

Zbigniew BIENIEK  
Zakład Geometrii i Grafiki Inżynierskiej  
Politechnika Rzeszowska

## GEOMETRIA JEDNOWARSTWOWYCH KRATOWNIC QUASI- POWIERZCHNIOWYCH GENEROWANYCH NA ELIPSOIDZIE OBROTOWEJ

**Streszczenie.** Kształtowanie klasycznych kratownic powierzchniowych opiera się na założeniu przynależności ich węzłów do zadanych powierzchni. Technicznie uzasadnioną alternatywą jest generowanie takich kratownic dwukrzywiznowych, których węzły nie muszą kategorycznie należeć do powierzchni kształtujących. W pracy przedstawiono geometryczny sposób tworzenia obiektów tego rodzaju, zwanych kratownicami quasi-powierzchniowymi na wycinkach elipsoid obrotowych.

## GEOMETRY OF ONE-LAYER AND QUASI-SURFACE TRUSSES MADE ON ROTATIONAL ELLIPSOID

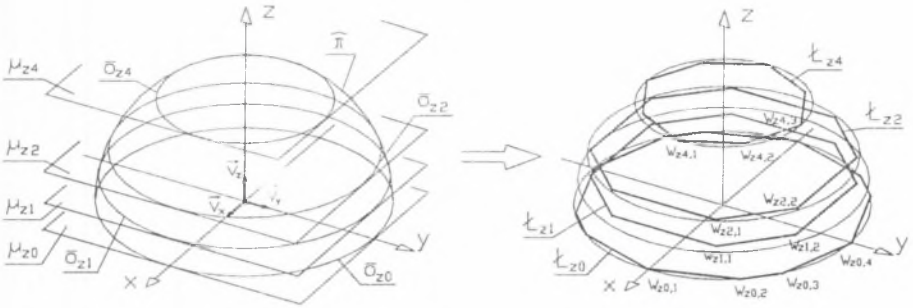
**Summary.** All truss joints of classic surface trusses usually belong to surfaces approximated by those trusses. However, the so-called quasi-surface trusses, omitting this requirement, can be made as well. The article describes the methods of designing and linking of geosims of one-layer and quasi-surface trusses generated on rotational ellipsoid

### 1. WSTĘP

Treść pracy jest kontynuacją, opisaną w [1], koncepcji budowy modeli geometrycznych tzw. kratownic quasi-sferycznych. Posługując się środowiskiem graficznym programu AutoCAD, przedstawiono tam sposób ich kształtowania, przyjąwszy:

- umieszczony w półprzestrzeni ortogonalny układ osi prawoskrętnych o współrzędnych kartezjańskich  $[x,y,z]$ ,
- regularnie rozmieszczone punkty oddalone między sobą o wartość wektorów  $\vec{V}_x = \vec{V}_y = \vec{V}_z$ ,
- współrodkową względem układu osi półsferę  $\hat{\pi}$  o promieniu  $R = 5|\vec{V}_x|$ , kształtującą kratownicę quasi-powierzchniową  $K_{\hat{\pi}}$ ,
- płaszczyzny  $\mu_{zi}$  prostopadłe do osi „z” w punktach o całkowitych liczbach  $i = 0,1,2,\dots,n$ .

Uzyskane linie kształtujące  $\bar{o}_{zi} = \mu_{zi} \cap \bar{\pi}$ , a są nimi odpowiednio zorientowane równoleżniki półsfery (rys. 1), aproksymowano łamanymi  $\mathbb{L}_{zi} \subset \mu_{zi}$ , których wierzchołki  $W_{zij}$  leżą zawsze w punktach o całkowitych współrzędnych.

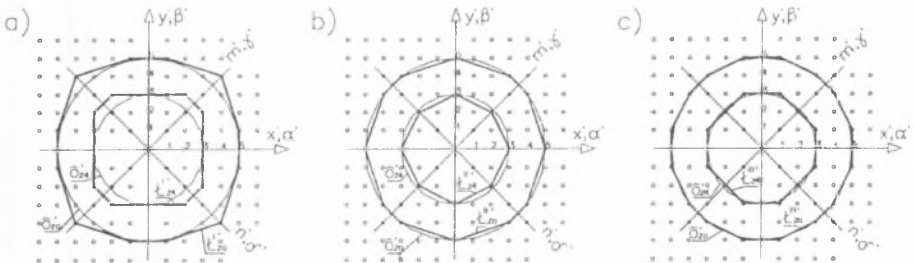


Rys.1. Dobór linii kształtujących  $\bar{o}_{zi}$  powierzchni  $\bar{\pi}$ , zastępowanych łamanymi  $\mathbb{L}_{zi}$  ( $\mu_{zi}$  - płaszczyzny sieczne powierzchni  $\bar{\pi}$ ,  $W_{zij}$  - wierzchołki łamanych  $\mathbb{L}_{zi}$ )

