ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z. 2 Nr kol. 1383

BORATYŃSKI Wojciech
Instytut Matematyki,
Politechnika Warszawska

ROZKŁAD PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWEGO PRZESTRZENI P^2 (F) NA PEWNE SZCZEGÓLNE HOMOLOGIE HARMONICZNE

Streszczenie. W artykule zajmiemy się rozkładem dowolnego przekształcenia rzutowego przestrzeni P^2 (F) na pewne szczególne homologie harmoniczne, a mianowicie homologie o zadanym środku lub homologie o osi przechodzącej przez dany punkt. Udowodnimy, że dowolna homologia harmoniczna przestrzeni P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej pięciu takich homologii. Ponieważ każde przekształcenie rzutowe przestrzeni P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej trzech homologii harmonicznych, stąd otrzymujemy rozkład dowolnego przekształcenia rzutowego przestrzeni P^2 (F) na wspomniane wyżej szczególne homologie harmoniczne.

DECOMPOSITION OF A PROJECTIVE TRANSFORMATION OF THE SPACE P^2 (F) ONTO SPECIAL HARMONIC HOMOLOGIES

Summary. The problem of a projective collineation onto special harmonic homologies I.e. homologies with the fixed centre and homologies with fundamental lines containing the fixed point, is considered. It is proved that every harmonic homology of two dimensional projective space P^2 (F) is a product of at most five harmonic homologies from the given class.

1. Wstęp i podstawowe oznaczenia

Tematyka rozkładu przekształcenia rzutowego przestrzeni rzutowej na przekształcenia spełniające pewne zadane warunki jest poruszana w wielu pracach. Przykładowo należy tu wymienić prace Witczyńskiego (1979, 1991) oraz Catera (1978). W poniższej pracy zajmiemy się rozkładem przekształcenia rzutowego dwuwymiarowej

przestrzeni rzutowej P^2 (F) na pewne szczególne homologie harmoniczne, a mianowicie homologie o zadanym środku lub homologie o osi przechodzącej przez zadany punkt. Zakładamy, że F = R lub F = C.

Niech $f_{a,H}$ oznacza homologię harmoniczną przestrzeni P^2 (F) o środku a oraz osi H. Niech a_1, a_2 będą danymi punktami przestrzeni P^2 (F). Niech Φ_1 będzie zbiorem homologii harmonicznych przestrzeni P^2 (F) o środku a_1, zaś Ψ_1 zbiorem homologii harmonicznych przestrzeni P^2 (F) o osi przechodzącej przez punkt a_2. Niech $\Psi = \Phi_1 \cup \Psi_1$. Niech Z (a,b) oznacza prostą przechodzącą przez punkty a i b.

Wiadomo, że każde przekształcenie rzutowe rozkłada się na pewną liczbę homologii harmonicznych. Zajmiemy się więc najpierw rozkładem homologii harmonicznej $f_{a,H}$ na homologie harmoniczne z klasy Ψ. Witczyński (1981) udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Witczyński (1981))

Każda homologia harmoniczna n-wymiarowej przestrzeni rzutowej P^n (F) jest złożeniem co najwyżej 7 przekształceń ze zbioru Ψ.

W następnym rozdziale pracy zmniejszymy ilość przekształceń ze zbioru Ψ, koniecznych do otrzymania homologii $f_{a,H}$ w przypadku przestrzeni P^2 (F).

2. Główne wyniki

Na początek podamy lemat wykorzystywany w dowodzie twierdzenia o rozkładzie homologii harmonicznej na homologie z klasy Ψ oraz podający pewne warunki, przy których w wyniku złożenia homologii harmonicznych o zadanym środku otrzymujemy homologię harmoniczną.

Lemat 1

Jeżeli g_{a_1,H_1} i $g_{a_1,H_1'}$ *są homologiami harmonicznymi o środku a_1 i osiach odpowiednio równych* H_1 i H_1', *to istnieje homologia harmoniczna* $g_{a_1,\hat{H}_1}$ *taka, że*

$$g_{a_1,H_1'}\, g_{a_1,H_1}\, g_{a_1,H_1'} = g_{a_1,\hat{H}_1}.$$

Dowód

Niech $H_1 \cap H_1' = \{a_3\}$. Niech $a_2 \in H_1$ i $b = g_{a_1,H_1'}(a_2)$. Zauważmy, że $g_{a_1,H_1'}[Z(a_3, b)] = Z(a_3, a_2)$, zatem złożenie $\tilde{g} = g_{a_1,H_1'} g_{a_1,H_1} g_{a_1,H_1'}$ jest identycznością na prostej $Z(a_3, b)$. Niech $\hat{H}_1 = Z(a_3, b)$. Wyznaczmy

