierwsze wiersze macierzy W^p), natomiast $l-l_0$ wiersze macierzy W^p, w których brakuje danych, wówczas macierz obserwacji możemy zapisać w postaci dwóch macierzy W^p_1 i W^p_2, a wymiary macierzy wynoszą odpowiednio $l_0 \times m$ i $(l-l_0) \times m$.
Pierwsza z nich zawiera kompletne wyniki pomiaru, np. obniżeń, druga jest niekompletna.

$$W_1^p = [w_{ij}^p] \quad \begin{matrix} i = 1,2,\dots,l_0 \\ j = 1,2,\dots,m \end{matrix}$$

$$W_2^p = [w_{ij}^p] \quad \begin{matrix} i = l_0 + 1,\dots,l \\ j = 1,2,\dots,m \end{matrix} \tag{15}$$

Identyfikacja parametrów modelu przy brakujących obserwacjach może przybierać dwie formy:

- metoda uwzględniania znanych i odrzucania brakujących obserwacji,
- metoda uwzględniania znanych i estymacji brakujących obserwacji.

Jeżeli brakuje niektórych obserwacji w macierzy W_2^p, to również niekompletny jest wektor $Q_j(c)$, co wynika z faktu, że nie możemy wykonać wszystkich sumowań w (4). Wówczas w miejsce brakujących obserwacji pod znak sumy w (4) wstawiamy zero, co naturalnie wpływa na wielkość parametru "c".

Znacznie lepsze efekty identyfikacji otrzymujemy, jeżeli w miejsce brakujących obserwacji podstawiamy wielkości obliczone na podstawie formuły analitycznej. Najprostsza metoda wyznaczania brakujących pomiarów to metoda uśredniania.

Ze względu na charakter zjawiska dokładniejsze są nieliniowe metody wyznaczania brakujących pomiarów, np. krzywa drugiego lub trzeciego stopnia. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami niech w j-tej serii obserwacyjnej brakuje pomiaru w punkcie $l_0 + 1$ (rys. 1), wówczas wartość obniżenia w tym punkcie można wyznaczyć z $l_0 - i$ punktów pomiarowych lub $l_{0+2} + i$, gdzie:

$i \geq 2$ dla krzywej drugiego stopnia,

$i \geq$ dla krzywej trzeciego stopnia.

Krzywa II stopnia

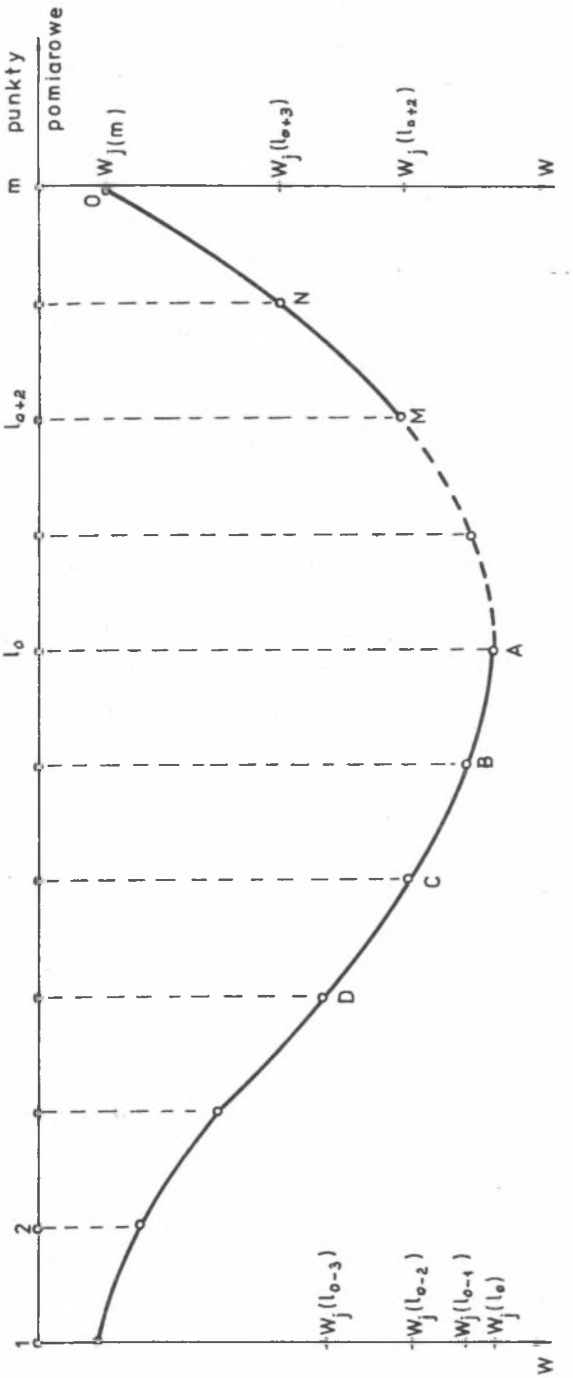
(odległości pomiędzy punktami pomiarowymi jednakowe rys. 1). Równanie krzywej drugiego stopnia zgodnie ze wzorem interpolacyjnym Lagrange'a (rys. 1).

$$W_j^I(l_{0+1}) = 3*W_j(l_0) - 3*W_j(l_{0-1}) + W_j(l_{0-2})$$

lub (16)

$$W_j^{II}(l_{0+1}) = 3*W_j(l_{0+2}) - 3*W_j(l_{0+3}) + W_j(l_{0+4})$$

Najbardziej prawdopodobna wartość $\bar{W}_j(l_{0+18})$ to wartość średnia z obu wyników.



