

IWANIUK Edyta  
Filia Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku  
KOŹNIEWSKI Edwin  
Politechnika Białostocka

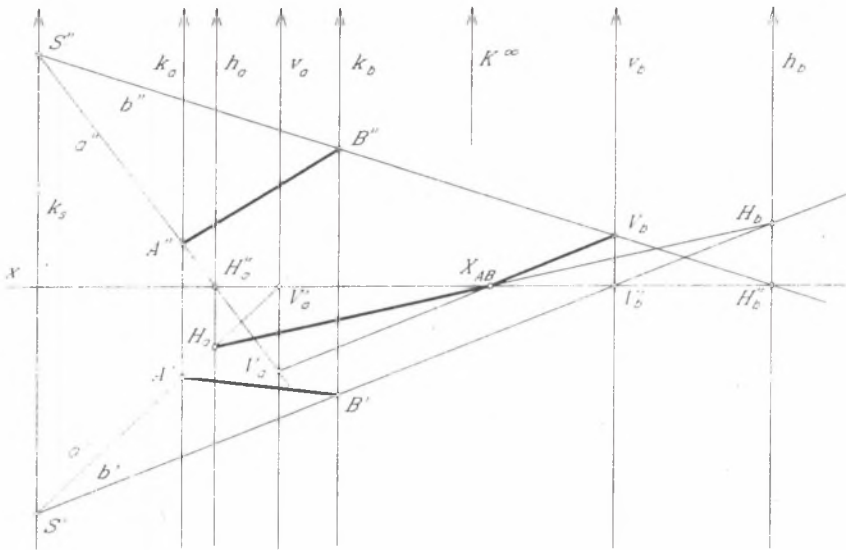
## O PEWNEJ KONSTRUKCJI PUNKTU ZAŁAMANIA CIENIA ODCINKA NA DWIE RZUTNIE

**Streszczenie.** W pracy rozważono konfigurację powstałą przy wyznaczaniu rzutów cienia odcinka w metodzie Monge'a. Wprowadzono nowy sposób konstruowania punktu załamania cienia odcinka.

## ON CERTAIN CONSTRUCTION OF THE REFRACTION POINT OF SHADOW OF SEGMENT

**Summary.** The geometrical configuration induced by Monge' projection of the shadow of segment is considered. A new construction of the refraction point of shadow is given.

Konstrukcja cienia figury reprezentowanej w postaci szkieletowej sprowadza się do skonstruowania zbioru cieni poszczególnych wierzchołków i znalezienia powłoki wypukłej tego zbioru punktów [2]. Jeśli obiekt nie jest wypukły, wcześniej konieczna jest dekompozycja obiektu na sumę figur wypukłych. W przypadku, gdy jakaś krawędź (odcinek) rzuca cień na dwie rzutnie, odcinek będący cieniem tej krawędzi zostanie załamany. W klasycznej geometrii wykreślnej, w rzutach Monge'a (rys.1), punkt załamania znajduje się jako punkt przecięcia odcinka  $H_a H_b (V_a V_b)$  z osią  $x$ , gdzie  $H_a (V_a)$ ,  $H_b (V_b)$  są odpowiednio śladami poziomymi (pionowymi) prostych  $a$ ,  $b$ , będących promieniami rzutującymi punktów  $A, B$  [1].

