ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z.2 Nr kol. 1383

BŁACH Anna
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej,
Politechnika Śląska, Gliwice

ŚRODKI OKRĘGÓW PRZECHODZĄCYCH PRZEZ DANY PUNKT I ZAWIERAJĄCYCH Z DANYM OKRĘGIEM ZADANY KĄT

Streszczenie. W opracowaniu wykazano, że na płaszczyźnie miejscem geometrycznym środków przechodzących przez dany punkt i zawierających z danym okręgiem zadany kąt jest krzywa stopnia drugiego. Rozważania geometryczne oparto na przekształeniu inwersyjnym względem okręgu. W konstrukcjach posłużono się programem komputerowym CABRI 1.

THE CENTRES OF CIRCLES COINCIDING WITH A GIVEN POINT AND INCLUDING A GIVEN ANGLE WITH A GIVEN CIRCLE

Summary. The work proves that in the plane a geometric locus of centres of circles which coincide with the given point and intersect the given circle at the given angle forms a second degree curve. The geometric considerations based on the inversive transformation relative to a circle. Constructions were made with an aid of the computer programme CABRI 1.

Niniejsze opracowanie dotyczy współpłaszczyznowych okręgów, które przechodząc przez dany punkt zawierają z zadanym okręgiem zadany kąt.

W literaturze można spotkać niektóre zadania konstrukcyjne wchodzące w zakres omawianego tematu. Zadania te rozwiązywane są różnymi metodami przekształceń geometrycznych, jak: inwersja, podobieństwo lub rzut cyklograficzny czy stereograficzny.

Wydaje się celowe wprowadzenie jednolitej metody, pozwalającej określić możliwą liczbę rozwiązań, z równoczesnym wyznaczeniem położenia środków szukanych okręgów.

W tym celu wybrano metodę miejsc geometrycznych, do wyznaczenia których posłużono się zasadą inwersji na płaszczyźnie względem okręgu.

Ilustrację rozważanych zagadnień wykonano przy użyciu programu komputerowego CABRI I. Program ten rozszerzono o makrokonstrukcje, pozwalające na szybkie i automatyczne realizowanie konstrukcji geometrycznych używanych do opracowania niniejszego tematu. W opisie makrokonstrukcje te oznaczane są literą „M".

Określono miejsce geometryczne, którego znajomość pozwala wyznaczyć:

- położenie środków okręgów, przechodzących przez zadany punkt i zawierających z danym okręgiem zadany kąt,
- położenie środków okręgów, przechodzących przez zadany punkt i zawierających z dwoma danymi okręgami zadane kąty,
- położenie środków okręgów przechodzących przez zadane dwa punkty i zawierających z danym okręgiem zadany kąt.

W celu rozwiązania powyższych zagadnień udowodniono następujące twierdzenie:

Miejscem geometrycznym środków okręgów przechodzących przez dany punkt, przecinających dany okrąg pod zadanym kątem i współpłaszczyznowych z danym okręgiem, jest stożkowa.

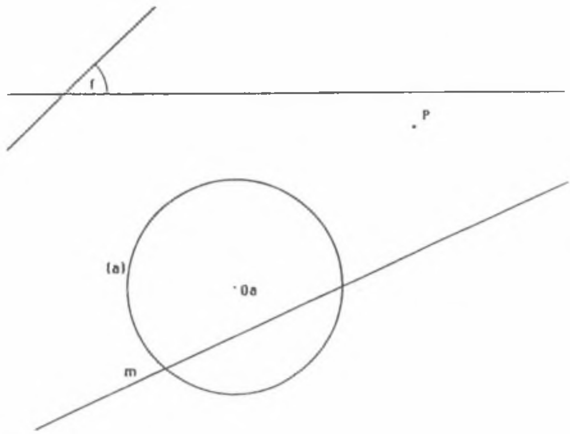
Dla udowodnienia tego twierdzenia wystarczy wykazać, że jest to krzywa rzędu drugiego, gdyż nie istnieje krzywa rzędu drugiego, której klasa byłaby inna niż dwa. Dla wykazania tego udowodniono, że każda dowolna prosta posiada z szukanym zbiorem dwa punkty wspólne.

Przyjęto dowolny okrąg $\overset{\frown}{a}$, punkt P, kąt ϕ oraz prostą m (rys.1).

Należy wyznaczyć okrąg $\overset{\frown}{b}$ przechodzący przez punkt P, przecinający okrąg $\overset{\frown}{a}$ pod kątem ϕ, którego środek należy do prostej m.

W zależności od położenia prostej m oraz punktu P względem okręgu $\overset{\frown}{a}$ oraz od tego, czy kąt ϕ jest równy, czy różny od 90°, można rozpatrywać różne przypadki.