Fig.1. Selection of generating lines  $\bar{o}_{zi}$  for surface  $\bar{\pi}$  and of broken lines  $\mathbb{L}_{zi}$  ( $\mu_{zi}$  - cutting planes of surface,  $W_{zij}$  - vertex of broken lines  $\mathbb{L}_{zi}$ )

Dla przybliżeń łamanych  $\mathbb{L}_{zi}$  do linii kształtujących  $\bar{o}_{zi}$  przyjęto trzy kryteria:

- Kryterium I. Wszystkie punkty łamanej  $\mathbb{L}_{zi}$  leżą po przeciwnej stronie linii  $\bar{o}_{zi}$ , niż środek krzywizny tej linii lub należą do  $\bar{o}_{zi}$  (rys.2a).
- Kryterium II. Wszystkie punkty łamanej  $\mathbb{L}_{zi}$  leżą po tej samej stronie linii  $\bar{o}_{zi}$ , co środek krzywizny linii kształtującej lub należą do  $\bar{o}_{zi}$  (rys.2b).
- Kryterium III. Punkty łamanej  $\mathbb{L}_{zi}$  leżą po dowolnej stronie linii  $\bar{o}_{zi}$  lub w tej linii (rys.2c).



Rys.2. Przykłady aproksymacji równoleżników  $\bar{o}_{z0}$  i  $\bar{o}_{z4}$  łamanymi  $\mathbb{L}_{z0}$  i  $\mathbb{L}_{z4}$  według:

a) I kryterium, b) II kryterium, c) III kryterium

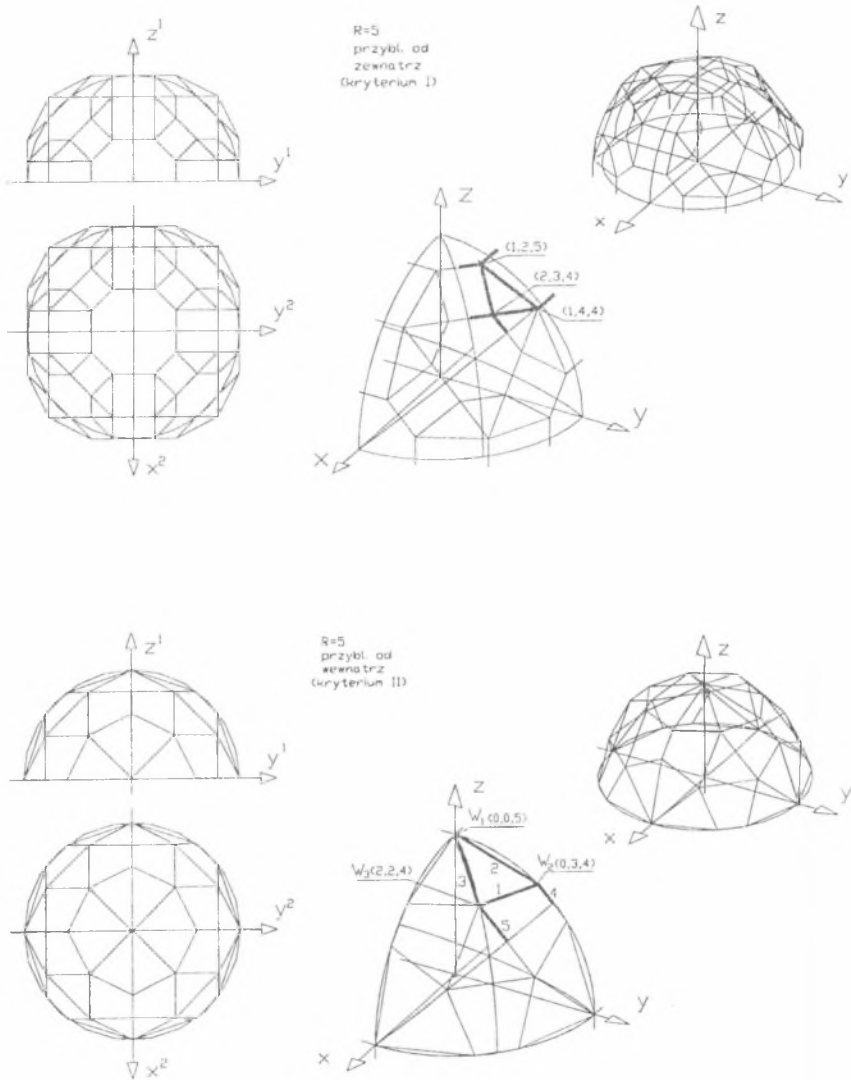
Fig.2. Examples for approximation of the parallels of latitude  $\bar{o}_{z0}$  and  $\bar{o}_{z4}$  by broken lines  $\mathbb{L}_{z0}$  and  $\mathbb{L}_{z4}$ , using:

