ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z.2 Nr kol. 1383

KOŹNIEWSKI Edwin
Politechnika Białostocka
LASKOWSKA Joanna
Filia Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku

O PEWNEJ PARAMETRYZACJI POWIERZCHNI WIELOŚCIENNYCH

Streszczenie. W pracy rozważa się opis parametryczny (praszkielet) powierzchni wielościennej za pomocą odwzorowania prostokąta dyskretnego na zbiór wierzchołków tej powierzchni. Przedstawiono procedurę w języku AutoLISP, realizującą opisywaną metodę na przykładzie dwudziestościanu foremnego.

ON CERTAIN PARAMETER DESCRIPTION OF POLYHEDRAL SURFACES

Summary. A parameter description of the polyhydral surface basing on the discrete rectangle is given. The introduced method allows simply to draw a parametrized surface. The considered method in AutoLISP program is ilustrated.

1. Wprowadzenie

W systemie AutoCAD istnieje polecenie 3DMESH, pozwalające wykreślić powierzchnie zadane w postaci dyskretnej. Powierzchnie takie mogą być poddane później wygładzeniu np. do powierzchni Béziera. Interesująca wydaje się próba sparametryzowania ogólnej powierzchni wielościennej w celu jej przestrzennej wizualizacji, w szczególności wielościanu, będącego powierzchnią zamkniętą. Rzecz jest ciekawa także z tego powodu, że algorytm, na którym jest oparte polecenie 3DMESH, jest dość prosty i może być wykorzystywany w wizualizacji komputerowej realizowanej w innych systemach i językach programowania (np. w PASCALU).

Powierzchnię wielościenną określimy następująco. Weźmy skończoną ilość wielokątów domkniętych $V_1, \ldots V_n$ spełniających warunki:

(w1) jeżeli V_i i V_j (gdzie i, j = 1, ..., n; i≠j) mają wspólny bok, to nie leżą w jednej płaszczyźnie,

(w2) dla dowolnych i różnych i, j (i, j = 1, ..., n) istnieje ciąg skończony V_{lk}, gdzie $l_k \in \{1, \ldots, n\}$ oraz k = 1, ..., m taki, że V_{lk} i V_{lk+1} mają wspólny bok oraz $V_{l1} = V_i$, $V_{lm} = V_j$.

Suma takich wielokątów $V_1, \ldots, V_n$ jest *powierzchnią wielościenną*. Przy czym każdy z wielokątów nazywamy *ścianą*, każdy z boków tych wielokątów - *krawędzią* , a każdy z wierzchołków - *wierzchołkiem* powierzchni wielościennej [5].

Powierzchnię wielościenną W będziemy traktować jako zbiór wierzchołków **ZW** i zbiór krawędzi **ZK**. Ponieważ ograniczymy się do powierzchni o ścianach co najwyżej czworokątnych, rozróżnianie ścian (tak jak to czyni się w grafice komputerowej [JAN90]) w opisie powierzchni wielościennej pominiemy.

Pomysł parametryzacji powierzchni wielościennej przyjmiemy z geometrii różniczkowej. Jak wiadomo z geometrii różniczkowej, *powierzchnią* w przestrzeni euklidesowej E^3 nazywamy taki zbiór S punktów przestrzeni, w którym każdy punkt $X \in S$ ma w S otoczenie U, gdzie domknięcie jest płatem prostym. Przy czym *płatem prostym* nazywamy zbiór punktów przestrzeni E^3, będący obrazem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym prostokąta wraz z brzegiem [1]. Powyższy homeomorfizm stanowi opis parametryczny powierzchni.

2. Pojęcie praszkieletu

Najpierw określimy tzw. *prostokąt dyskretny* o wymiarze m x n, przez który rozumieć będziemy zbiór

$$P_{m,n} = \{(i,j) \in N \times N: 0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le n-1,\ m,n \in N\}. \qquad (2.1)$$

Każdy element zbioru $P_{m,n}$ nazywamy *punktem* prostokąta dyskretnego, kazdy z podzbiorów postaci:

$$\{(i,j),\ (i+1,j)\} \text{ dla } 0\le i<m-1,\ 0\le j\le n-1 \text{ lub } \{(i,j),\ (i,j+1)\} \text{ dla } 0\le i\le m-1,\ 0\le j<n-1 \tag{2.2}$$

nazywamy *odcinkiem* lub *krawędzią* prostokąta dyskretnego. Powiemy też, że odcinek $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\}$ *łączy* punkty (i_1, j_1), (i_2, j_2). Odcinek łączący dwa te same punkty nazywać będziemy *odcinkiem zerowym*.