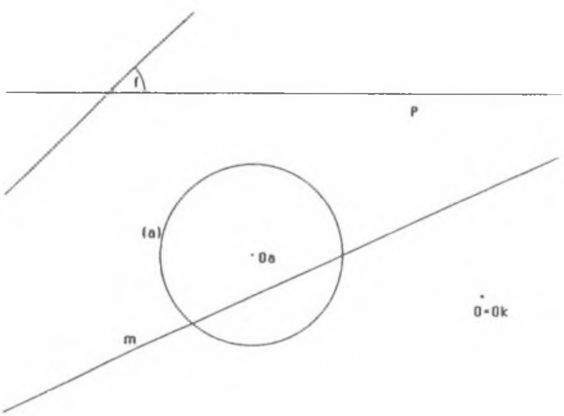
Do rozwiązania przyjęto przypadek najbardziej ogólny, to znaczy dla dowolnego położenia prostej m, punktu P oraz kąta $\phi \neq 90°$ (rys.2).



Rys.1

Rozwiązując to zadanie posłużono się następującym rozumowaniem:

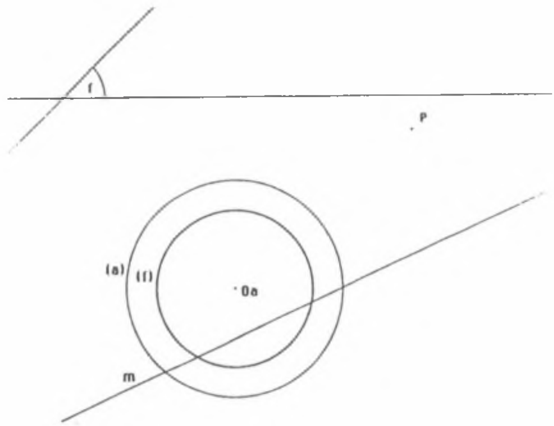
- jeżeli środek okręgu $\overset{\frown}{b}$ (punkt O_b) ma leżeć na prostej m, to prosta ta musi być symetralną cięciwy PQ szukanego okręgu $\overset{\frown}{b}$.



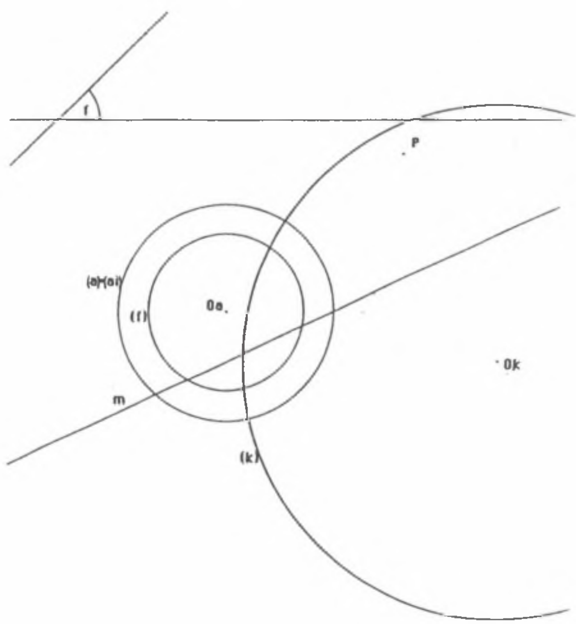
Rys.2

Jeżeli jeden z punktów P lub Q przyjmie się jako środek inwersji O_k, szukanemu okręgowi $\overset{\frown}{b}$ przyporządkowana będzie prosta b', przecinająca okrąg $\overset{\frown}{a}'$ pod kątem ϕ.

W celu wyznaczenia prostych przecinających dany okrąg $\hat{a}$ pod zadanym kątem zastosowano makrokonstrukcję „M1", za pomocą której określono okrąg $\hat{f}$, do którego są styczne wszystkie takie proste (rys.3).



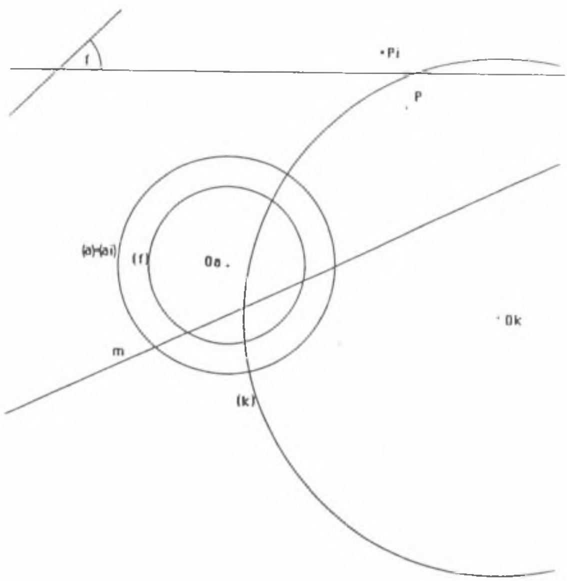
Rys.3



Rys.4

Okrąg podstawowy inwersji $\overset{\frown}{k}$ przyjęto jako ortogonalny względem okręgu $\overset{\frown}{a}$, aby uniknąć przekształcania go na inny okrąg $\overset{\frown}{a}^{i}$ (w takim przypadku $\overset{\frown}{a} = \overset{\frown}{a}^{i}$). W celu wyznaczenia okręgu o zadanym środku, ortogonalnego względem danego, przygotowano makrokonstrukcję „M2" (rys.4).

