ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z.1 Nr kol. 1318

KRZYSZTOF **GERLIC**
HENRYK **GLIŃSKI**
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechniki Śląskiej

KOMPUTEROWE BADANIE ZBIEŻNOŚCI PEWNEGO CIĄGU PUNKTÓW

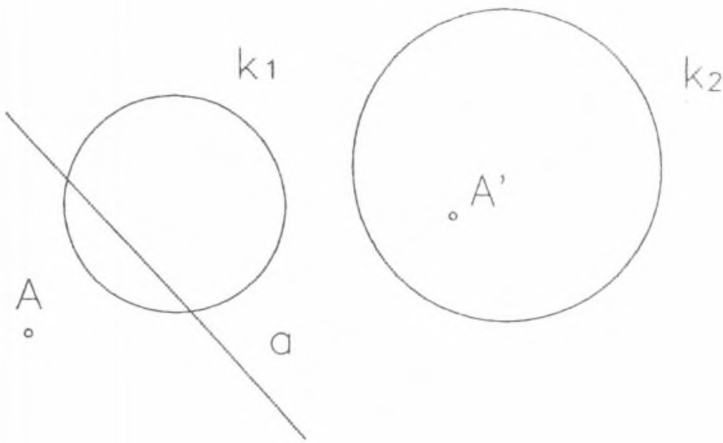
Streszczenie. W artykule przedstawiono analizę ciągu punktów, które można otrzymać poprzez wielokrotne powtarzanie pewnego przekształcenia rzutowego. Przygotowano program komputerowy wspomagający analizę i wizualizację tego problemu. Główny nacisk położono na zbadanie elementów charakterystycznych ciągu, takich jak granice i punkty stałe.

COMPUTER AIDED RESEARCH OF CONVERGENCE OF A SEQUENCE OF POINTS

Summary. This paper presents the analysis of sequences of points which can be obtained by multiple repetition of some projective transformation. The computer program has been prepared which aids analysis and visualisation this problems. The main stress has been laid on searching for characteristic elements such as boundaries and fixed points.

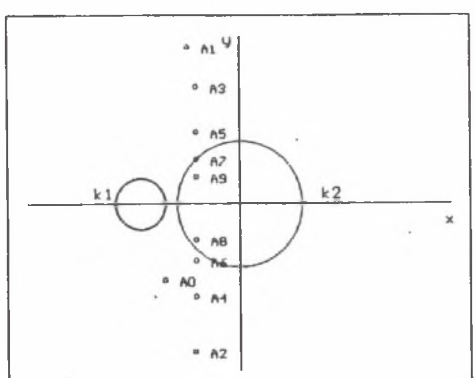
1. Definicja przekształcenia

Ustalmy na płaszczyźnie euklidesowej uzupełnionej elementami niewłaściwymi dwa dowolne okręgi k_1 i k_2. Oznaczmy poprzez f przekształcenie rzutowe będące złożeniem biegunowości f_1 i f_2 względem okręgów k_1 i k_2 (rys. 1). Obrazem dowolnego punktu A w biegunowości f_1 jest prosta a (biegunowa punktu A względem okręgu k_1). Obrazem prostej a w biegunowości f_2 jest punkt A' (biegun prostej a względem okręgu k_2), będący obrazem punktu A w przekształceniu $f = f_2\ f_1$. Rozpatrzmy ciąg punktów $A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}, ...,$ (rys. 2), w którym dla dowolnego k zachodzi $A_{k+1} = f(A_k)$ (rys. 1). Powstaje pytanie, czy ciąg punktów A_i jest zbieżny, tzn. czy istnieje taki punkt A_0, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka wartość k, że dla każdego $k > k_0$ zachodzi $|A_0, A_k| < \varepsilon$. Rozważenie problemu zbieżności jest podstawowym tematem pracy.