a) I-st criterion, b) II-nd criterion, c) III-rd criterion

Wszystkie łamane mają wspólne płaszczyzny symetrii oznaczone  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $\delta$ .

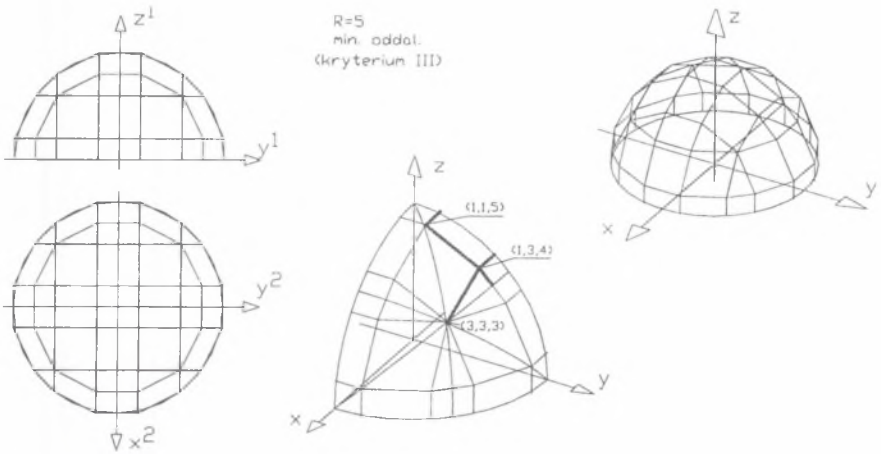
Wykorzystując kolejno kryterium I, II i III połączono między sobą odpowiednie wierzchołki  $W_{zij}$  łamanych  $\mathbb{L}_{zi}^I, \mathbb{L}_{zi}^{II}, \mathbb{L}_{zi}^{III}$ , leżące na poszczególnych warstwach otrzymując kratownicę

przestrzenne  $K_{\#}^I$ ,  $K_{\#}^{II}$  i  $K_{\#}^{III}$  (rys.3-5). Pręty każdej kratownicy stanowią modele geometryczne krawędzi wielościanu wypukłego, aproksymującego półsfery  $\hat{\pi}$  zgodnie z przyjętym kryterium.



Rys.4. Model geometryczny kratownicy quasi-sferycznej  $K_{\#}^{II}$

Fig.4. The geosim of quasi-spherical truss  $K_{\#}^{II}$



Rys.5. Model geometryczny kratownicy quasi-sferycznej  $K_{\#}^{III}$

Fig.5. The geosim of quasi-spherical truss  $K_{\#}^{III}$

Na podstawie przykładów, prototypowych, jednowarstwowych kratownic przestrzennych, otrzymanych w wyniku aproksymacji przyjętej półsfery, sformułowano ich wspólną właściwość:

*Kratownica quasi-powierzchniowa, przybliżająca według I, II lub III kryterium półsferę o promieniu  $R = 5|\vec{V}_x|$ , może być zbudowana z 24 przystających zestawów prętów tworzących dwa równoliczne zbiory tzw. modułów i antymodułów.*

Korzystając z tej właściwości podano dla wybranej kratownicy  $K_{\#}^{II}$ : liczbę typów i liczbę węzłów każdego typu oraz liczbę typów prętów o różnych długościach i długość prętów poszczególnych typów (tab.1 i 2 - wg oznaczeń z rys.4).