Następnie, stosując makrokonstrukcję „M3", wyznaczono punkt P^{i} przyporządkowany inwersyjnie punktowi P (rys.5).

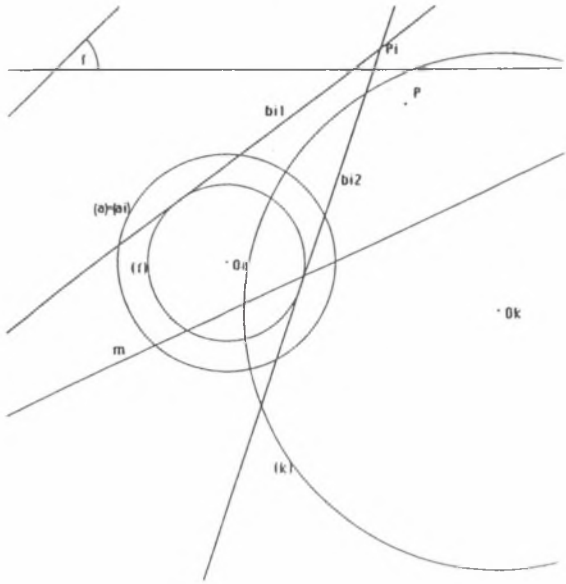


Rys.5

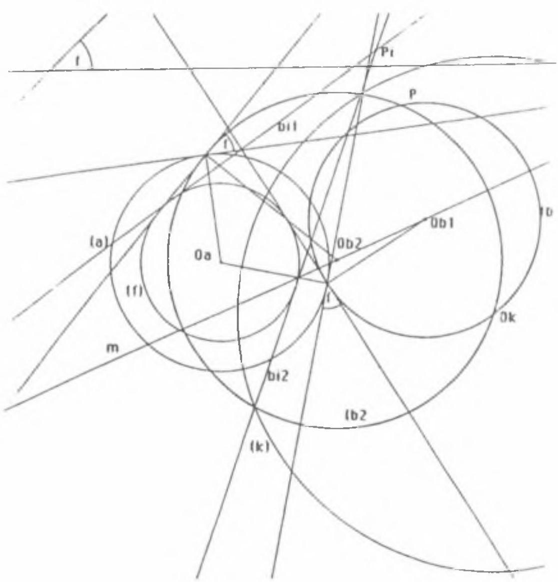
Wyznaczono (za pomocą makrokonstrukcji „M4") dwie proste b^{i}, (b_1^{i}, b_2^{i}), przechodzące przez punkt P^{i}, przecinające okrąg $\overset{\frown}{a}^{i}$ pod kątem ϕ, tzn. styczne do okręgu $\overset{\frown}{f}$ (rys.6).

Prostym b^{i} będą przyporządkowane szukane okręgi $\overset{\frown}{b}$ ($\overset{\frown}{b}_1$, $\overset{\frown}{b}_2$) o środkach O_b (O_{b1}, O_{b2}), należących do prostej m, zawierające z danym okręgiem $\overset{\frown}{a}^{i}$ kąt ϕ. Okręgi te są wyznaczone za pomocą makrokonstrukcji „M5" (rys.7).

W ogólnym przypadku istnieją dwie proste b_1^{i}, b_2^{i}, którym odpowiadają dwa szukane okręgi $\overset{\frown}{b}_1$ i $\overset{\frown}{b}_2$.



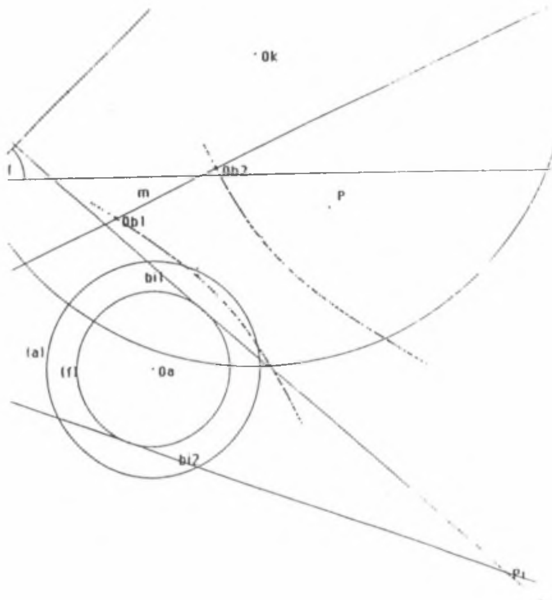
Rys.6



Rys.7

Tak więc na każdej dowolnie przyjętej prostej m istnieją dwa punkty, będące środkami okręgów spełniających wymagane warunki. Oznacza to, że każda dowolna prosta przecina zbiór środków szukanych okręgów w dwu punktach - c.b.d.w.