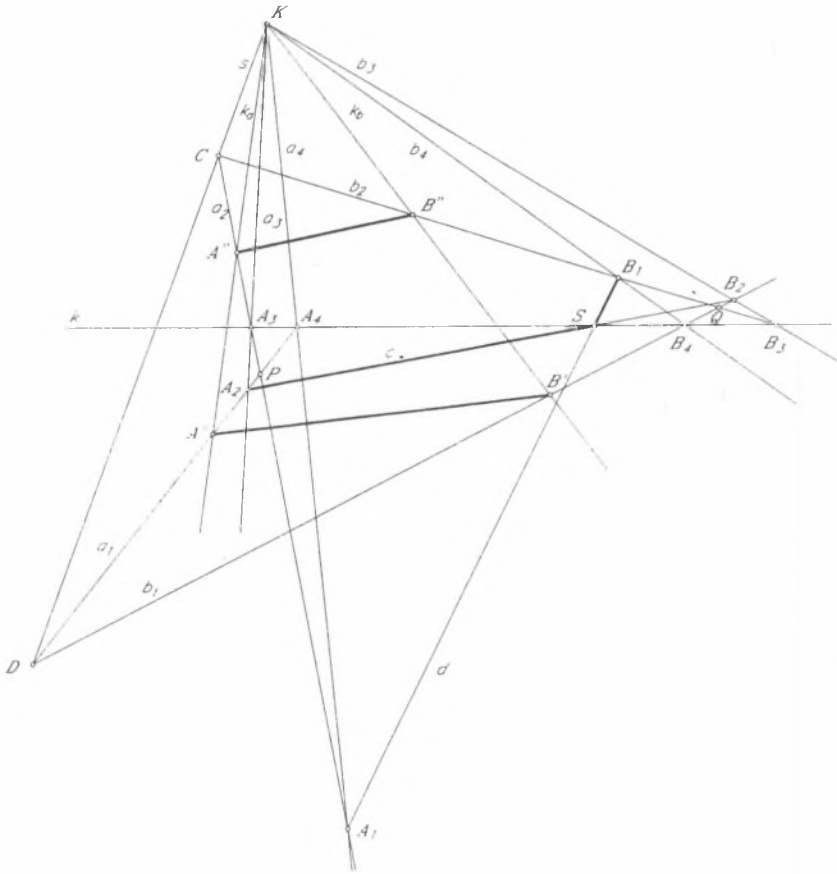


Rys.1

Niezależność od wyboru odcinków  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $V_a$ ,  $V_b$  w sensie konstrukcji płaskiej nie jest oczywista. Konstrukcja ta, jak to zwykle czyni się w geometrii wykreślnej, jest efektem z jednej strony analizy przestrzennej powstania cienia (jako pewnego rzutu), z drugiej strony jest konsekwencją intuicyjnego aspektu zjawiska cienia. Z dydaktycznego punktu widzenia jest to ze wszech miar podejście właściwe. Z geometrycznego punktu widzenia, zwłaszcza geometrii rzutowej płaskiej, konstrukcja ta wymaga uzasadnienia w oparciu o aksjomaty dwuwymiarowej geometrii rzutowej. Próba płaskiego dowodu niezależności punktu załamania cienia od wyboru odcinków  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $V_a$ ,  $V_b$  wskazała na prostą metodę wyznaczania owego punktu bez posługiwania się ww. odcinkami. Praca niniejsza prezentuje tę konstrukcję.

Niech rys.1 przedstawia klasyczną, dobrze znaną, konstrukcję cienia odcinka  $AB$ . Punkt załamania został oznaczony przez  $X_{AB}$ . Z uwagi na rzutowy charakter konfiguracji przyjmijmy inny rysunek (rys.2) i inne oznaczenia zachowując istotę powiązań występujących w niej punktów i prostych. Zauważmy wcześniej, że pary:  $(H_a, H_a'')$ ,  $(H_b, H_b'')$ ,  $(V_a', V_a)$ ,  $(V_b', V_b)$  to odpowiednio:  $(H_a', H_a'')$ ,  $(H_b', H_b'')$ ,  $(V_a', V_a'')$ ,  $(V_b', V_b'')$ . Zgodnie z tradycją w geometrii wykreślnej przy  $H_a'$ ,  $H_b'$ , ... opuszcza się kreskowanie

u góry (są to ślady poziome prostych  $a, b, \dots$ ), przy  $V_a'', V_b'', \dots$  opuszcza się kreskowanie u góry (są to ślady pionowe prostych  $a, b, \dots$ ). Po zastąpieniu punktu niewłaściwego  $K^\infty$  (rys.1) przez punkt właściwy  $K$  i po przyjęciu oznaczeń punktów i prostych:

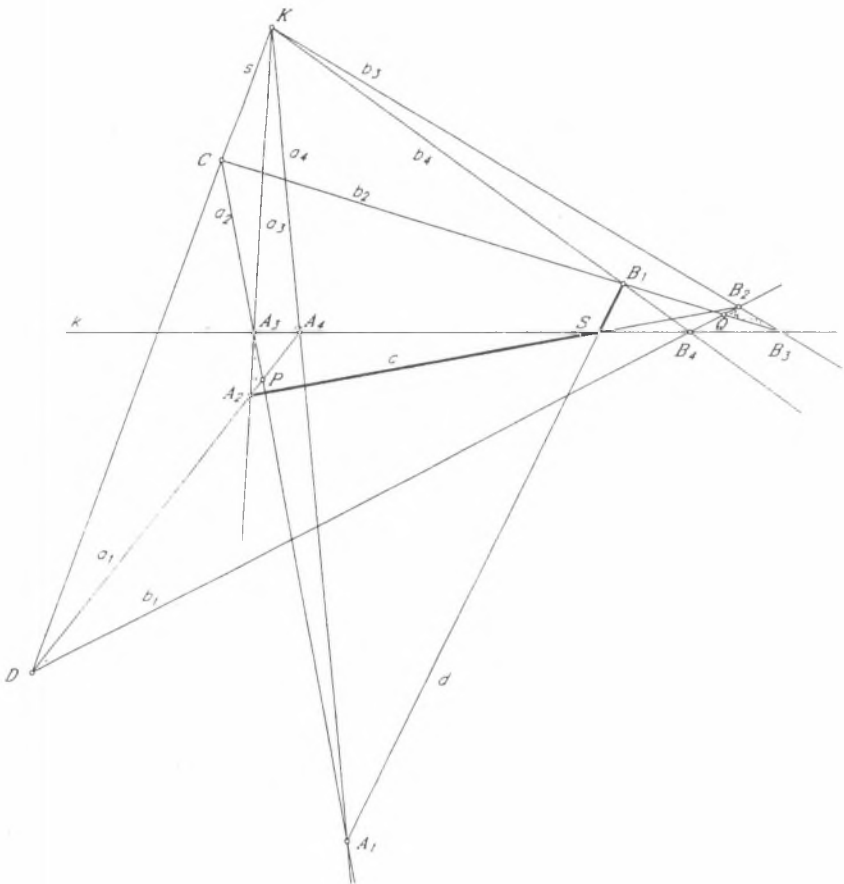


Rys.2

$S' \rightarrow D, \quad S'' \rightarrow C, \quad H_a \rightarrow A_2, \quad H_{a''} \rightarrow A_3, \quad H_b \rightarrow B_2, \quad H_{b''} \rightarrow B_3, \quad V_{a'} \rightarrow A_4, \quad V_a \rightarrow A_1,$   
 $V_{b'} \rightarrow B_4, \quad V_b \rightarrow B_1, \quad X_{AB} \rightarrow S, \quad k_s \rightarrow s, \quad h_a \rightarrow a_3, \quad v_a \rightarrow a_4, \quad h_b \rightarrow b_3, \quad v_b \rightarrow b_4$   
 $x \rightarrow k, \quad a' \rightarrow a_1, \quad a'' \rightarrow a_2, \quad b' \rightarrow b_1, \quad b'' \rightarrow b_2, \quad h_{ab} \rightarrow c, \quad v_{ab} \rightarrow d$

otrzymujemy rzutowe uogólnienie konfiguracji z rys.1. Ponadto, zauważmy, że punkty  $A', B', A'', B''$  oraz proste  $k_a, k_b$  w omawianym układzie nie odgrywają istotnej roli i w dalszych rozważaniach pominiemy je (rys.3).

Na podstawie oznaczeń i incydencji opisanych na rys.3 sformułujemy następujące twierdzenie:



Rys.3

**Twierdzenie**

$(CDK|s \wedge DA_2 A_4|a_1 \wedge DB_2 B_4|b_1 \wedge CA_1 A_3|a_2 \wedge CB_1 B_3|b_2 \wedge$   
 $KA_2 A_3|a_3 \wedge KB_2 B_3|b_3 \wedge KA_1 A_4|a_4 \wedge KB_1 B_4|b_4 \wedge$   
 $A_2 B_2 S|c \wedge A_1 B_1 S|d \wedge A_3 A_4 B_3 B_4|k) \Rightarrow S|k.$

## Dowód

Przyjmijmy, że zachodzą incydencje opisane w poprzedniku implikacji (rys.3). Określmy dodatkowo punkty  $P, Q$  jak następuje:  $P | a_1, a_2$  oraz  $Q | b_1, b_2$ . Rozważmy trójkąty  $PA_2A_3$  i  $QB_2B_3$ , które są osiowo perspektywiczne, gdyż proste  $a_1, b_1$  incydują z punktem  $D$ , proste  $a_2, b_2$  incydują z punktem  $C$ , proste  $a_3, b_3$  incydują z punktem  $K$ , zaś punkty  $C, D, K$  incydują z prostą  $s$ . Na podstawie twierdzenia Desarguesa trójkąty  $PA_2A_3, QB_2B_3$  są środkowo perspektywiczne. Stąd proste  $k, PQ, c$  incydują z jednym punktem. Oznaczmy ten punkt przez  $X$ .