W celu utworzenia reprezentacji graficznej powierzchni wielościennej W o zbiorze wierzchołków **ZW** i zbiorze krawędzi **ZK** tak, by można ją było reprezentować za pomocą polecenia 3DMESH, wystarczy dla pewnych m, n $\in$ N określić odwzorowanie:

$$3DM: P_{m,n} \to \mathbf{ZW}, \tag{2.3}$$

spełniające warunki:

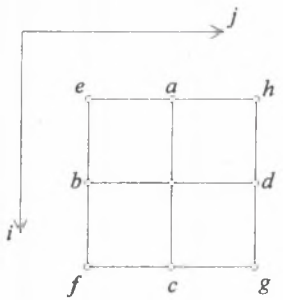
1° $3DM(P_{m,n}) = \mathbf{ZW}$,

2° zbiór **ZK** pokrywa się ze zbiorem odcinków $(W(i, j_1), W(i_2, j_2))$ otrzymanych w sposób następujący: każdy z wierzchołków W(i,j) łączony jest z wierzchołkami (patrz rys.1):

W(i-1,j), W(i,j-1), W(i+1,j), W(i,j+1)	dla 0<i<m-1, 0<j<n-1,	(2.4)
W(i,j-1), W(i+1,j), W(i,j+1)	dla i=0, 0<j<n-1,	(2.4a)
W(i-1,j), W(i+1,j), W(i,j+1)	dla 0<i<m-1, j=0,	(2.4b)
W(i-1,j), W(i,j-1), W(i,j+1)	dla i=m-1, 0<j<n-1,	(2.4c)
W(i-1,j), W(i,j-1), W(i+1,j)	dla 0<i<m-1, j=n-1,	(2.4d)
W(i+1,j), W(i,j+1)	dla i=0, j=0,	(2.4e)
W(i-1,j), W(i,j+1)	dla i=m-1, j=0,	(2.4f)
W(i-1,j), W(i,j-1)	dla i=m-1, j=n-1,	(2.4g)
W(i-1,j), W(i+1,j)	dla i=0, j=n-1.	(2.4h)

Sposób łączenia wierzchołków ilustruje rys.1. I tak: punkt prostokąta dyskretnego bez oznaczenia odpowiada przypadkowi (2.4), punkt oznaczony literą a odpowiada przypadkowi (2.4a), punkt oznaczny literą b odpowiada przypadkowi (2.4b), itd.

Odwzorowanie (2.3) nazywać będziemy *opisem parametrycznym* lub *praszkieletem* powierzchni wielościennej W. Daną powierzchnię wielościenną **W** możemy opisać na wiele sposobów. Nie będziemy tu omawiać pełnej teorii reprezentowalności wielościanu w powyższym sensie. Jest to niewątpliwie problem ciekawy z uwagi choćby na możliwości minimalizacji mocy prostokąta dyskretnego, będącego prze-



Rys.1

ciwobrazem zbioru **ZW** pewnego wielościanu. Zauważmy jedynie, że liczba krawędzi (liczba krawędzi niezerowych - k_n, liczba krawędzi zerowych - k_z) d(m,n) praszkieletu wielościanu o k krawędziach dla prostokąta dyskretnego o wymiarze mxn jest równa m(n-1)+(m-1)n, a po przekształceniu wyraża się wzorem:

$$d(m,n) = 2mn - m - n \tag{2.5}$$

i spełnia warunek:

$$k \leq 2mn - m - n. \tag{2.6}$$

W praktyce najbardziej interesująca będzie minimalna wartość funkcji (2.5), spełniająca warunek (2.6). Zauważmy, że dla dowolnych m,n prawdziwa jest implikacja:

$$n \leq m \Rightarrow d(m+1,n-1) \leq d(m,n). \tag{2.7}$$

Istotnie, załóżmy najpierw, że $n \leq m$. Wówczas zachodzi nierówność

$$0 \leq m-n \tag{2.8}$$

Obliczmy różnicę d(m,n) - d(m+1,n-1)=2mn-n-m - (2(m+1)(n-1)-(m+1)-(n-1))=2mn-n-m-(2mn+n-3m-2)=2(m-n)+2. Na mocy (2.8) stwierdzamy, ze 2(m-n)+2>0. Czyli d(m,n)-d(m+1,n-1)>0. To dowodzi prawdziwości implikacji (2.7). Zauważmy ponadto, że nierówność w poprzedniku implikacji (2.7) możemy zapisać odwrotnie i zmienić odpowiednio następnik. Stąd postępowanie przy minimalizacji funkcji d(m,n) nie zależy od wyboru zmiennych m,n. Korzystając z udowodnionej implikacji (2.7) otrzymamy dla k<n ciąg nierówności:

$$d(m+l,n-l) \leq \ldots \leq d(m+2,n-2) \leq d(m+1,n-1) \leq d(m,n), \tag{2.9}$$

według którego praszkielet o jednym minimalnie krótkim a drugim maksymalnie długim boku jest optymalny.