Dla różnych położeń prostej m wyznaczono miejsce geometryczne takich środków w postaci krzywej stopnia drugiego, co potwierdza udowodnioną tezę (rys.8).



Rys.8

Szczególne położenie prostej m (jej przynależność do punktu O_a), szczególne położenie punktu P oraz kąt $\phi = 90^\circ$ stwarzają możliwość konstrukcji uproszczonych lub dają rozwiązania zdegenerowane.

W zależności od położenia punktu P względem danego okręgu $\bar{a}$ oraz wielkości zadanego kąta ϕ stożkowa ta jest hiperbolą, parabolą lub elipsą.

Hiperbola

Jeżeli przez punkt P można poprowadzić dwie rzeczywiste proste b_1 i b_2, przecinające okrąg $\bar{a}$ pod kątem ϕ, to uważać je można za zdegenerowane okręgi o środkach w punktach niewłaściwych O_{b1}^{∞} i O_{b2}^{∞}, które są punktami hiperboli.

Przypadek ten zachodzi zawsze wtedy, gdy punkt P jest punktem zewnętrznym okręgu $\bar{a}$ oraz gdy punkt P leży wewnątrz okręgu, lecz jego odległość od środka spełnia warunek: $O_aP > r_a \times \cos\phi$.

Przy założonym położeniu punktu P wielkość kąta ϕ musi spełniać warunek $\phi > \gamma$, gdzie $\cos\gamma = O_aP/r_a$ (rys.9).

Parabola

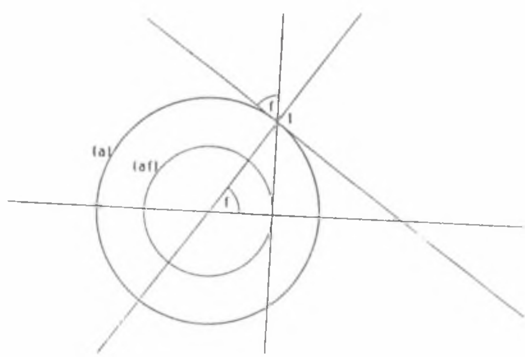
Jeżeli przez punkt P można poprowadzić tylko jedną rzeczywistą prostą b, przecinającą okrąg $\bar{a}$ pod kątem ϕ, to uważać ją można za zdegenerowany okrąg o środku w punkcie niewłaściwym O_b. Punkt ten jest punktem paraboli.

Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy $O_aP = r_a \times \cos\phi$ lub gdy $\phi = \gamma$, gdzie $\cos\gamma = O_\alpha P/r_a$ (rys.9).

Elipsa

Jeżeli przez punkt P nie przechodzi żadna rzeczywista prosta, przecinająca okrąg $\bar{a}$ pod kątem ϕ, wówczas zbiór środków szukanych okręgów nie zawiera punktu niewłaściwego i jest nim elipsa.

Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy punkt P znajduje się wewnątrz okręgu $\bar{a}$ i odległość $O_aP < r_a \times \cos\phi$ lub gdy $\phi < \gamma$, gdzie $\cos\gamma = O_\alpha P/r_a$ (rys.9).



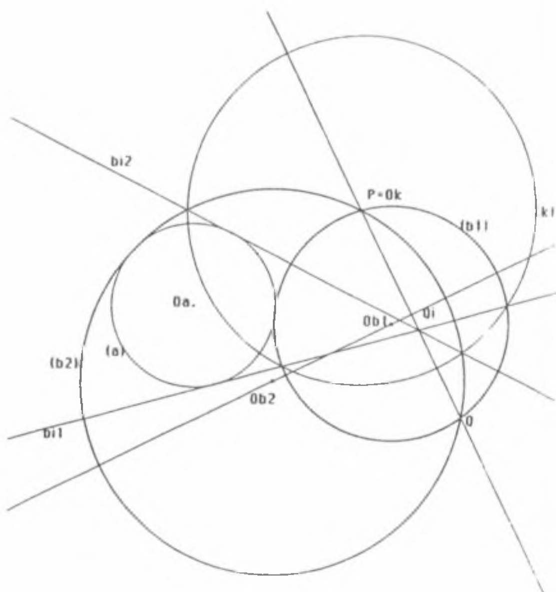
Rys.9

Położenie szukanych stożkowych

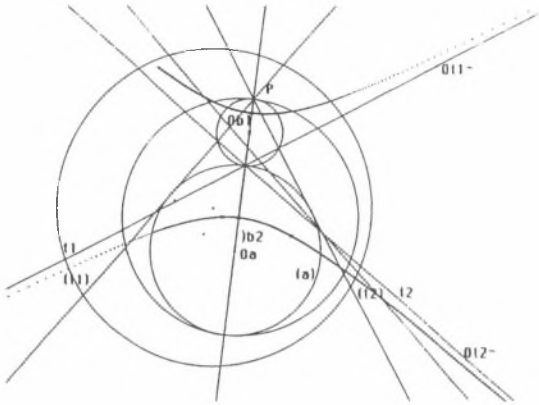
Analizując możliwości usytuowania środków okręgów przechodzących przez dany punkt P i posiadających rzeczywiste punkty wspólne z danym okręgiem ā, można określić obszar płaszczyzny, na którym mogą leżeć te środki bez względu na wielkość kąta ϕ. Jest to ta część płaszczyzny, na której mogą się znajdować omawiane powyżej stożkowe.