Typ, wymiar i liczba elementów składowych (Tab.1 - prętów, Tab.2 - węzłów) kratownicy quasi-sferycznej  $K_{\#}^{II}$ , aproksymującej zgodnie z kryterium II półsferę o promieniu  $R = 5|\vec{V}_x|$   
 Type dimensions and size of constituent elements (Tab.1 - truss members, Tab.2 - truss joints) of the quasi-spherical truss  $K_{\#}^{II}$ , with  $R = 5|\vec{V}_x|$ , by the II-nd criterion of approximation.

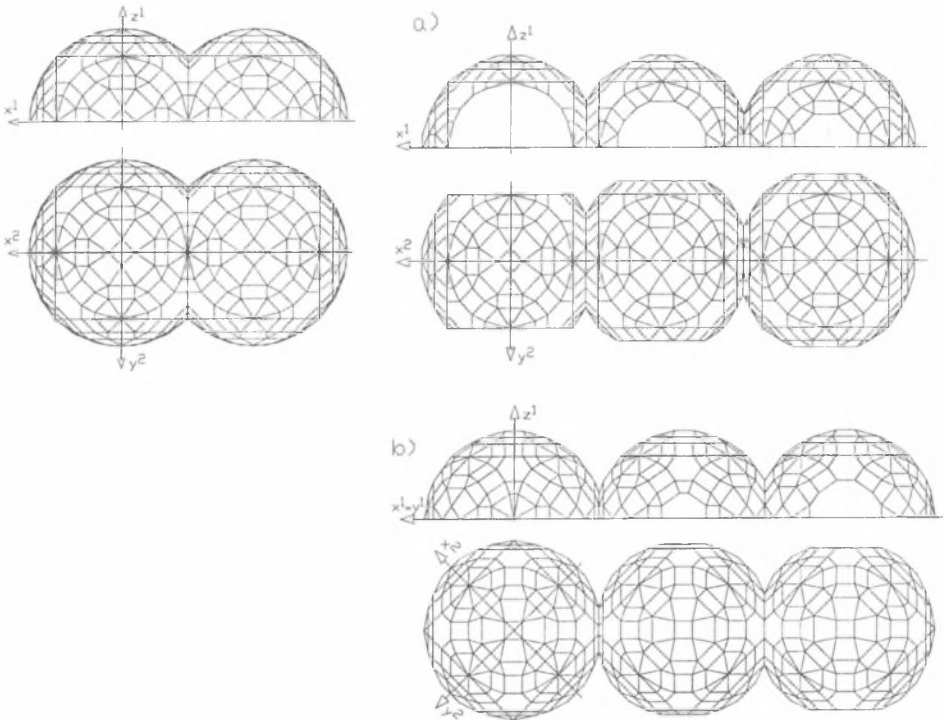
Tabela 1

Nr pręta	1	2	3	4	5
Długość pręta	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
Liczba prętów	24	12	16	8	12

Tabela 2

Typ węzła	$W_1$	$W_2$	$W_3$
Liczba węzłów	5	16	12

W końcowej części pracy [1] przedstawiono przykłady łączenia dwu i więcej kratownic quasi-powierzchniowych, generowanych na półsfery o promieniu  $R = 10\sqrt{2} |\vec{V}_x|$  zgodnie z kryterium II (rys.6 i 7), wskazując na ich szczególne zalety w porównaniu do kratownic budowanych w sposób klasyczny. Pewna liczba prętów i węzłów jest wspólna dla fragmentów łączonych kratownic.



Rys.6, Rys.7. Przykładowe modele połączeń fragmentów kratownicy quasi-sferycznej, generowanej na półsfery o promieniu  $R = 10\sqrt{2} |\vec{V}_x|$  zgodnie z II kryterium aproksymacji

Fig.6, Fig.7. Examples for linking of geosims of fragments of quasi-spherical truss, generated on a hemisphere with radius  $R = 10\sqrt{2} |\vec{V}_x|$  by II-nd criterion of approximation

Układają się one w płaską linię łamaną, zwaną linią nasadową połączenia, co pozwala na:

- rozbudowę obiektów architektury budowlanej przez proste łączenie kratownic ze sobą,
- łatwe powiększanie (np. ułatwiające transport do wnętrza kopuły dużych gabarytowo urządzeń), pomniejszanie lub całkowite zamykanie otworów (np. komunikacyjnych),
- modernizację obiektów z zachowaniem stałej ich szczelności (np. z uwagi na dużą czystość, specjalny klimat czy pod - lub nadciśnienie panujące we wnętrzu).