Podobnie trójkąty:  $PA_4A_1, QB_4B_1$  są osiowo perspektywiczne, gdyż proste:  $a_1$  i  $b_1$  (spełniające incydencje:  $a_1 | P, A_4, b_1 | Q, B_4$ ) incydują z punktem  $D$ ,  $a_2$  i  $b_2$  (spełniające incydencje:  $a_2 | P, A_1, b_2 | Q, B_1$ ) incydują z punktem  $C$ ,  $a_4$  i  $b_4$  (spełniające incydencje:  $a_4 | A_4, A_1, b_4 | B_4, B_1$ ) incydują z punktem  $K$ .

Punkty  $D, C, K$ , jak wiadomo, incydują z prostą  $s$ . Z twierdzenia Desarguesa wynika, że trójkąty  $PA_4A_1, QB_4B_1$  są środkowo perspektywiczne, tj. proste  $k, PQ, d$  (spełniające incydencje:  $k | A_4, B_4, d | A_1, B_1$ ) są współpękowe. Ponieważ w omawianym pęku prostych  $k, PQ, d$  powtarzają się proste  $k, PQ$  z pęku  $k, PQ, c$  o wierzchołku  $X$ , punkt  $X$  jest wierzchołkiem pęku prostych  $k, PQ, d$ . Punkt  $X$  jest więc identyczny z punktem  $S$  w konfiguracji. Ale  $X | k$ . Mamy zatem  $(S=X) | k$ . Uwzględniając punkty  $P$  i  $Q$  możemy sformułować następujący wniosek:

## Wniosek

$$(CDK | s \wedge DA_2A_4 P | a_1 \wedge DB_2B_4 Q | b_1 \wedge CA_1A_3 P | a_2 \wedge CB_1B_3 Q | b_2 \wedge \\ KA_2A_3 | a_3 \wedge KB_2B_3 | b_3 \wedge KA_1A_4 | a_4 \wedge KB_1B_4 | b_4 \wedge \\ A_2B_2 S | c \wedge A_1B_1 S | d \wedge A_3A_4B_3B_4 | k \wedge PQ | r) \Rightarrow S | r.$$

Przedstawione rozumowanie ma interesujący aspekt konstrukcyjny przy kreśleniu cieni. Mianowicie, „punkt załamania” cienia odcinka  $AB$  - można konstruować jako przecięcie prostej łączącej punkty przecięcia  $P, Q$  promieni  $a_1a_2, b_1b_2$ , rzutujących punkty  $A(A'A'')$ ,  $B(B'B'')$  z punktu  $S(S'S'')$  z prostą  $k$ . Jest to użyteczne zwłaszcza wtedy, gdy są kłopoty ze znalezieniem niektórych śladów promieni rzutujących. Fakt ten nie był znany w dotychczasowych konstrukcjach cieni.

Warto jeszcze zauważyć, że odwzorowania Monge'a indukują wiele interesujących konfiguracji geometrycznych. Dwie spośród nich opisują sformułowane w pracy twierdzenie i wniosek.

## LITERATURA

1. Grochowski B.: Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną. PWN, Warszawa 1995
2. Jankowski M.: Elementy grafiki komputerowej. WNT, Warszawa 1990

Recenzent: Dr hab. Eugeniusz Korczak  
Prof. Politechniki Poznańskiej

**Abstract**

The construction of the shadow of figure on two projection surfaces consists to determination a set of shadow all points of the figure and a convex coating of this set. In case where a certain edge (segment) has the shadow on two projection surfaces this shadow will be refracted. In classical descriptive geometry, in Monge' projection the point of refraction is obtained as a intersection of segment  $H_a H_b$  ( $V_a V_b$ ) with  $x$  axis, where  $H_a$  ( $V_a$ ),  $H_b$  ( $V_b$ ) are horizontal (vertical) traces of lines  $a$ ,  $b$  being of projection rays of points  $A$ ,  $B$ . Independence of the point of refraction on choice of segments  $H_a H_b$ ,  $V_a V_b$ , in planar construction is not obvious. Usually, in descriptive geometry the mentioned above construction of the shadow of segment is obtained as a consequence of the spatial analyse and on the other hand as a consequence of intuitive aspect of the occurrence of shadow. It is a good conception in a didactic. However the mentioned construction of the point of refraction requires a proof on the base of planar properties in twodimensional projective geometry. An attempt of the proof of independence of the refraction point with respect of the choice of segments  $H_a H_b$ ,  $V_a V_b$  brought to following fact: The refraction point of the shadow of segment can be obtained as an intersection of the line connecting two intersection points of the pairs  $(a', a'')$ ,  $(b', b'')$  being the horizontal and vertical projection of lines  $a$ ,  $b$  with  $x$  axis.