Rys.1

Oczywiście proponowane przekształcenie można rozważać dla dowolnych stożkowych; okręgi wybrano z uwagi na prostszą postać analityczną przekształcenia i możliwość wykreślnego sprawdzania poprawności obliczeń.



q=-1.6000 r= 0.4000 x0=-1.20 y0=-1.20

Rys. 2

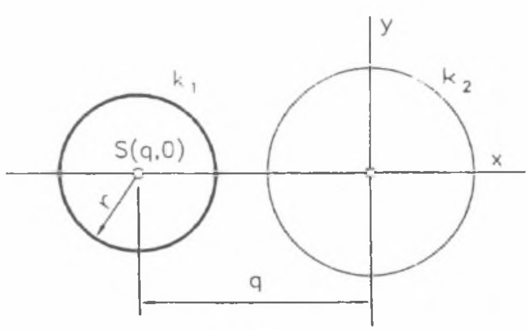
2. Zastosowana metoda badawcza

Analityczna postać rozpatrywanego przekształcenia jest dość złożona i trudno wykorzystać ją do badania zbieżności ciągów punktów. Autorzy nie znaleźli również efektywnej metody zbadania zbieżności ciągu punktów przy wykorzystaniu geometrii rzutowej. Postanowiono więc wykorzystać do badań komputer i dokonać analizy numerycznej zagadnienia, polegającej na wyznaczeniu ciągu punktów dla możliwie wielu przypadków położenia okręgów i próbie ich uogólnienia. Autorzy pracy mają świadomość, co pragną wyraźnie podkreślić, że rozważenie nawet znacznej liczby przypadków nie może stanowić dowodu, że zaobserwowana własność czy też zależność zachodzi zawsze. Tego rodzaju rozważania poprzez swoją poglądowość ułatwiają zrozumienie zagadnienia i pozwalają na stawianie hipotez badawczych i wyławianie przypadków szczególnych, mogących stanowić impuls do rozważań teoretycznych.

W celu zbadania przekształcenia przygotowano program komputerowy w języku Turbo-Pascal. Składa się on z trzech zasadniczych części: generatora założeń, testera zbieżności i rejestratora wyników.

a. Generator założeń

Nie zmniejszając ogólności założeń można przyjąć, że środek okręgu k_2 znajduje się w początku układu współrzędnych, a jego promień wynosi 1, środek okręgu k_1 znajduje się zawsze na osi x w punkcie $S(q, 0)$, a jego promień równa się r (rys. 3). Generator założeń automatycznie ustala położenie okręgu k_1 zmieniając jego promień w przedziale $< r_1, r_2 >$ krokiem Δr, a położenie jego środka w przedziale $< q_1, q_2 >$ krokiem Δq.



Rys. 3

b. Tester zbieżności

Dla każdego przypadku założeń, podanego przez generator założeń, program ustala punkt początkowy $A(x, y)$, wybierając kolejno z przedziału $< x_1, x_2 >$ i $< y_1, y_2 >$ krokiem Δx i Δy. Dla każdego punktu początkowego program oblicza kolejne wyrazy ciągu, licząc je do momentu, aż odległość między dwoma sąsiednimi punktami będzie mniejsza od ustalonej wartości ε lub też obliczonych zostanie n_0 wyrazów ciągu. Oprócz odległości między dwoma kolejnymi punktami, obliczanej jako pierwiastek z sumy kwadratów różnic odpowiednich współrzędnych punktów, badano również oddzielnie zbieżność po współrzędnych x i y oddzielnie.

c. Rejestrator wyników

Moduł ten powoduje automatyczny zapis do pliku położenia środka i promienia k_1 dla każdego rozpatrywanego przypadku. Następnie zapisywane są dla każdego rozpatrywanego punktu początkowego liczba iteracji i współrzędne dwóch ostatnich uzyskanych punktów. Rejestrowane były również wszystkie przypadki szczególne, zakłócające normalny tok obliczeń.

Obliczenia realizowano przy wykorzystaniu typu zmienności *extended*, pozwalających na obliczenia z dokładnością 19-20 cyfr znaczących.

Dodatkowo opracowano program umożliwiający graficzną prezentację badanego przekształcenia na ekranie monitora i drukarce.

3. Wyniki badań

Opisany powyżej program uruchamiano wielokrotnie dla różnych przedziałów zmienności parametrów i kroków zmian. Z eksperymentów tych wynika, że istnieją zarówno takie położenia okręgów względem siebie, że ciągi punktów są rozbieżne, jak i takie, dla których istnieje granica. Przegląd wyników badań zamieszczono w tablicy 1. Poprzez a oznaczono liczbę różną od $\pm\infty$, zapis $y \to \pm\infty$ oznacza, że wartość bezwzględna y dąży do nieskończoności przemiennie poprzez wartości ujemne i dodatnie.