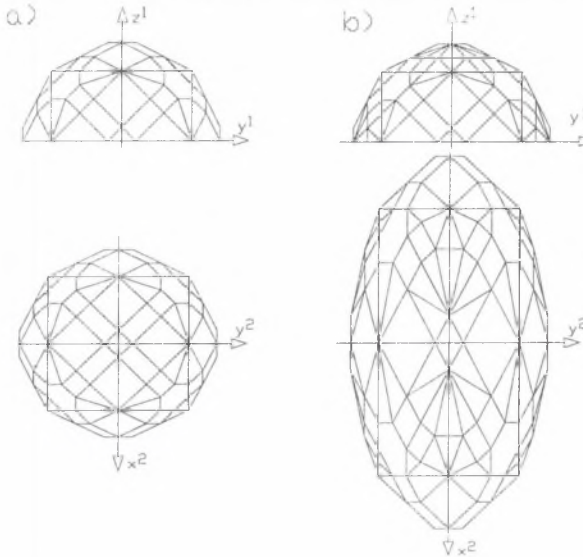
Ponadto wielościan wypukły, którego krawędzie są prętami kratownicy quasi-powierzchniowej, przybliżającej półsferę  $\pi$ , może stanowić model deskowania do wznoszenia np. monolitycznych przekryć skorupowych wykonywanych z betonu.

Kształtowanie tzw. kratownic quasi-eliptycznych odbywa się z zastosowaniem procedury analogicznej do użytej podczas tworzenia kratownic quasi-sferycznych.

## 2. KRATOWNICE QUASI-POWIERZCHNIOWE APROKSYMUJĄCE WYCINKI ELIPSOID OBROTOWYCH

### 2.1. Kratownica quasi-powierzchniowa oparta na elipsoidzie obrotowej o dylatacji względem jednej osi

Niech współczynniki dylatacji [2] dla osi „y” i „z” wyjściowej sfery  $\hat{\pi}$  przekształcanej w elipsoidę obrotową  $\bar{\varepsilon}_1$  wynoszą odpowiednio  $b = c = R$ . Ponieważ do sfery  $\hat{\pi}$  należy wiele węzłów kratownicy quasi-sferycznej [1] niech dylatacja wzdłuż osi „x” zachowa tę właści-



Rys.8. Modele geometryczne: a) kratownicy quasi-sferycznej  $K_{\hat{\pi}}^{II}$  aproksymującej półsferę  $\hat{\pi}$  o promieniu  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$  zgodnie z II kryterium, b) kratownicy quasi-eliptycznej  $K_{\bar{\varepsilon}_1}^{II}$  aproksymującej elipsoidę  $\bar{\varepsilon}_1$  zgodnie z II kryterium ( $a=2R, b=c=R, R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ ;  $a, b, c$  – półosie elipsoidy  $\bar{\varepsilon}_1$ )

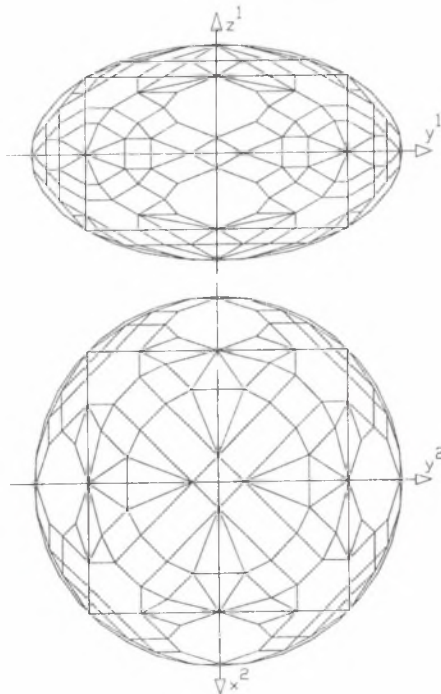
Fig.8. The geosims: a) of quasi-spherical truss  $K_{\hat{\pi}}^{II}$  generated on a hemisphere  $\hat{\pi}$  with radius  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$  by the II-nd criterion of approximation, b) of quasi-elliptical truss  $K_{\bar{\varepsilon}_1}^{II}$  generated on rotational ellipsoid  $\bar{\varepsilon}_1$  by the II-nd criterion of approximation ( $a=2R, b=c=R, R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ ;  $a, b, c$  – semi axes of ellipsoid  $\bar{\varepsilon}_1$ )