Dla danej prostej m można określić jej odcinek, na którym mogą się znajdować środki okręgów, przechodzących przez dany punkt P i posiadających punkty wspólne z danym okręgiem ā. Końce tego odcinka są środkami okręgów dla granicznych wartości kąta ϕ.

Dla punktu położonego na zewnątrz okręgu ā, dla różnych położeń prostej m, odcinki te ($O_{b1}O_{b2}$) wyznaczono, znajdując środki okręgów przechodzących przez punkt P, stycznych do okręgu ā. Zbiór tych odcinków, dla stałego położenia punktu P oraz zmiennego prostej m, stanowi zewnętrzny obszar hiperboli, wyznaczonej dla granicznej wartości $\phi = 0°$ (rys.10 i 11).

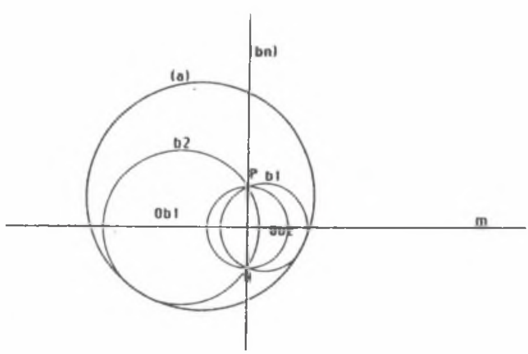


Rys.10

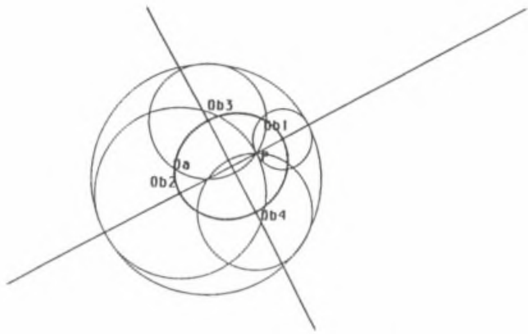


Rys.11

Dla punktu położonego wewnątrz okręgu $\bar{a}$, dla dowolnej prostej m, wyznaczono dwa odcinki (O_{b1} O_{bn} ∞ i O_{b2} O_{bn} ∞), na których mogą znajdować się środki okręgów przechodzących przez punkt P i posiadających punkty wspólne z okręgiem $\bar{a}$. Odcinek $O_{b1}O_{b2}$ jest częścią prostej, na której te punkty leżeć nie mogą. Zbiór odcinków $O_{b1}O_{bn}$ ∞ i $O_{b2}O_{bn}$ ∞ dla różnych położeń prostej m (przy stałym położeniu punktu P wewnątrz okręgu $\bar{a}$) stanowi część płaszczyzny znajdującej się na zewnątrz elipsy, wyznaczonej dla wartości kąta ϕ = 0 (rys.12 i 13).



Rys.12



Rys.13

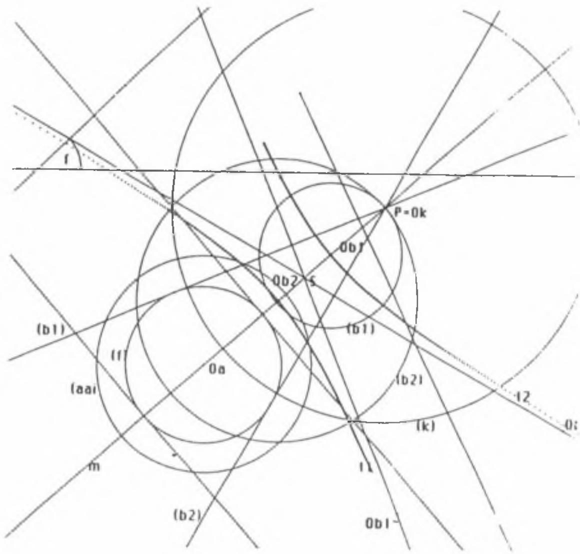
Stożkowe c^2, wyznaczone dla jednego położenia punktu P i okręgu $\overset{\frown}{a}$, dla różnych wartości kąta ϕ, nie mogą mieć rzeczywistych punktów wspólnych, gdyż każdy z nich musiałby być środkiem okręgu, zawierającego z okręgiem $\overset{\frown}{a}$ różne kąty, co jest niedorzecznością.

Konstrukcje stożkowych zrealizowano stosując makrokonstrukcje „Me”, „Mp” i „Mh”.