Tablica 1

Oznaczenie	Schematyczne położenie okręgów (okręg k_1 narysowano linia grubą)	Zbieżność współrzędnej x	Zbieżność współrzędnej y
A1		$x \to a$	$y \to 0$
A2		$x \to a$	$y \to \pm\infty$
A3		$x \to \pm\infty$	$y \to \pm\infty$

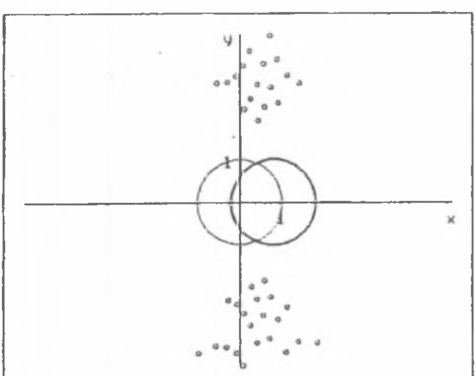
cd. tablicy 1

A4		$x \to 1$	$y \to +\infty$ lub $y \to -\infty$ w zależności od położenia punktu początkowego i znaku q
A5		$x \to a$	$y \to +\infty$ lub $y \to -\infty$ w zależności od położenia punktu początkowego i znaku q
A6		$x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$ w zależności od położenia punktu początkowego	$y \to +\infty$ lub $y \to -\infty$ w zależności od położenia punktu początkowego
B1		$x \to a$	$y \to 0$
B2		$x \to 1$	$y \to 0$
B3		$x \to \pm\infty$ punkty leżą na „hiperboli"	$y \to \pm\infty$ punkty leżą na „hiperboli"
B4		przekształcenie stałe, obrazem punktu *A* jest on sam	przekształcenie stałe, obrazem punktu *A* jest on sam
C1		$x \to a$	$y \to 0$
C2		$x \to 1$	$y \to 0$

cd. tablicy 1

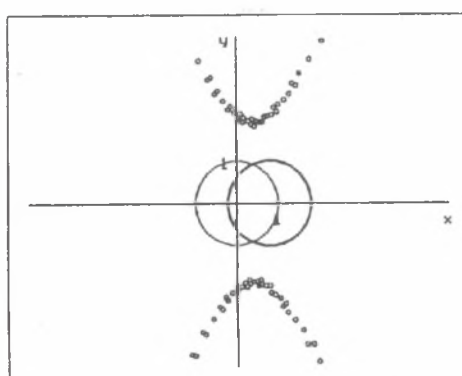
C3		$x \to \pm\infty$	$y \to 0$
C4		$x \to 1$	$y \to 0$
C5		$x \to a$	$y \to 0$
C6		$x \to 0$	$y \to 0$

Na ogół, jak to wynika z tablicy, ciągi punktów są zbieżne do pewnych punktów leżących na osi x. W trzech przypadkach (A2, A4 i A5) ciągi dążą do asymptoty prostopadłej do osi x, w jednym przypadku (C3) asymptotą jest oś x.



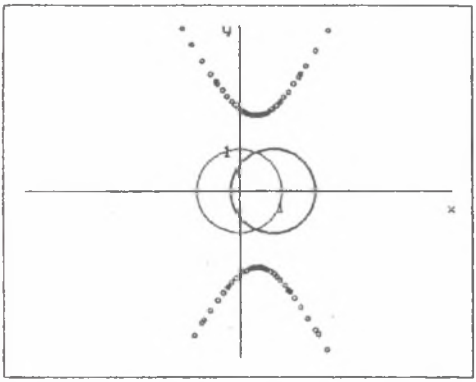
q= 0.8000 r= 0.9900 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys. 4



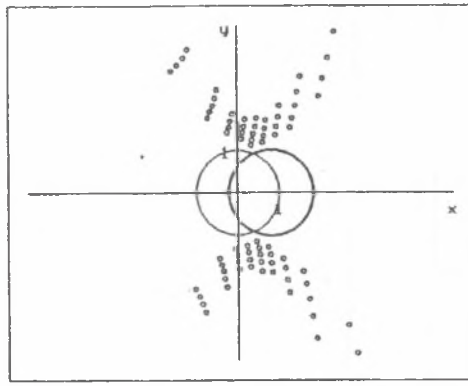
q= 0.8000 r= 0.9990 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys. 5