wość w kratownicy opartej na elipsoidzie obrotowej  $\bar{\varepsilon}_1$ . Nastąpi to, jeśli półosie a elipsoidy będzie miała długość równą całkowitej wielokrotności promienia R. Ze względów użytkowo-estetycznych (różnice w proporcjach długości osi elipsoidy  $\bar{\varepsilon}_1$ ) założymy  $a = 2R$ . Wybierając współrzędną  $x_1$  z przedziału  $\langle -2R, +2R \rangle$ , z założenia będącą liczbą całkowitą, prowadzimy

płaszczyznę  $\mu_{x_i}$  prostopadłą do osi „x”. Iloczynem elipsoidy  $\bar{\epsilon}_1$  i płaszczyzny  $\mu_{x_i}$  jest okrąg równoleżnikowy  $\bar{o}_{x_i}$  zastępowany łamaną  $L_{x_i}$  (analogicznie do metody z rys.1). Węzły generowanej kratownicy  $K_{\bar{\epsilon}_1}$ , aproksymującej zadaną elipsoidę  $\bar{\epsilon}_1$ , będą narożnikami, a jej pręty krawędziami wielościanu wypukłego, przybliżającego  $\bar{\epsilon}_1$  zgodnie z obranym kryterium. Rysunek 8a przedstawia rzuty podstawowe kopuły kratownicy, opartej na półsferze  $\bar{\pi}$  o promieniu  $R = 5\sqrt{2} |\bar{V}_x|$ , natomiast rys.8b obrazuje rzuty podstawowe kopuły kratownicy quasi-powierzchniowej, opartej na połowie elipsoidy obrotowej  $\bar{\epsilon}_1$  o półosiach  $a = 2R, b = c = R$ . W obu przypadkach stosowano II kryterium aproksymacji.

**2.2. Kratownica quasi-powierzchniowa oparta na elipsoidzie obrotowej o równej dylatacji względem dwóch osi**

Przyjmijmy tym razem współczynniki dylatacji dla osi „x” i „y”, wyjściowej sfery  $\bar{\pi}$  o promieniu R, wynoszące odpowiednio  $a = b = 2R$ , pozostawiając  $c = R$ . Tak jak poprzednio różnice w proporcjach długości osi elipsoidy  $\bar{\epsilon}_2$  dobrano z przyczyn użytkowo-estetycznych. Rysunek 9 przedstawia rzuty podstawowe kratownicy quasi-powierzchniowej, przybliżającej elipsoidę  $\bar{\epsilon}_2$ , zbudowanej przy założeniach:  $R = 5\sqrt{2} |\bar{V}_x|$ , II kryterium aproksymacji.



Rys.9. Model geometryczny kratownicy quasi-eliptycznej  $K_{\bar{\epsilon}_2}^{II}$  aproksymującej elipsoidę  $\bar{\epsilon}_2$  zgodnie z II kryterium ( $a=b=2R, c=R, R=5\sqrt{2} |\bar{V}_x|$ ; a,b,c – półosie elipsoidy  $\bar{\epsilon}_2$ )

Fig.9. The geosim of quasi-elliptical truss  $K_{\bar{\epsilon}_2}^{II}$  generated on rotational ellipsoid  $\bar{\epsilon}_2$  by the II-nd criterion of approximation ( $a=b=2R, c=R, R=5\sqrt{2} |\bar{V}_x|$ ; a,b,c – semi axes of ellipsoid  $\bar{\epsilon}_2$ )



Zakładając położenie biegunów powierzchni  $\bar{\varepsilon}_2$  na osi „z” możemy przez tę oś poprowadzić cztery płaszczyzny symetrii kratownicy (patrz rys.2). Piątą płaszczyzną symetrii wyznaczona jest przez osie „x” i „y” układu ortokartezjańskiego. Podobne właściwości posiada analizowana wcześniej kratownica quasi-powierzchniowa, oparta na elipsoidzie obrotowej  $\bar{\varepsilon}_1$ . Zatem kratownice  $K_{\bar{\varepsilon}_1}$  i  $K_{\bar{\varepsilon}_2}$  mają również budowę modułarną, podobnie jak kratownice quasi-sferyczne.