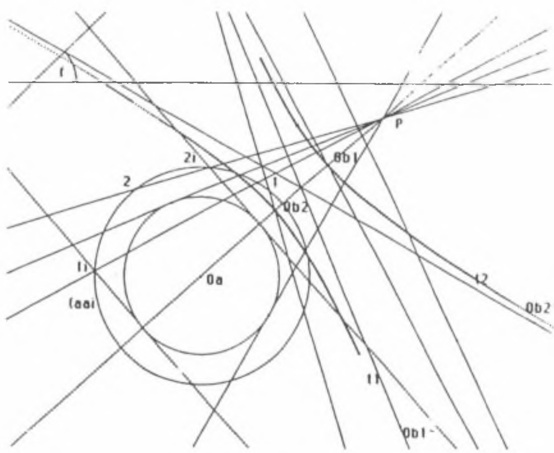
Konstrukcja elementów określających stożkowe

Hiperbola

Dla przyjętych założeń (okrąg $\overset{\frown}{a}$, punkt P, kąt ϕ) przyjęto jako środek inwersji punkt P (O_k = P), zaś okrąg podstawowy $\overset{\frown}{k}$ ortogonalnie do okręgu $\overset{\frown}{a}$. Na prostej m, przechodzącej przez punkty P i O_a, wyznaczono punkty O_{b1} i O_{b2}, położone najbliżej siebie, które są wierzchołkami hiperboli. Okręgom $\overset{\frown}{b}_1$ i $\overset{\frown}{b}_2$ przyporządkowane są proste b_1^{I} i b_2^{I} prostopadłe do prostej m, gdyż okręgi te przechodzą przez środek inwersji, któremu odpowiadają wszystkie punkty niewłaściwe płaszczyzny, zaś prostej m odpowiada prosta m^{I}, gdzie $m = m^{I}$. Zarówno proste b_1^{I} i b_2^{I} oraz okręgi $\overset{\frown}{b}_1$ i $\overset{\frown}{b}_2$ zawierają z okręgiem $\overset{\frown}{a}$ zadany kąt ϕ. Przez środek odcinka O_{b1} O_{b2} przechodzą asymptoty t_1 i t_2, prostopadłe do prostych b_3 i b_4, przynależnych do punktu P i przecinających okrąg $\bar{a}$ pod kątem ϕ (zdegenerowane okręgi o środkach niewłaściwych, będących punktami hiperboli).



Rys.14



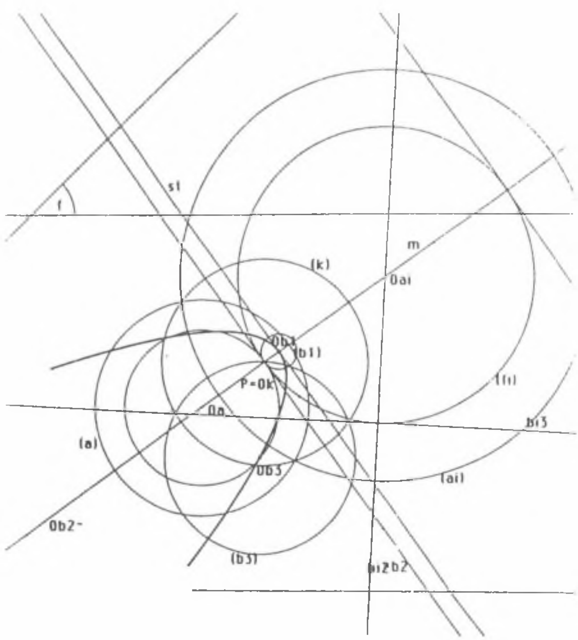
Rys.15

W ten sposób szukana hiperbola jest określona parą asymptot t_1 i t_2 wierzchołkami O_{b1} i O_{b2} (rys.14 oraz 15 jako konstrukcja uproszczona).

Parabola

Dla przyjętych jak poprzednio założeń ($\bar{a}$, P, ϕ oraz środka inwersji O_k) okrąg podstawowy inwersji $\bar{k}$ przyjęto dowolnie. Okregowi $\bar{a}$ odpowiada więc inny okrąg $\bar{a}^I$. Następnie znaleziono środki okręgów O_{b1} i O_{b2}, leżące na prostej m = P O_a, przechodzących przez P, zawierających z okręgiem $\bar{a}$ kąt ϕ. Punkty te znajdujemy za pomocą przyporządkowanych im prostych b_1^I i b_2^I, przecinających okrąg $\bar{a}^I$ pod kątem ϕ i prostopadłych do prostej m, gdyż prosta m = m^I musi zawierać z okręgami $\bar{b}_1$ i $\bar{b}_2$ kąt 90° jako ich średnica.

Prostej b_2^I jest przyporządkowana ta sama prosta b_2, którą należy uważać za zdegenerowany okrąg o środku w punkcie niewłaściwym $O_{b2}\,\infty$. Punkt O_{b1} jest wierzchołkiem szukanej paraboli, zaś prosta m jej osią.