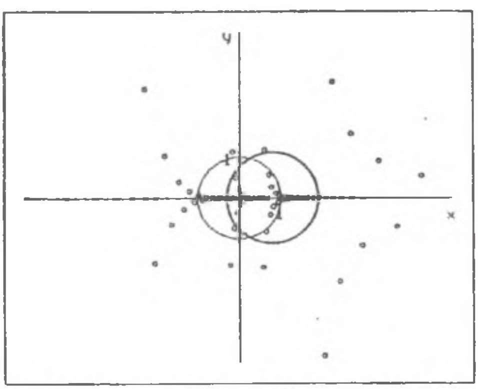
q= 0.8000 r= 1.0000 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys. 6



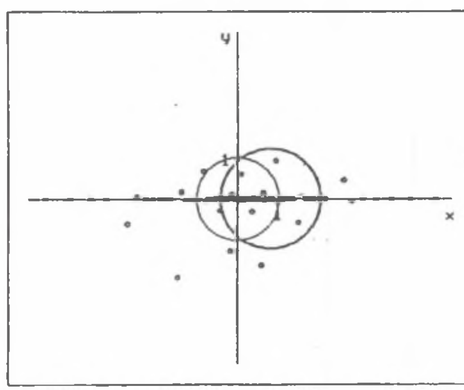
q= 0.8000 r= 1.0050 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys.7



q= 0.8000 r= 1.1000 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys. 8



q= 0.8000 r= 1.2000 x0=-3.00 y0= 7.00

Rys. 9

W przypadku B3 wydaje się, że punkty leżą na hiperboli (rys. 6), trudno to jednak udowodnić, toteż podano to w cudzysłowach. W przypadkach A6 iC6 (okręgi współśrodkowe) punkty rzeczywiście leżą na prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych i punkt początkowy. Wynika to z symetrii środkowej układu dwóch okręgów.

Wyjątkowo ciekawe obrazy ciągów punktów otrzymuje się w położeniach bliskich granicznym. Jako przykład zamieszczono ciągi otrzymane dla tego samego położenia środka okręgu k_1 i tego samego punktu początkowego, lecz różnych wielkości promienia okręgu k_1 (rys. 4 do rys. 9).

4. Uzasadnienie teoretyczne niektórych wyników

Zwróćmy uwagę, że jeśli rozpatrywany ciąg punktów jest zbieżny, to granica tego ciągu jest punktem stałym przekształcenia f. Biorąc pod uwagę definicję przekształcenia punkt stały przekształcenia musi mieć wspólną biegunową względem obydwóch stożkowych. W przypadku ogólnym istnieją trzy takie punkty, będące wierzchołkami trójkąta przekątnego czworokąta zupełnego określonego przez cztery punkty wspólne obydwóch stożkowych ([1], str. 142). Trójkąt przekątny jest trójkątem samosprzężonym względem obydwóch stożkowych – każdy z wierzchołków jest wspólnym biegunem przeciwległego boku względem obydwóch stożkowych.

Wyznaczamy wierzchołki trójkąta przekątnego w rozpatrywanym przypadku szczególnym (dwa okręgi). Wykorzystując oznaczenia podane na rys. 3 otrzymujemy następujące punkty przecięcia okręgów k_1 i k_2 (we współrzędnych jednorodnych):

$$A = \left[\frac{q^2+1-r^2}{2q}, \frac{d}{2q}, 1\right], \tag{1}$$

$$B = \left[\frac{q^2+1-r^2}{2q}, -\frac{d}{2q}, 1\right], \tag{2}$$

$$C = [1, i, 0], \tag{3}$$

$$D = [1, -i, 0]$$

$$\text{gdzie } d = \sqrt{-q^4+2q^2+2q^2r^2-1+2r^2-r^4} \tag{4}$$

Punkty A i B są punktami właściwymi, rzeczywistymi lub urojonymi, punkty C i D są punktami niewłaściwymi urojonymi (punkty kołowe okręgu). Wyznaczmy punkty przecięcia się przekątnych czworokąta zupełnego określonego przez punkty A, B, C i D (obliczenia wykonano za pomocą programu MapleV):

$$P = \left[\frac{q^2+1-r^2-id}{2q}, 0, 1\right], \tag{5}$$

$$Q = \left[\frac{q^2+1-r^2+id}{2q}, 0, 1\right], \tag{6}$$

$$R = \left[0{,}2\frac{id}{q},\, 0\right] \tag{7}$$

Z zamieszczonych powyżej wzorów wynika, że dwa punkty przekątne są zawsze właściwe, jeden zawsze niewłaściwy. Wszystkie punkty mogą być jednocześnie rzeczywiste albo urojone. Decyduje o tym parametr d, zależny od położenia środka i promienia okręgu k_1 – jeżli liczba pod pierwiastkiem jest ujemna, to wszystkie punkty przekątne są urojone.