$$\tilde{g}(a_2) = g_{a_1,H_1'} g_{a_1,H_1} g_{a_1,H_1'}(a_2).$$

Mamy

$$g_{a_1,\hat{H}_1'}(a_2) = b$$

oraz oznaczmy

$$g_{a_1,H_1}(b) = c \text{ i } g_{a_1,H_1'}(c) = d.$$

Wtedy

$$\tilde{g}(a_2) = d \text{ i } \tilde{g}(d) = a_2,$$

stąd

$$\tilde{g} = g_{a_1,H_1'} g_{a_1,H_1} g_{a_1,H_1'} = g_{a_1,\hat{H}_1}.$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika, że jeżeli $a_1 \notin H$, to homologia harmoniczna $f_{a,H}$ rozkłada się na trzy homologie z klasy Ψ. Rozpatrzmy przypadek, gdy $a_1 \in H$ i $a_2 \notin H$ i $a \neq a_1$.

Twierdzenie 2

Jeżeli $a \neq a_2$ i $a_1 \in H$, to homologia harmoniczna $f_{a,H}$ przestrzeni P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej trzech przekształceń ze zbioru Ψ.

Dowód

Rozpatrzmy dwa przypadki.

I. $a_2 \notin Z(a, a_1)$

Weźmy dowolny $\bar{a} \in Z(a_1, a)$, $\bar{a} \neq a_1$ i $\bar{a} \neq a$. Niech $\bar{H}$ będzie prostą taką, że $a_2 \in \bar{H}$ i $h_{\bar{a},\bar{H}}(a_1) = a$. Niech $a_3 = \bar{H} \cap H$. Niech $f_{a,H}(\bar{a}) = \bar{a}'$. Ponieważ $h_{\bar{a},\bar{H}}(a_1) = a$, stąd $\bar{a}' = \bar{H} \cap Z(a_1, a)$. Określmy przekształcenia:

$$h_{\bar{a},\bar{H}} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a \\ a_3 & a_2 & a & a_1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$g_{a_1,H_1} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & \bar{a} & \bar{a}' \\ a_3 & a_1 & \bar{a}' & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$f_{a,H} = \begin{pmatrix} a_3 & \bar{a} & \bar{a}' & a & a_1 \\ a_3 & \bar{a}' & \bar{a} & a & a_1 \end{pmatrix},$$

zatem

$$f_{a,H} = h_{\bar{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1}\, h_{\bar{a},\bar{H}}.$$

II. $a_2 \in Z(a, a_1)$

Weźmy dowolny $a_3 \in H$ taki, że $a_3 \neq a_1$. Niech $\bar{H} = Z(a_2, a_3)$. Dobieramy $\bar{a} \in Z(a_1, a)$ tak, aby $h_{\bar{a},\bar{H}}(a_1) = a$. Wtedy $f_{a,H}(\bar{a}) = a_2$. Określmy homologię harmoniczną

$$g_{a_1,H_1} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & \bar{a} & a_2 \\ a_3 & a_1 & a_2 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Analogicznie jak w przypadku I otrzymujemy, że

$$f_{a,H} = h_{\bar{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1}\, h_{\bar{a},\bar{H}}.$$

Twierdzenie 3

Jeżeli $a = a_2$ i $a_1 \in H$, to homologia harmoniczna $f_{a,H}$ przestrzeni $P^2(F)$ jest złożeniem co najwyżej pięciu przekształceń ze zbioru Ψ.

Dowód

Weźmy dowolny punkt $a_2' \notin Z(a_1, a)$ i $a_2' \notin H$. Z twierdzenia 2 i jego dowodu wiemy, że istnieją homologie g_{a_1,H_1} i $h_{\bar{a},\bar{H}'}$ takie, że

$$f_{a,H} = h_{\bar{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1}\, h_{\bar{a},\bar{H}'}$$

oraz $\bar{H}' = Z(a_2', \bar{a}')$, $a_3 = H \cap \bar{H}'$ i $H_1 = Z(a_3, a_2)$, gdzie $\bar{a}' = f(\bar{a})$.