Rys. 1. Schemat "uzupełniania" brakujących pomiarów. Wyniki obserwacji w "j"-tej serii

——— wynik pomiaru, ----------- wynik aproksymacji

Fig. 1. Comparison diagram of sequence convergence:

Krzywa III stopnia

Prowadzimy krzywą trzeciego stopnia przez punkty:

$$A(l_0, W_{jl_0});\quad B(l_0, W_{jl_0});\quad C(l_0, W_{jl_0});\quad D(l_0, W_{jl_0})$$

$$W_j^{*}(l_{0+1}) = 4*W_j(l_0) - 6*W_j(l_{0-1}) + 4*W_j(l_{0-2}) - W_j(l_{0-3}) \tag{17}$$

powtarzając całość postępowania dla punktów:

$$M(l_{0+2}, W_{jl_{02}});\quad N(l_{0+3}, W_{jl_{0+3}});\quad O(l_{0+4}, W_{jl_{0+4}});\quad P(l_{0+5}, W_{jl_{0+5}})$$

otrzymamy:

$$W_j^{**}(l_{0+1}) = 4*W_j(l_{0+2}) - 6*W_j(l_{0+3}) + 4*W_j(l_{0+4}) - W_j(l_{0+5}) \tag{18}$$

Wynikiem prawdopodobnym jest wartość średnia z (17) i (18). Rzadko się zdarza w praktyce, by istniały równocześnie fizycznie warunki dla zastosowania obu zależności (16) lub (17) i (18), wówczas wybór jest funkcją warunków stosowania danej metody predykcji.

Pozostaje do rozstrzygnięcia, którą krzywą zastosować jako procedurę predykcji, decyduje kryterium dokładności "aproksymacji" istniejących wyników obserwacji - dokładność rozumiana jako metryka.

Przedstawiony algorytm identyfikacji modelu opisu zjawiska w stanie nieustalonym jest przedmiotem oprogramowania komputerowego.

6. PODSUMOWANIE

Zamieszczone w pracy rozważania dotyczą istotnego - w działalności inżynierskiej - problemu w obszarzę identyfikacji, ściślej optymalizacji modeli procesu deformacji górotworu w stanie nieustalonym.

Opis zjawiska należy do klasy modeli nieliniowych, a macierz wyników obserwacji jako baza odniesiona jest niekompletna, tzn. część punktów pomiarowych nie podlega obserwacjom geodezyjnym.

Dla tak sformułowanego problemu przedstawiono dwie metody optymalizacji parametrów modelu - preferując ze względu na stabilność rozwiązania metodę regresji. Ponadto zaprezentowano procedurę "określania" brakujących pomiarów macierzy W^p - a więc spójny algorytm.

LITERATURA

[1] *Demidowicz B.P., Maron I.A., Szuwałowa E.J.*: Metody numeryczne, Część II, PWN, Warszawa 1965.

[2] *Drzęźla B.*: Rozwiązanie pewnego przestrzennego zadania liniowej teorii sprężystości w zastosowaniu do prognozowania górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej wraz z oprogramowaniem. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej s. Górnictwo z. 91, Gliwice 1978.

[3] *Dymek F.*: Pewne płaskie i przestrzenne rozwiązanie ośrodka reologicznego i ich zastosowanie w mechanice górotworu. Archiwum Górnictwa t. XVIII, z. 2, 1973.

[4] *Klein G.*: Możliwości określania stanu deformacji w górotworze naruszonym eksploatacją górniczą rozpatrywanym jako ośrodek stochastyczny. Zeszyty Naukowe AGH seria Geodezja z. 58, Kraków 1979.

[5] *Knothe S.*: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa t. I, z. 1, 1953.

[6] *Knothe S.*: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa t. I, z. 1 Warszawa 1953.

[7] *Kochmański T.*: Obliczanie ruchów punktów górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej. PWN, Warszawa 1956.

[8] *Korn C.A., Korn T.M.*: Matematyka Część I i II, PWN, Warszawa 1983.

[9] *Litwiniszyn J.*: Równanie różniczkowe przemieszczeń górotworu. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. I, z. 1, 1953.

[10] *Litwiniszyn J.*: Wpływ czasu na stan odkształcenia i naprężenia górotworu. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. III, z. 4, 1955.

[11] *Litwiniszyn J.*: Application of the equation of stochastic processes to mechanics of losse bodies. Archiwum Mechaniki Stosowanej, t. 8, 1956.

[12] *Niemczyk O.*: Bergschadenkunde. Verlag Glückauf, Essen 1949.

[13] *Pielok J.*: Przebieg osiadania powierzchni w czasie przy komorowo-filarowej eksploatacji złóż soli. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, Geodezja 93, Kraków 1985.

[14] *Trojanowski K.*: O możliwościach aproksymowania czasoprzestrzennych zjawisk deformacji powierzchni wywołanych wpływem podziemnej eksploatacji górniczej. Rozprawa habilitacyjna GIG, Katowice 1964.

Rezenzent: Prof. dr hab. inż. **Mirosław CHUDEK**

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1991 r.