Zbiór 3DM($P_{m,n}$) = **ZW** powierzchni wielościennej **W** oraz zbiór **ZK** wszystkich odcinków łączących te punkty według zasady (2.4) - (2.4h) nazywać będziemy *3DM-szkieletem* powierzchni wielościennej **W**.

Niżej wykażemy, że za pomocą 3DM-szkieletu możemy przedstawić jedynie takie powierzchnie, których ścianami są wielokąty będące jedynie trójkątami lub czorokątami. Z uwagi na to, że w definicji nie rozpatrujemy ścian powierzchni wielościennej, okazuje się między innymi, że istnieje też możliwość reprezentacji powierzchni wielo-

ściennych, w których pewne ściany są wielokątami o dowolnej liczbie boków (np. wielościany archimedesowe).

Zanim przedstawimy twierdzenie, umówimy się, co będziemy rozumieć przez pojęcie oczka prostokąta dyskretnego. *Oczkiem prostokąta dyskretnego* $P_{m,n}$ nazywamy każdy zbiór punktów o postaci:

$$\{(i,j), (i+1,j), (i+1, j+1), (i,j+1)\}, \text{ gdzie } (i,j) \in N\text{x}N, \quad 0 \le i \le m-1, 0 \le j \le n-1, \ m,n \in N \qquad (1.4)$$

Twierdzenie

W opisie parametrycznym powierzchni wielościennej W obrazem oczka prostokąta dyskretnego może być punkt, odcinek, trójkąt lub czworokąt.

Dowód

Dowód polega na rozpatrzeniu sześciu istotnie różnych przypadków wzajemnego położenia wierzchołków W(i,j), W(i,j+1), W(i+1,j), W(i+1,j+1):

(i) Jeżeli wierzchołki są parami różne, to otrzymujemy czworokąt (rys.2a).

(ii) Jeżeli W(i,j) = W(i,j+1) zaś pozostałe wierzchołki są różne, to otrzymujemy trójkąt (rys.2b)

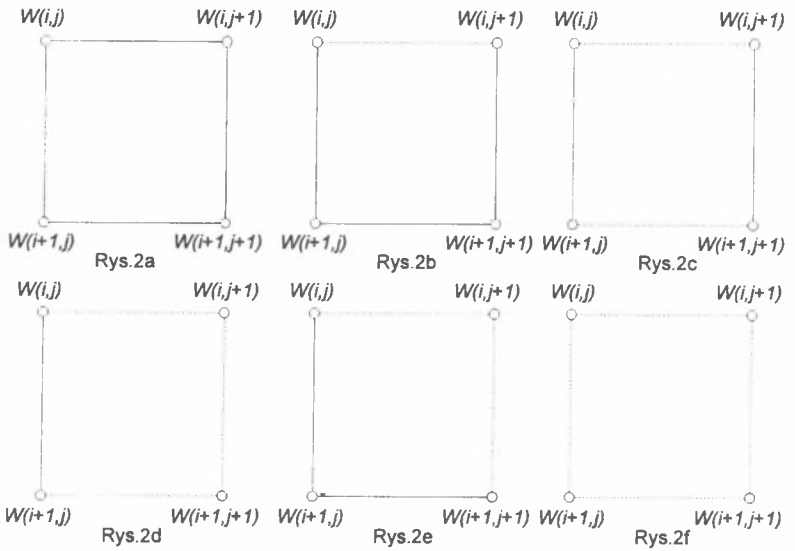
(iii) Gdy W(i,j) = W(i,j+1) i W(i+1,j) = W(i+1,j+1) a pozostałe wierzchołki są różne, to otrzymujemy odcinek (rys.2c).

(iv) (W(i,j) = W(i,j+1) $\wedge$ W(i,j+1) = W(i+1,j+1) $\wedge$ W(i+1,j+1) = W(i+1,j)) $\Rightarrow$ ~(W(i,j) $\neq$ W(i+1,j))), więc taki wariant połączeń pokrywania się wierzchołków nie istnieje (rys.2d).

(v) (W(i,j) = W(i,j+1) $\wedge$ W(i,j+1) = W(i+1,j+1)) $\Rightarrow$ otrzymujemy odcinek (położony „poziomo" lub „pionowo") (rys.2e).

(vi) Jeżeli (W(i,j) = W(i,j+1) $\wedge$ W(i,j+1) = W(i+1,j+1) $\wedge$ W(i+1,j+1) = W(i+1,j) $\wedge$ W(i+1,j) = W(i,j)), to otrzymujemy punkt (rys.2f).

Obraz dowolnego oczka prostokąta dyskretnego jest *ścianą* praszkieletu powierzchni wielościennej. Natomiast z udowodnionego twierdzenia widać, że jeżeli obrazem oczka prostokąta jest punkt lub odcinek, to ściana taka będzie zdegenerowana.