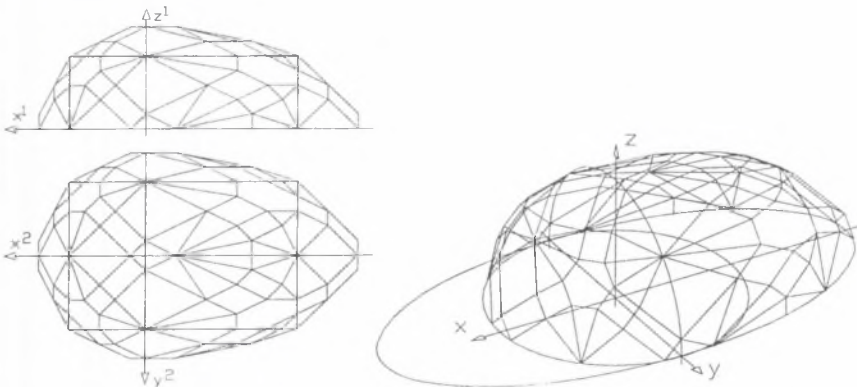
Znane są publikacje dotyczące geometrii kratownic powierzchniowych opartych na elipsoidzie obrotowej [3,4]. Ich ogólną cechą jest należenie węzłów kratownicy do powierzchni  $\bar{\varepsilon}$  oraz dążenie do minimum różnicy między najdłuższym i najkrótszym prętem kratownicy. Podobnie jak w przypadku kratownic powierzchniowych, opartych na sferze  $\bar{\pi}$ , również i kratownice powierzchniowe, oparte na elipsoidzie  $\bar{\varepsilon}$ , nie dają się łączyć bezpośrednio ze sobą w bliźniacze zespoły. Natomiast kratownice quasi-eliptyczne mają walory podobne do kratownic quasi-sferycznych.

### 3. ZŁOŻONE KRATOWNICE QUASI-POWIERZCHNIOWE JEDNOWARSTWOWE OPARTE NA WYCINKACH SFERY I ELIPSOIDY OBROTOWEJ

Zauważmy, że dla przyjętych wielkości promienia R sfery  $\bar{\pi}$ , współczynników dylatacji a, b, c elipsoid  $\bar{\varepsilon}_1$  i  $\bar{\varepsilon}_2$  oraz przyjmowanego konsekwentnie II kryterium aproksymacji prawdziwe są twierdzenia:

#### Twierdzenie I

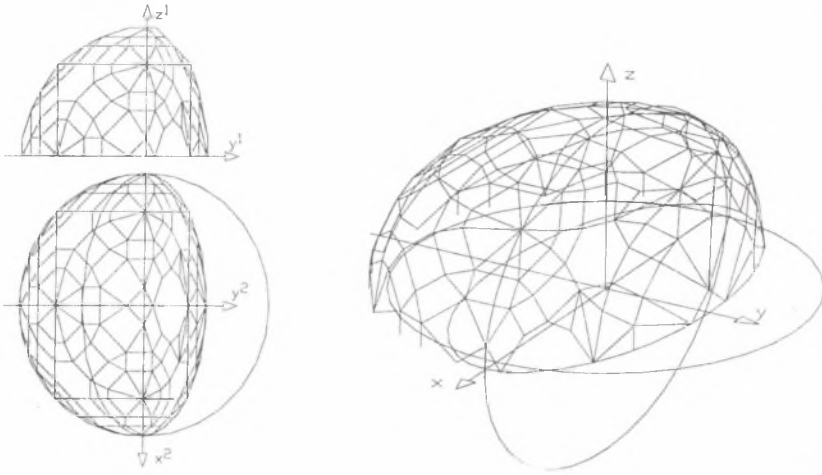
Węzły kratownic quasi-powierzchniowych, przybliżających sferę lub elipsoidę obrotową, są identycznie rozmieszczone w płaszczyznach okręgów równikowych o tych samych średnicach.



Rys.10. Przykład łączenia dwóch fragmentów kratownic: strona lewa – fragment modelu geometrycznego kratownicy  $K_{\bar{\pi}}^{\text{II}}$ ,  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ , strona prawa – fragment modelu geometrycznego kratownicy  $K_{\bar{\varepsilon}_1}^{\text{II}}$  ( $a=2R$ ,  $b=c=R$ ,  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ )

Fig.10. Example of geosim of a combination of two fragments of trusses: left – the fragment of truss  $K_{\bar{\pi}}^{\text{II}}$ ,  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ , right – the fragment of truss  $K_{\bar{\varepsilon}_1}^{\text{II}}$  ( $a=2R$ ,  $b=c=R$ ,  $R=5\sqrt{2}|\bar{V}_x|$ )





