ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z. 1 Nr kol. 1318

ATTILA GYARMATHI
Kossuth Lajos University
Institute of Mathematics and Informatics
Debrecen, Hungary
H-4010 Debrecen P.O. Box. 12

OUADRATISCHE TRANSFORMATION UND PROJEKTIVE GEOMETRIE

Zusammenfassung. Eine ein–eindeutige Abbildung der Ebene, zur kwadratischen Transformationen gehörende ist betrachtet. Das Prinzip der Tranformation kann man aus zwei Zentralprojektionen des einschaligen Hyperboloides abzuleiten.

PRZEKSZTAŁCENIA KWADRATOWE W GEOMETRII RZUTOWEJ

Streszczenie. W pracy omówiono przekształcenie kwadratowe płaszczyzny na siebie, którego zasadę wyprowadzono z rozważań dwóch rzutów środkowych hiperboloidy jednopowłokowej, ze środków będących ustalonymi punktami tej powierzchni.

Es ist eine schöne Frage in der Geometrie: wie man zwei Ebenen ein – eindeutig Punkt für Punkt auf–einander abbilden kann.

Diese Theorie ist die allgemeine birationalen Transformationen in der Ebene – anders gesagt Cremonatransformationen –. Nach M. Nöether (1872) jede Cremonasche Transformation kann durch eine Reihe von quadratische Transformationen ersetzt werden.

In diesen Artikel geben wir einige Beispiele für Abbildung (birationale Transformation) erster Arts. Die Standard–Gleichungen (Transformationen) hierfür ist

$$\mathrm{I}\ (x_0, x_1, x_2) \overset{QT}{\longleftrightarrow} (x_1, x_2, x_0x_2, x_0x_1)$$

1. DIE ABBILDUNG

Mit den quadratischen Transformationen erster Arts der Ebebe Π läßt sich diese Abbildung (Selbstabbildung) in Verbindung bringen, wenn wir die Fläche $F^2 = R^2$ (Ringquadrik) aus zwei veschiedenen Zentren C_1 und C_2 auf die gleiche Ebene Π abbilden und die beiden Bilder P und P' des gleichen Punktes $\bar{P}$ von R^2einander zuordnen (Bild 1).

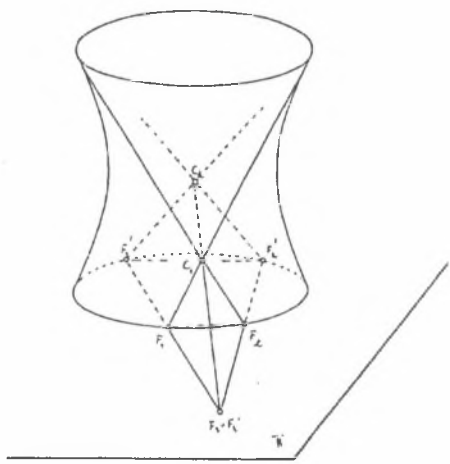

Bild 1

Die dadurch entstehende Transformation in der Bildebene Π ist offenbar quadratisch. Treffen die durch C_1 gehenden Erzeugenden $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ von R^2 in F_1 und F_2 die durch C_2 gehenden Erzengenden $\bar{f}_1'$ und $\bar{f}_2'$ aber in F_1' und F_2' die Bildebene Π, so schneiden sich F_1F_1' und F_2F_2' in dem jenigen Punkte, in welchem die Verbindungsgerade C_1C_2 der Bildebene Π begegnet. (Bild 1.)

Bezeichnen wir ihn mit F_3 und gleichzeitig mit F_3', so sind $F_1F_2F_3$ und $F_1'\,F_2'\,F_3'$ die Funadamentaldreiecke der entshenden quadratischen Verwandschaft.

Die drei Punkte F_i (i = 1, 2, 3) und die Gerade f_i (i = 1, 2,3) der Dreiecke heißen die Fundmentalpunkte („singuläre" Punkte) und die Fundamentalgerade, die Punkte F_i' und die Gerade f_i' heißen genauso und die zwei Dreiecken bilden das Fundamentalsystem der quadratische Transformation (*QT*) [4].

Die Fundamentalsystem besteht also immer aus zwei *F* - Dreiecke.

Die inverse quadratische Transformation (QT^{-1}) ist auch dieselbe Art.

Der Hauptsatz spielt eine wichtige Rolle bei quadratischer Abbildung.