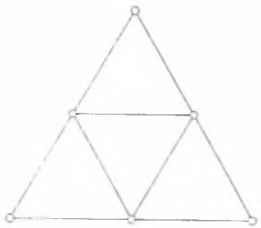
Rys.2

3. Reprezentacja wielościanów

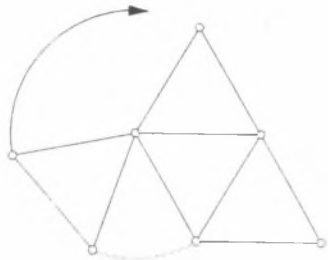
Z udowodnionego twierdzenia wynika, że omawiana teoria może być zastosowana jedynie do takich wielościanów, których ściany mają co najwyżej 4 krawędzie. Nie jest to klasa zbyt duża (nie można opisać np. wszystkich wielościanów foremnych), ale jeśli zważymy, że w klasie takich powierzchni mieści się większość kratownic, rozwiązanie wydaje się interesujące z praktycznego punktu widzenia ([7], [6]). Z definicji przekształcenia i udowodnionego twierdzenia wynika, że pewne powierzchnie wielościenne, zwłaszcza te, które są wielościanami, w przedstawionym opisie zawierają ściany zdegenerowane.

Określenie odwzorowania (2.3) dla danej powierzchni wielościennej W sprowadzimy do jej płaskiego opisu praszkieletu. Omówimy zastosowanie przedstawionych rozważań do wizualizacji powierzchni wielościennych na przykładach czworościanu foremnego, sześcianu, dwudziestościanu foremnego. Rysunek 3f, wraz z określe-

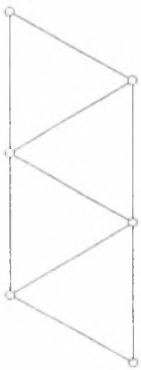
niem współrzędnych kartezjańskich wierzchołków, przedstawia praszkielet czworościanu, zaś sekwencja rysunków 3a-3e ilustruje sposób dojścia do praszkieletu przedstawionego na rysunku 3f.



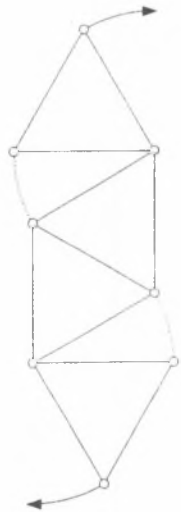
Rys.3a



Rys.3b



Rys.3c



Rys.3d

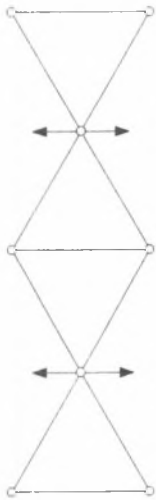
Zauważmy, że każdej parze punktów (0,0), (2,0); (2,1), (4,1) oraz każdej trójce punktów (0,1), (3,0), (3,1); (1,0), (1,1), (4,0) prostokąta dyskretnego $P_{4,1}$ jest przyporządkowany jeden odpowiedni wierzchołek.

Każdemu z wierzchołków czworościanu foremnego przyporządkowujemy jego współrzędne kartezjańskie w przestrzeni w stosownie dobranym układzie współrzędnych, i tak:

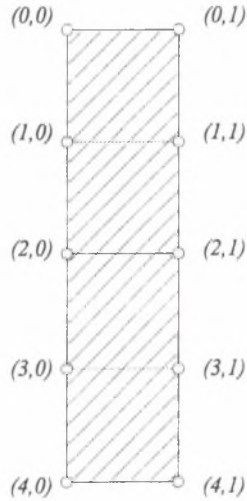
$$W(1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{1}{2}a, 0), \quad \text{przy czym } W(1,0) = W(1,1) = W(4,0),$$

$$W(0,0) = (0,0, \frac{\sqrt{6}}{3}a), \quad \text{przy czym } W(0,0) = W(2,0),$$

$$W(0,1) = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{3}a), \text{przy czym } W(0,1) = W(3,0) = W(3,1).$$