Rozwiązując równanie:

$$-q^4 + 2q^2 + 2q^2r^2 - 1 + 2r^2 - r^4 = 0 \tag{8}$$

względem zmiennej q otrzymujemy cztery rozwiązania:

$$q_1 = -1 - r, \quad q_2 = -1 + r, \quad q_3 = 1 - r, \quad q_4 = 1 + r \tag{9}$$

Łatwo zauważyć, że podane wartości q określają cztery możliwe przypadki styczności okręgów k_1 i k_2. Przypadki te zostały podane w tablicy 1 jako A2 i A4 (oraz równorzędne B2, B4, C2 i C4) oraz nie zamieszczone położenia symetryczne względem osi y. W przypadkach tych punkty przekątne P i Q jednocza się. Za pomocą programu MapleV przeprowadzono również analizę zmienności lewej strony równania (8), tj. wyrażenia pod pierwiastkiem w (4). Wynika z niej, że wartość parametru d jest rzeczywista dla okręgów przecinających się w punktach rzeczywistych. Współrzędne x punktów przekątnych P i Q są wtedy urojone, urojona jest również współrzędna y punktu R.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że badane przekształcenie f ma trzy punkty stałe rzeczywiste (w tym jeden zawsze niewłaściwy) dla okręgów stycznych i nie posiadających rzeczywistych punktów wspólnych. W przypadku okregów przecinających się w punktach rzeczywistych istnieją wyłącznie urojone punkty stałe.

Z tego, że przekształcenie f ma punkty stałe, nie wynika oczywiście zbieżność ciągów punktów. Po wyliczeniu współrzędnych punktów stałych okazało się, że jeśli dany ciąg jest zbieżny, zarówno do punktu właściwego, jak i niewłaściwego, to jest nim zawsze jeden z podanych powyżej wierzchokłów trojkata przekątnego.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania wykazały, zgodnie z przewidywaniami, że nie można za pomocą metod wyłącznie eksperymentalnych, bo do takich należy numeryczne generowanie ciągów punktów, badać zbieżności ciągów. Z drugiej strony jest to metoda bardzo użyteczna ze względu na poglądowość i szybkość tworzenia interesujących przykładów, których trudno się domyślić badając zagadnienie tylko od strony teoretycznej. W rozpatrywanym problemie nie wyjaśniono, dlaczego mimo istnienia trzech punktow stałych ciąg punktów jest zbieżny tylko do jednego z nich. Innym problemem jest zbadanie zachowania się ciągów w przypadku okregów przecinającyh się, szczególnie stwierdzenie, czy rzekoma „hiperbola" jest rzeczywiście hiperbolą.

Literatura

[1] PASCAL E.: Repetytorium matematyki wyższej, t.2 Geometria, Warszawa 1901.

Abstract

The article presents an analysis of sequences of points which is a result of multiple repetition of projective transformation f.

Definition: Two conics s_1 and s_2 are to be determined. The image of optional point A in transformation f shall be called pole of line a in relation to conic s_2, where line a is the polar line of point A towards conic s_1.

A sequence of points in question will be obtained in a way, so that first point A_1 of sequence is assigned an optional point A of a plane and second point A_2 is a image of point A_1 in transformation f i. e. $A_2 = f(A_1)$. Generally for i = 1,2,..., of a sequence $A_i = f(A_{i-1})$.

For the needs of visualisation and analysis of a sequence of points a computer program has been written in Turbo Pascal which computes and displays on the screen subsequent points of sequence. Convergence of points of sequence has been researched in relation to setting of initial point and reciprocal position of conics.

The results basing on researches revealed that convergence of a sequence does not depend on setting of initial point, but depends only on position of conics.