Rys.16

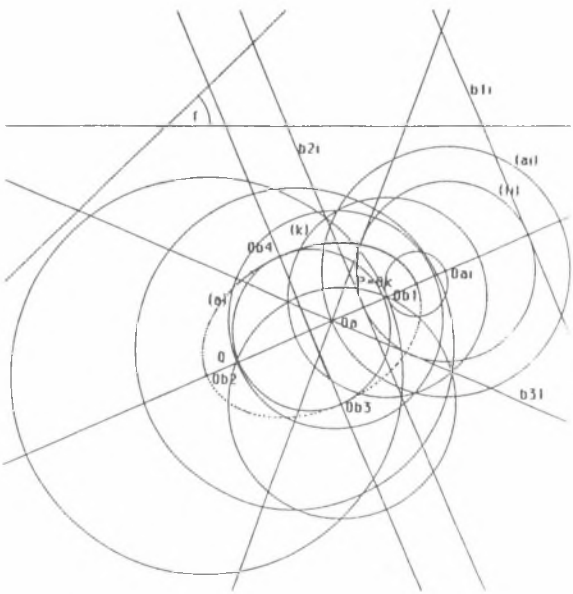
Dla innej prostej b_3^{l}, przecinającej okrąg $\bar{a}^{l}$ pod kątem ϕ, wyznaczono przyporządkowany jej okrąg $\bar{b}_3$ o środku O_{b3}.

W ten sposób szukana parabola określona jest za pomocą osi m, wierzchołka O_{b1} oraz punktu O_{b3} (rys.16).

Elipsa

Dla założeń przyjętych jak poprzednio ($\bar{a}$, P, ϕ, O_k, k) wyznaczono punkty O_{b1} i O_{b2}, które są wierzchołkami elipsy. Następnie wyznaczono punkty O_{b3} i O_{b4} należące do prostej m_i, symetralnej odcinka $O_{b1}O_{b2}$.

Szukana elipsa jest więc określona parą osi $O_{b1}O_{b2}$ i $O_{b3}O_{b4}$ (rys.17).