Hauptsatz: Jede Ecke des ersten Figur (Figur ein von Fundamentaldreiecken von Fundamentalsystem) hat die Eigenschaft, daß die alle Punkte außerdem Eckpunkte einer bestimmtem Seite der zweiten Figur entsprechen und umgekehrt.

Zwei Punkkte, wie F_1 und F_1' bzw. F_2 und F_2' von Fundamentalsystem heißen in bezug auf QT adjungiert, F_3 und F_3' heißen in bezug auf QT prinzipalen [4.].

Bei der Abbildung jeder Punkt von k (wo k ist ein Kegelschnitt von Ringquadrik in Ebene Π) entspricht sich natürlich selbst. (Siehe Bild 2.)

In dem hier betrachten Fundamentalsystem gelten noch die weitere wichtige Sätze, wie folgt:

Staz 1. Einer Geraden a durch den Fundamentalpunkt F_2 entspricht eine Gerade a' durch den adjungierten Fundamentalpunkt F_2', die zwei Punktreihen a und a' sind projektiv.

Satz 2. Einer Geraden a, welche durch keinen Fundamentalpunkt der ersten Figur geht entspricht in QT eine Kegelschnitte a' durch die Fundamentalpunkte der anderen Figur – und umgekehrt. Die Punktreihe a ist zur Punktreihe a' projektiv.

Satz 3. Das Büschel von Geraden (a) durch F_2 ist zu dem Büschel von entsprechenden Geraden (a') durch F_2' projektiv.

Satz 4. Die Kegelschnitte a', welche einem Büschel von Geraden (a) durch einen von F_1, F_2, F_3 verschiedenen Punkt entsprechen, bilden ein zu (a) projektives Kegelschnittbüschel.

Satz 5. Die Verbindung gerade entsprechender Punkte P' und P gehen durch den prinzipalen Fundamentalpunkt $F_3 = F_3'$.

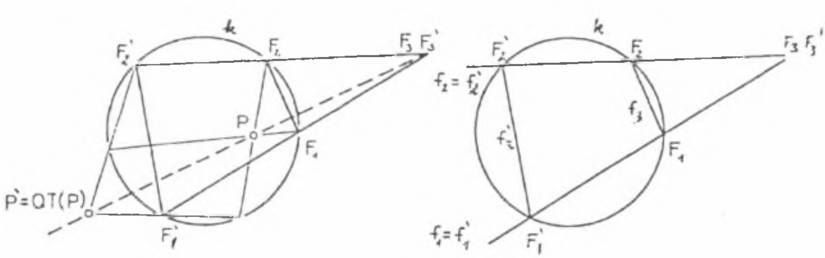

Bild 2

Nehmen wir jetzt das Fundamentalsystem mit dem Kegelschnitt in der Bildebene Π an. Wählen wir immer einen Kreis k als Kegelschnitt und auf ihm beliebig die Punkte F_1 F_2 F_2' F_3' (Bild 2).

Den Kreis benutzen wir, um die Büschel (F_1) und F_1' einer seits F_2 und F_2' anderseits projektiv zu bezeichnen. Wird also ein Punkt P beliebig angenommen, so ziehen wir Verbindungsgerade F_1P und F_2P. Nach dem zweiten Schnittpunkten derselben mit k laufen von F_1' bzw. F_2' die entsprechenden den Punkt P' begegnen. Jeder Punkt von k entspricht sich dann selbst.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von F_1F_2 und F_1' F_2' mit X, so verdient noch Erwähnung daß die Gerade F_3X involutorisch in sich selbst übergeführt wird. Entspricht dem Punkte F_3 oder F_3' in beiden System der Punkt X.

Satz 6. Die Kreise k, welche die einem Büschel von Kreise k durch einen von F_1F_2 entsprechen bilden ein zu (k) projektive Kreisbüschel von F_1' F_2'.

Betrachten wir zweimal die quadratische Projektivität (QT^2) wenn die Gerade l auf s (s ist die Halbierungswinkelgerade von f_1f_2) senkrecht steht. Dann wird die Bildgerade eine symmetrische Kubik. [$P' = QT(P)$ und $P'' = QT(P')$]. [Bild 3.]