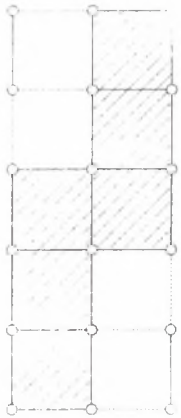


Rys.3e

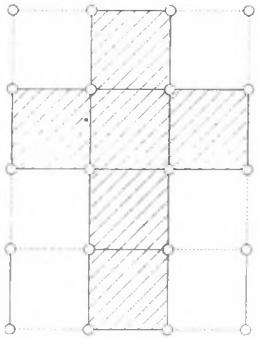


Rys.3f

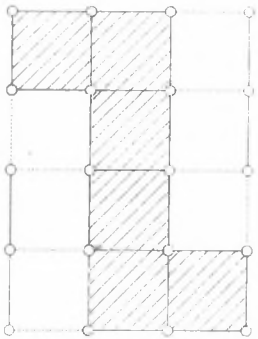
Dana powierzchnia może mieć wiele praszkieletów. Przyglądnijmy się trzem praszkieletom sześcianu. Praszkielety te mogą różnić się dziedziną, a więc prostokątami dyskretnymi, nad którymi są rozpięte: $P_{6,3}$ (rys.4a), $P_{5,4}$ (rys.4b, rys.4c), bądź różnić się wartością funkcji d(m,n): d(6,3) = 27 (rys.4a), d(6,3) = 31 (rys.4b, rys.4c). Przy tej samej wartości funkcji d(m,n) praszkielety mogą różnić się liczbą odcinków niezerowych:



Rys.4a



Rys.4b



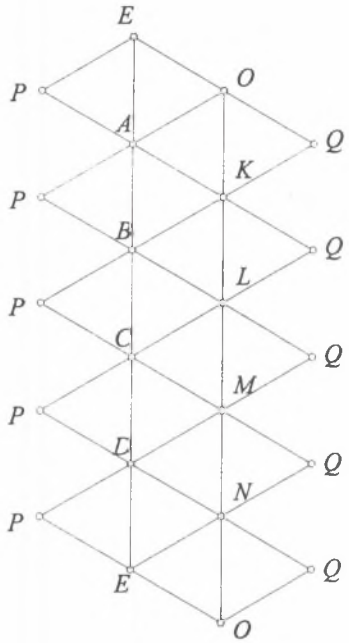
Rys.4c

$k_n = 21$ (rys.4b), $k_n = 23$ (rys.4c). Z punktu widzenia grafiki komputerowej parametry d(m,n), k_z, k_n mają istotny wpływ na czas wizualizacji powierzchni. Otóż wartość d(m,n) powinna być najmniejsza, zaś przy danej optymalnej wartości d(m,n), z uwagi na równość $d(m,n) = k_z + k_n$, wartość k_z powinna być największa.

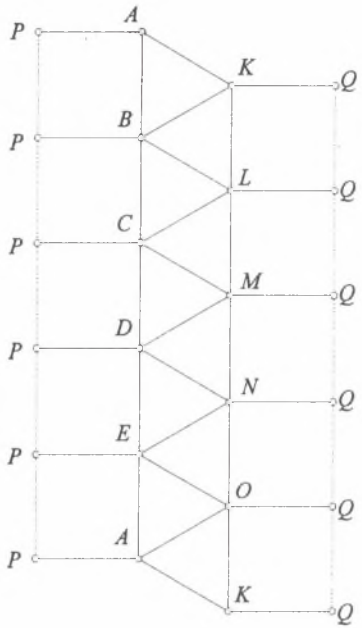
4. Praszkielet i program wizualizujący dwudziestościan foremny

Przykładowy praszkielet dwudziestościanu foremnego PABCDEKLMNOQ tworzymy rozpoczynając, jak zwykle, od standardowej siatki wielościanu (rys.5a) w sposób opisany na rysunkach 5a-5d. Foremność dwudziestościanu nie jest tu bardzo istotna, a podyktowana jest tym, że przypadku figury foremnej łatwiej jest wyznaczyć współrzędne kartezjańskie jej wierzchołków.

Kształt praszkieletu zależny jest od sposobu przekształcania siatki wielościanu. Siatkę tę poddaje się transformacjom takim, jak" „obrót", „symetria" (oczywiście nie chodzi tu ściśle o izometrie parzyste i nieparzyste w sensie geometrycznym, lecz o podobne operacje), „rozrywanie" wierzchołków i krawędzi. Z uwagi na wstępny charakter pracy nie będziemy się tu zajmować szczegółowo analizą własności praszkieletów. Problematyka ta będzie ewentualnie przedmiotem oddzielnej pracy. Niemniej,