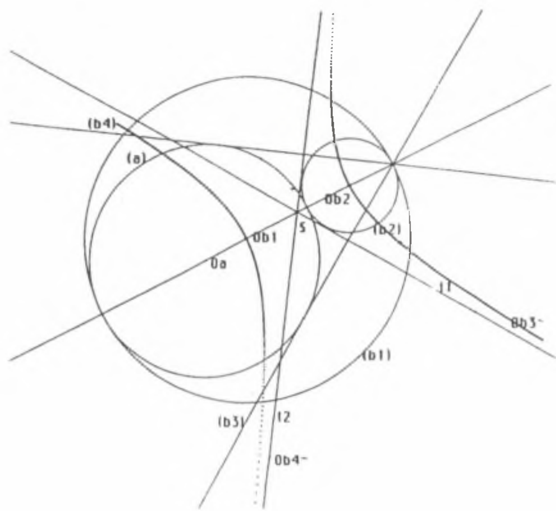


Rys.17

Przypadki szczególne

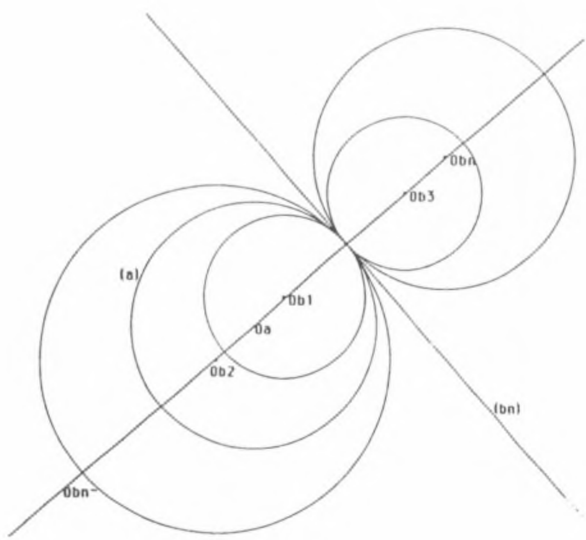
1. Kąt $\phi = 0^o$

1.1. Punkt P jest zewnątrz okręgu $\bar{a}$ - szukana stożkowa jest hiperbolą (rys.18).



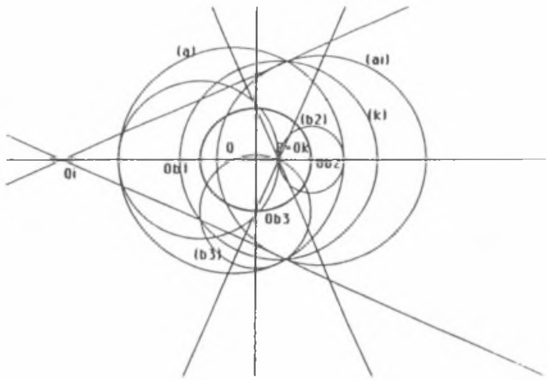
Rys.18

1.2. Punkt P należy do okręgu, $\hat{a}$ - stożkowa degeneruje się do prostej O_aP (rys.19).



Rys.19

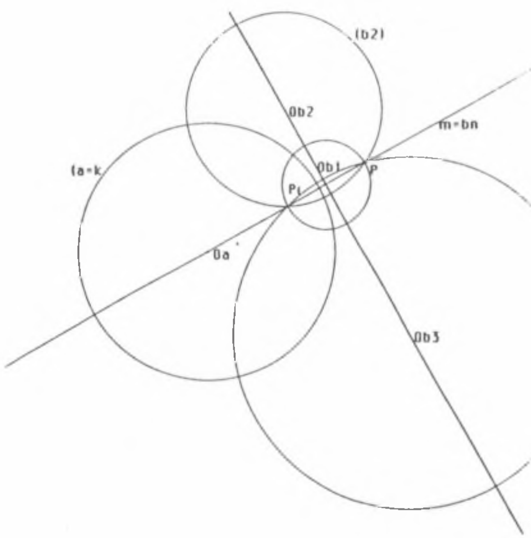
1.3. Punkt P jest wewnątrz okręgu, $\bar{a}$ - stożkowa jest elipsą (rys.20).



Rys.20

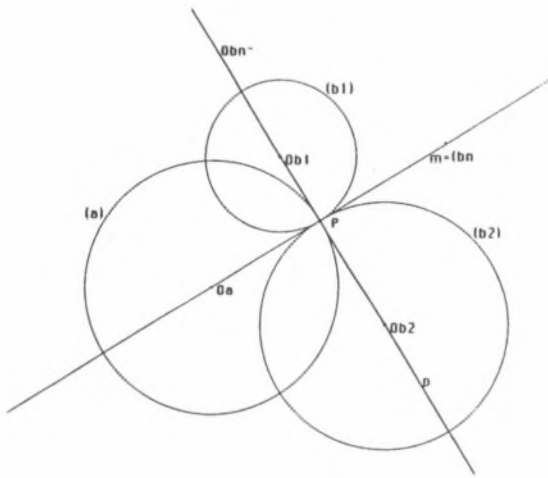
2. *Kąt* $\phi = 90^o$

2.1. Punkt P jest zewnątrz okręgu, $\bar{a}$ - stożkowa degeneruje się do prostej p, będącej podstawą pęku okręgów o punktach podstawowych P oraz P' (rys.21).



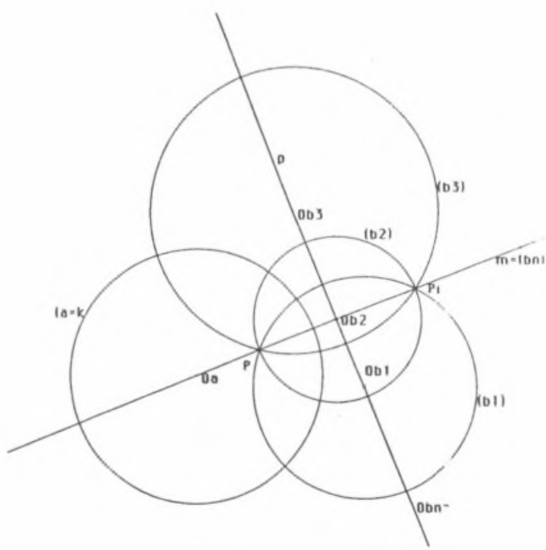
Rys.21

2.2. Punkt P należy do okręgu, $\hat{a}$ - stożkowa degeneruje się do prostej p, stycznej do okręgu $\hat{a}$ w punkcie P (rys.22).



Rys.22

2.3. Punkt P jest wewnątrz okręgu, $\hat{a}$ - stożkowa degeneruje się do prostej p, będącej podstawą pęku okręgów o punktach podstawowych P oraz P' (rys.23).



Rys.23

LITERATURA

1. ADAMAR J.: Elementarnaja geometria, Moskwa 1948 r. (tłumaczenie z j. francuskiego),
2. COXETER H.S.M.: Wstęp do geometrii dawnej i nowej, Warszawa 1967
3. PLAMITZER A.: Geometria rzutowa ukł. płaskich i pow. st. drugiego, Warszawa 1938
4. SMART W.F.: Foundation of analytical geometry, Londyn 1956

Recenzent: Prof.dr hab. Jacek Fuliński

Abstract

The work proves that in the plane

- a geometric locus of centres of circles which coincide with the given point and intersect the given circle at the given angle forms a second degree curve (the given elements are co-planar).

The proof bases on the inversive transformation relative to a circle.

The influence of an arrangement of given data elements and a size of a given angle on the type of curve has been analysed.

The construction of elements of respective types of curves has been presented.

The special cases for special angles of 0° and 90° have also been considered.

The konwledge about the considered geometric locus enables determination, inter alia, of:

- the number and the position of centres of circles coinciding with two given points and including a given angle with a given circle,
- the number and the position of centres of circles coinciding with a given point and including given angles with two given circles.

Geometric constructions for the considered problems have been made with an aid of the computer programme CABRI I. The programme has been supplemented with several macroconstructions enabling the fast determination and the automatic drawing of the sought curves.