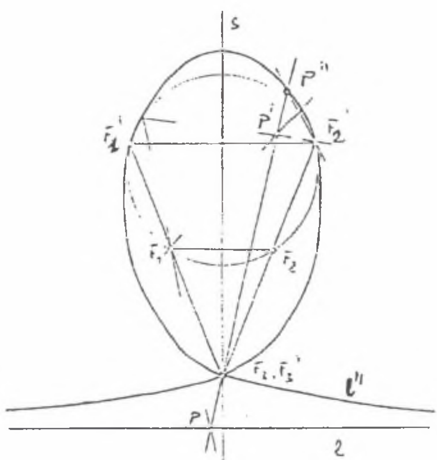

Bild 3

2. INVOLUTORISCHE TRANSFORMATIONEN (IQT)

Wir wollen jetzt die involutorischen quadratischen Transformationen betrachten.

$$IQT^2(P) = I$$

In einer solchen *IQT* müssen die Fundamentalpunkte der ersten Figur mit denen der zweiten zusammenfallen.

Nehmen wir das Fundamentalsystem mit dem Kreis in dem Bildebene Π der die Seiten f_1 und f_2 in den Punkten F_1 und F_2 berührt. Die Punkte F_3 und F_3' von *F.* – System sind die prinzipalen Fundamentalpunkten, die Punkte F_1 und F_1' bzw. F_2 und F_2' sind adjungierte Fundamentalpunkte. (Bild 4.)

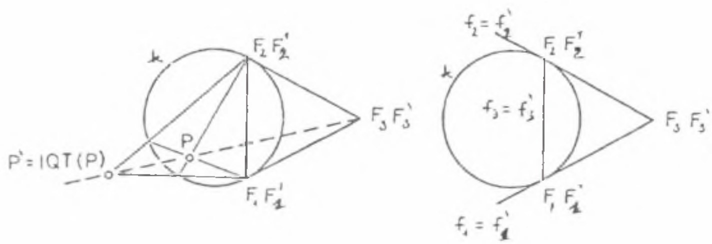

Bild 4

Wird also ein Punkt P beliebig angenommen so ziehen wir die Verbindugsgerade F_1P und F_2P. Nach den zweiten Schnittpunkten derselben mit Kreis k laufen von F_1' bzw F_2' die entsprechenden Strahlen, welche sich im entsprechenden P' begegnen. Wir bekommen zwei involutorische Bildpunktpaare (Bild 4.)

$$P : P' = IQT(P)$$

Verbindungsgerade PP' schneidet dann aus dem Kreis k zwei Punkte T_1, T_2, die zu den zwei ersten Punkten harmonisch liegen in *IQT*.

$$(PP'T_1T_2) = -1$$

In dem involutorischen Transformation gelten auch die Sätze I–VI. von 1. Abschnitt.

Satz 7. Das Kreisbüschel (k) durch die Fundamentalpunkte F_1F_2 entspricht sich selbst. (Bild 5.)

a, Ein Kreis t der Ringquadrik des Kreisbüschels (k) entspricht sich selbst $t = t'$ und die Punkte von t Punkt für Punkt entsprechen sich selbst.

b, Ein Kreis k von Kreisbüschel (k) entspricht sich selbst $(k = k')$ aber die Punktpaare P,P' sind involutorisch und zueinander zentralsymmetrisch.

c, Der Kreis u von Kreisbüschel (k) durch Fundamentaldreieck entspricht der unendlich fernen Gerade $u'\infty$.

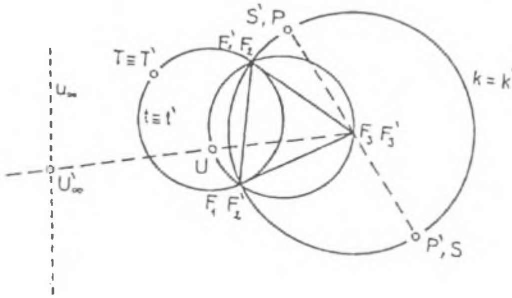

Bild 5

3. DIE ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DER *IQT*

In den vorigen Abschnitten eingeführten Betrachtungen bilden den Substanz der projektiven quadratischen Transformationen von Ebene Π.

Auf den Bilder 5. und 6. kann man die Abbildung und die Konstruktion der ebenen und räumlichen Kurven höherer Ordnung sehen. [2].

Einer gerade entspricht demnach ein Kegelschnitt, der den *F*.–Dreieck schreibt um, einem beliebigen Kegelschnitt entspricht eine Kurve wierter Ordnung, die in den *F*.–Punkten $F_1F_2F_3$ Doppelpunkten hat. (Bild 6.)