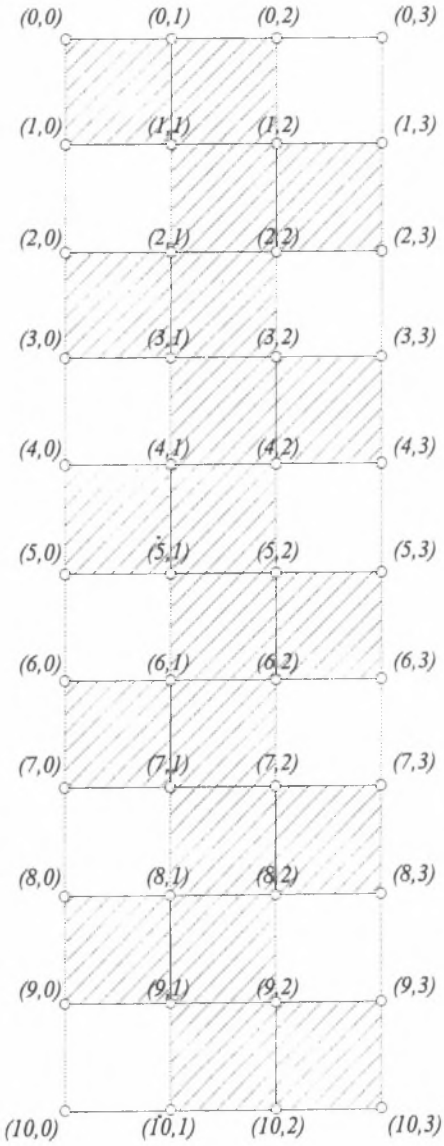
Rys.5a



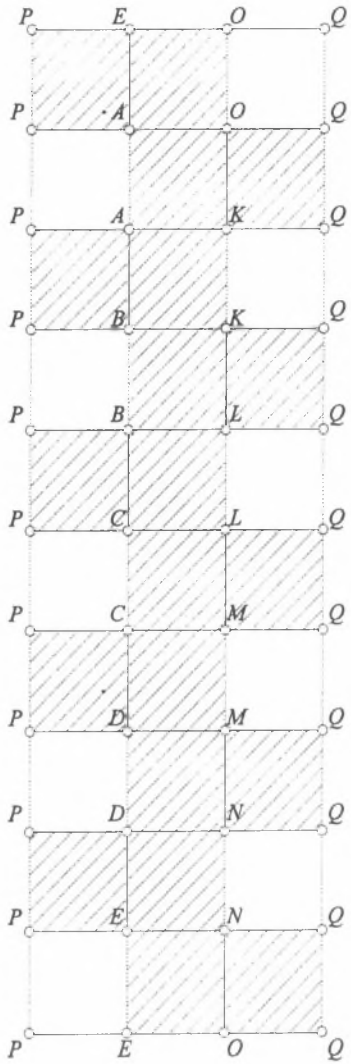
Rys.5b

wskażemy na pewne intuicje i hipotezy związane z tworzeniem odwzorowań 3DM. Świadczą o tym przytoczone dwie konstrukcje praszkieletów dwudziestościanu foremnego. Z konstrukcji tych potrafimy wyprowadzić, jako pośredni, trzeci model praszkieletu o drugim wymiarze 3 (jaki jest pierwszy wymiar?). Nietrudno zauważyć, że praszkielet, którego konstrukcja zilustrowana jest na rysunkach 5a-5d, jest najprostszy do osiągnięcia. Otrzymany praszkielet ma jako dziedzinę prostokąt $P_{11,4}$, wartość funkcji d(11,4) = 73, k_z = 30.

W celu praktycznej wizualizacji każdemu z wierzchołków dwudziestościanu o krawędzi a przyporządkowujemy jego współrzędne kartezjańskie w przestrzeni w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych. Obliczenia tych współrzędnych pominiemy.


(0,0)
(0,1)
(0,2)
(0,3)
(1,0)
(1,1)
(1,2)
(1,3)
(2,0)
(2,1)
(2,2)
(2,3)
(3,0)
(3,1)
(3,2)
(3,3)
(4,0)
(4,1)
(4,2)
(4,3)
(5,0)
(5,1)
(5,2)
(5,3)
(6,0)
(6,1)
(6,2)
(6,3)
(7,0)
(7,1)
(7,2)
(7,3)
(8,0)
(8,1)
(8,2)
(8,3)
(9,0)
(9,1)
(9,2)
(9,3)
(10,0)
(10,1)
(10,2)
(10,3)

Rys.5c



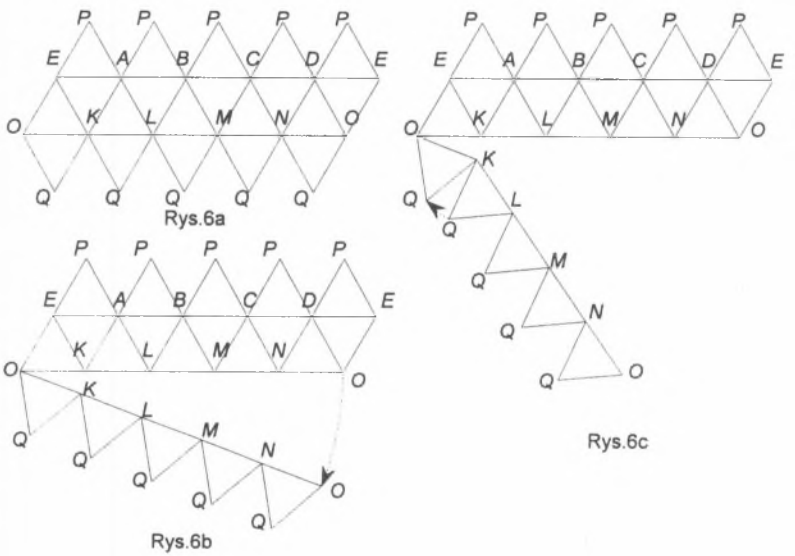
Rys.5d

Na podstawie niżej przedstawionego praszkieletu dwudziestościanu foremnego (rys.5c-5d) została napisana w języku AutoLISP procedura rysująca ten wielościan.