Rozpatrzmy homologię $h_{\bar{a},\bar{H}'}$. Zauważmy, że $a_1 \notin \bar{H}'$. Na mocy dowodu twierdzenia 1 istnieją homologie harmoniczne $g_{a_1,H_1'}$ i $h_{\hat{a},\bar{H}}$ takie, że

$$h_{\bar{a},\bar{H}'} = g_{a_1,H_1'}\, h_{\hat{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1'}.$$

Powyższe homologie zdefiniowane są następująco:

$$g_{a_1,H_1'} = \begin{pmatrix} a_3\ a_1\ \bar{a}'\ a_2 \\ a_3\ a_1\ a_2\ \bar{a}' \end{pmatrix},$$

$$h_{\hat{a},\bar{H}} = \begin{pmatrix} a_3\ a_2\ \bar{a}'\ a_1 \\ a_3\ a_2\ a_1\ \bar{a}' \end{pmatrix},$$

gdzie $a_3 \in H_1'$, $\bar{H} = Z(a_2, a_3)$ oraz $g_{a_1,H_1'}(\bar{a}) = \hat{a}$. Stąd

$$f_{a,H} = g_{a_1,H_1'}\, h_{\hat{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1'}\, g_{a_1,H_1}\, g_{a_1,H_1'}\, h_{\hat{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1'}.$$

Na mocy lematu 1 mamy:

$$g_{a_1,H_1'}\, g_{a_1,H_1}\, g_{a_1,H_1'} = g_{a_1,\hat{H}_1},$$

gdzie $\hat{H}_1 = Z(a_3, \bar{a}') = \bar{H}'$. Zatem

$$f_{a,H} = g_{a_1,H_1'}\, h_{\hat{a},\bar{H}}\, g_{a_1,\bar{H}'}\, h_{\hat{a},\bar{H}}\, g_{a_1,H_1'},$$

co kończy dowód twierdzenia 3.

Wniosek 1

Każda homologia harmoniczna przestrzeni rzutowej P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej 5 przekształceń ze zbioru Ψ.

3. Wnioski i uwagi końcowe

Dowolne przekształcenie rzutowe przestrzeni P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej trzech homologii harmonicznych (Witczyński (1988)). Stąd i z powyższych twierdzeń otrzymujemy jako wniosek twierdzenie.

Wniosek 2

Dowolne przekształcenie rzutowe przestrzeni P^2 (F) jest złożeniem co najwyżej piętnastu homologii harmonicznych należących do klasy Ψ.

LITERATURA

1. CATER F.S. (1978): Products of central collineations, Linear Algebra and its Applications 19, 251-174
2. WITCZYŃSKI K. (1979): Projective collineations as products of cyclic collineations, Demonstratio Mathematica 12, 1111-1125
3. WITCZYŃSKI K. (1981): On generators of the group of projective transformations, Demonstratio Mathematica 14, 1053-1075
4. WITCZYŃSKI K. (1988): Sur les generateurs du groupe des transformations projectives du plan projectif, Zeszyty Naukowe - Geometria 17, 109-113
5. WITCZYŃSKI K. (1991): Collineations in the projective complex space as products of harmonic homologies, Zeszyty Naukowe - Geometria 19, 81-85

Recenzent: Dr hab. Krzysztof Witczyński,
Prof. Politechniki Warszawskiej

Abstract

Let P^2 (F) be two dimensional projective space and F = R or F = C. Let $f_{a,H}$ be a harmonic homology with the centre a and the axis H. Let a_1, $a_2 \in P^2$ (F) be two fixed nonlinear points. Let Φ_1 be the class of harmonic homologies with the centre a_1 and let Ψ_1 be the class of harmonic homologies with fundamental lines containing the point a_2. Let $\Psi = \Phi_1 \cup \Psi_1$. Witczyński (1981) proved that if $a_1 \notin H$ then $f_{a,H}$ is a composition of at most three homologies belonging to the class Ψ. We proved the following theorems.

Theorem 1

If $a \neq a_2$ and $a_1 \in H$, then every harmonic homology $f_{a,H}$ of the space P^2 (F) is a composition of at most three homologies belonging to the class Ψ.

Theorem 2

If $a = a_2$ and $a_1 \in H$, then every harmonic homology $f_{a,H}$ of the space P^2 (F) is a composition of at most five homologies belonging to the class Ψ.

Since every collineation of the space P^2 (F) is a composition of at most three harmonic homologies (see Witczyński (1988)) then as a conclusion we obtain a decomposition of every collineation into at most fifteen harmonic homologies belonging to the class Ψ.