Einem Kreis, der Durch F_3 (unf nur F_3) hindurchgeht entspricht eine Kurve dritter Ordnung, welche in F_3 einen Doppelpunkt, in F_1 und F_2 noch einfache Punkte hat (Bild) 7, [6].

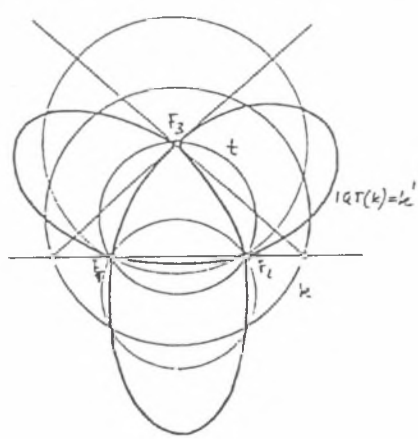

Bild 6

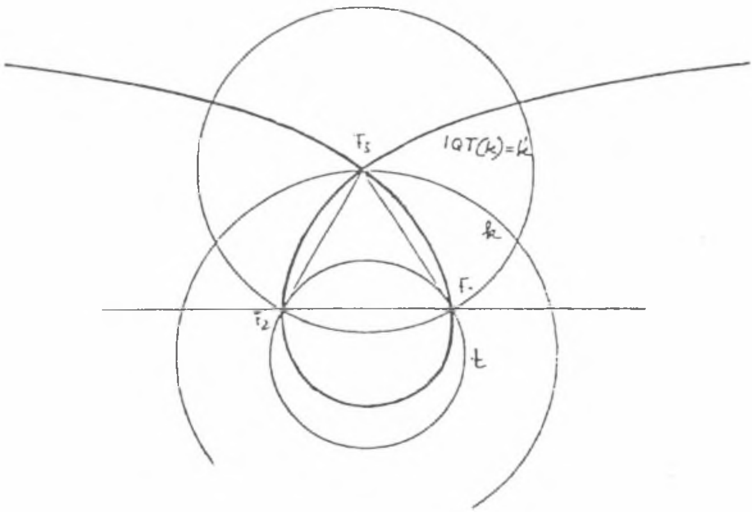

Bild 7

LITERATUR

[1] BRIESKORN, E.; KNÖRRER, M.; Ebene algebraische Kurven (1981), s. 623, Birkhäuser, Basel,–Boston–Stuttgart.

[2] CZECH, L.; Inwolucyjne przekształcenia kwadratowe w ujęciu geometrii konstrukcyjnej (1992), Monografia 133, Kraków.

[3] CZECH, L.; *PK: Wybrane zagadnienia geometrii wykreślnej.* Rzut stożkowy (1988), Monografia 64, Kraków.

[4] JUEL, C;, Vorlesungen über Projektive Geometrie (1934), s.208-209, Verlag von Springer, in Berlin.

[5] WIELEITNER, H.; Algebraische Kurven. (Zweiter Teil) (1919), Sammlung Goschen Berlin und Leipzig.

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest przekształcenie kwadratowe płaszczyzny na siebie, którego zasadę można wyprowadzić rozważając dwa rzuty na tę płaszczyznę pomocniczo przyjętej hiperboloidy jednopowłokowej przy założeniu, że środki rzutów są ustalonymi punktami hiperboloidy.

Posługując się twierdzeniami geometrii rzutowej wskazano na pewne własności przekształcenia dotyczące obrazów krzywych stopnia drugiego, w szczególności okręgów. Omówiono przekształcenie na siebie szczególnych okręgów oraz przekształcenie na krzywe rzędu czwartego okręgów o ogólniejszym położeniu. Wśród tych ostatnich przedstawiono przykłady:

– obrazu okręgu rozłącznego z punktami podstawowymi przekształcenia – obrazem tym jest krzywa rzędu czwartego, dla której punkty podstawowe są punktami podwójnymi,

– obrazu okręgu przechodzącego przez jeden i tylko jeden punkt podstawowy - obraz takiego okręgu jest krzywą rzędu trzeciego, której punkt podwójny jednoczy się z tym punktem podstawowym.

Omówiono również złożenie dwóch rozpatrywanych przekształceń kwadratowych ilustrując je przykładem szczególnie przyjętej względem punktów podstawowych prostej. Obrazem takiej prostej okazuje się być symetrycznie położona względem punktów podstawowych krzywa rzędu trzeciego.