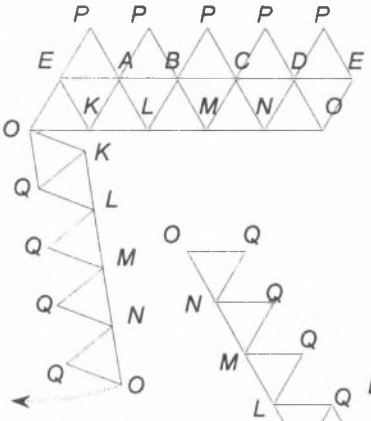
```
; Program funkcja c:dwudziestoscian
(defun c:dwudziestoscian ( / p dl sce sbm A B C D E P K L M N O Q)
  (command "LIMITS" "Off")
  (setq sce (getvar "CMDECHO"))
  (setq sbm (getvar "BLIPMODE"))
  (setvar "BLIPMODE" 0)
  (setvar "CMDECHO" 0)
  (initget (+ 16 1))
  (setq P (getpoint "\nWierzcholek pocz: "))
  (initget (+ 4 2 1))
  (setvar "ORTHOMODE" 1)
  (setq dl (getdist P "\nDlugosc krawedzi: "))
  (setq s1 (sin 0.628))
  (setq s2 (sin 1.256))
  (setq c1 (cos 0.628))
  (setq c2 (cos 1.256))
  (setq r1 (* 2 s1))
  (setq r (/ dl r1))
  (setq ex (expt s1 2))
  (setq ex11 (/ 1 (* 4 ex)))
  (setq ex1 (- 1 ex11))
  (setq aa (* dl (sqrt ex1)))
  (setq ex2 (- (* 4 ex) 1))
  (setq ex22 (sqrt ex2))
  (setq bb (/ dl (* r1 ex22 )))
  (setq A (list (- (car p) r) (cadr p) (+ (caddr p) aa)))
  (setq B (list (- (car p) (* r c2)) (- (cadr p) (* r s2)) (+ (caddr p) aa)))
  (setq C (list (+ (car p) (* r c1)) (- (cadr p) (* r s1)) (+ (caddr p) aa)))
  (setq D (list (+ (car p) (* r c1)) (+ (cadr p) (* r s1)) (+ (caddr p) aa)))
  (setq E (list (- (car p) (* r c2)) (+ (cadr p) (* r s2)) (+ (caddr p) aa)))
  (setq O (list (- (car p) (* r c1)) (+ (cadr p) (* r s1)) (+ (caddr p) bb)))
  (setq K (list (- (car p) (* r c1)) (- (cadr p) (* r s1)) (+ (caddr p) bb)))
  (setq L (list (+ (car p) (* r c2)) (- (cadr p) (* r s2)) (+ (caddr p) bb)))
  (setq M (list (+ (car p) r) (cadr p) (+ (caddr p) bb)))
  (setq N (list (+ (car p) (* r c2)) (+ (cadr p) (* r s2)) (+ (caddr p) bb)))
  (setq Q (list (car p) (cadr p) (+ (caddr p) (+ aa bb))))
  (setvar "ORTHOMODE" 1)
  ;siec 3DMESH o wymiarach: Mesh M size = 11, Mesh N size = 4
```

```
  (command "3DMESH" "11" "4" P E O Q P A O Q P A K Q P B K Q P B L Q P C
L Q P C M Q P D M Q P D M Q P E N Q P E O Q)
  (setvar "BLIPMODE" sbm)
  (setvar "CMDECHO" sce)
  (command "LIMITS" "On")
); defun c:dwudziestoscian
```

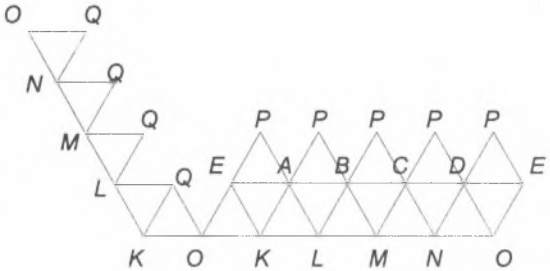
Na koniec przedstawimy konstrukcję najbardziej „ekonomicznego" praszkieletu dwudziestościanu foremnego (rys.6a-6k).



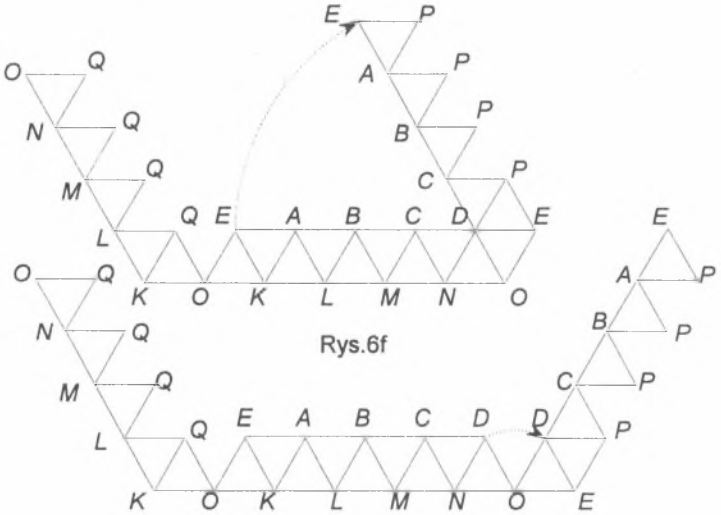
rys.6a,b,c



Rys.6d



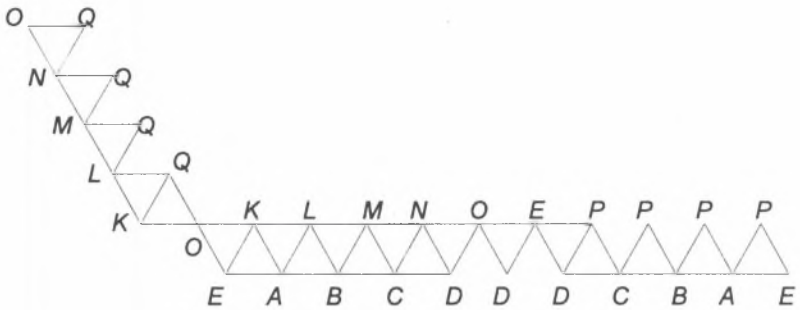
Rys.6e



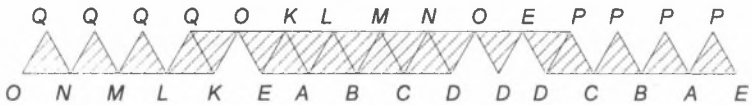
Rys.6f

Rys.6g

rys.6d,e,f,g



Rys.6i



Rys.6j

Rys.6k

rys.6i,j,k

Praszkielet ten rozpięty jest na prostokącie $P_{21,2}$, dla którego d(21,2) = 61, k_n = 42, k_z = 19. Zauważmy, że jest to praszkielet o minimalnej liczbie ścian (20). Można podejrzewać, że wszystkie wielościany, które mają jako ściany trójkąty, są przedstawialne w postaci praszkieletów o liczbie ścian równej liczbie ścian wielościanu.

LITERATURA

1. GOETZ A.: Geometria różniczkowa. PWN, Warszawa 1965
2. GROCHOWSKI B.: Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną. PWN, Warszawa 1995

3. HORCZYCZAK M., SKIERSKI J.: AutoLISP dla użytkowników AutoCAD'a. Wydawnictwo PLJ, Warszawa 1991
4. JANKOWSKI M.: Elementy grafiki komputerowej. WNT, Warszawa 1990
5. KORDOS M., SZCZERBA W.: Geometria dla nauczycieli. PWN, Warszawa 1976
6. NIEMIERKO A.: Rzecz o kratownicach. WKŁ (Wydawnictwa Komunikacji i Łączności), Warszawa 1987
7. OCHOŃSKI S.: Geometria przekryć w budownictwie. Skrypt Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1985
8. PIKOŃ A.: AutoCAD wersja 10. HELION, Gliwice 1991

Recenzent: Dr hab. Krzysztof Witczyński
Profesor Politechniki Warszawskiej

Abstract

In AutoCAD the 3DMesh function is a well known command for the drawing of discrete determined surfaces. The obtained, in this way, surfaces can be smoothed to i.e. Béziere ' surface. It would be interesting to give such parametric description of the polyhedral surface, in particular polyhedron, which allows to draw of described surface by 3DMesh command. The *discrete rectangle* and *preskeleton* as a mapping of this rectangle onto the set of all vertices of polyhedral surface is considered. A properties of the above mapping and the way of construction for regular polyhedrons are presented. From a proved in this paper theorem, it follows that mentioned method can be used to polyhedrons having triangles and quadrangles as faces. Is wort-while to notice this class of polyhedral surfaces contains almost all simple and space trusses.

In this work the construction of tetrahedron, cube, icosahedron preskeleton is explained. The optimization of choice considered preskeletons on a base obtained in this paper formula is examined.

The introduced method of parameter description of the polyhedral surfaces in AutoLISP program is ilustrated.