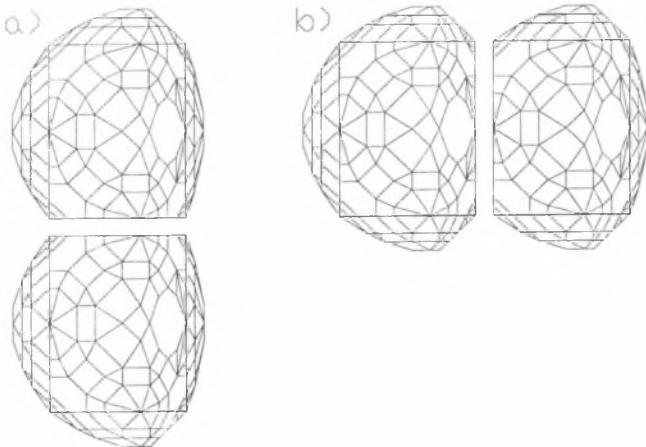
Rys.11. Przykład łączenia dwóch fragmentów kratownic: strona lewa - kratownica  $K_{\#}^{II}$ ,  $R=10\sqrt{2}|\vec{V}_x|$ , strona  
 prawa - kratownica  $K_{\#}^{II}$  ( $a=b=2R, c=R, R=5\sqrt{2}|\vec{V}_x|$ )

Fig.11. Example of a combination of two fragments of trusses: left - the fragment of truss  $K_{\#}^{II}$ ,  
 $R=10\sqrt{2}|\vec{V}_x|$ , right - the fragment of truss  $K_{\#}^{II}$  ( $a=b=2R, c=R, R=5\sqrt{2}|\vec{V}_x|$ )

**Twierdzenie 2**

Pręty kratownic quasi-powierzchniowych, przybliżających sferę lub elipsoidę obrotową, dzielone na połowy płaszczyznami okręgów równikowych, są zawsze do nich prostopadłe. Jeśli okręgi równikowe dwóch dowolnych powierzchni spośród  $\pi$ ,  $\bar{\epsilon}_1$  i  $\bar{\epsilon}_2$  są przystające, to przystają do siebie punkty podziału tych prętów.

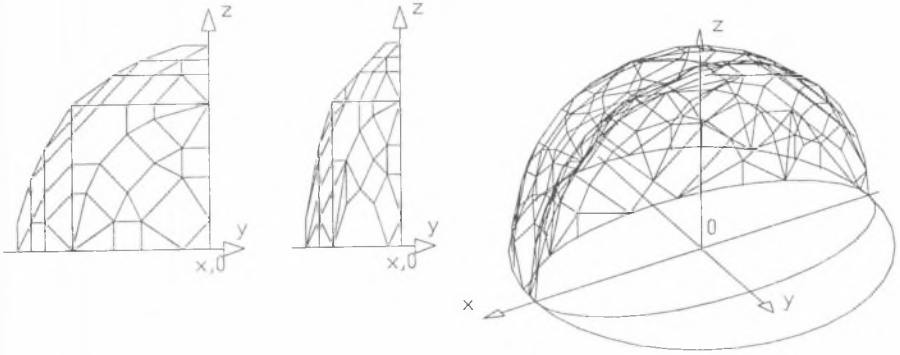
Wykorzystano powyższe twierdzenia w kształtowaniu przykładowych modeli geometrycznych złożonych kratownic quasi-powierzchniowych, aproksymujących kopuły zbudowane z połączeń „ćwiartek” odpowiednio dobranych sfer i elipsoid obrotowych, co pokazują rys.10 i rys.11.



Rys.12. Przykłady połączeń kratownic złożonych  
 Fig.12. Examples of sets of trusses built in the manner shown on preceding drawing

Możliwa jest dalsza rozbudowa zespołów kratownic quasi-powierzchniowych, aproksymujących wycinki powierzchni  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{\varepsilon}_1$  i  $\hat{\varepsilon}_2$  i tworzenie konstrukcji wielonawowych i wielorzędowych, czego przykładem są przedstawione na rys.12 modele geometryczne kratownic złożonych z fragmentów kratownic quasi-powierzchniowych, pokazanych na poprzednim rysunku.

Inną możliwość wykorzystania odpowiednich części omówionych wcześniej kratownic quasi-powierzchniowych w ich złożeniach pokazano na rys.13.



Rys.13. Przykład odmiennego łączenia fragmentów kratownic  
Fig.13. Selected example for linking of fragments of the trusses

## LITERATURA

1. Bieniek Z., Koncepcja jednowarstwowych kratownic quasi-powierzchniowych generowanych na sferze, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Nr 176, 1999
2. Trajdos T. Matematyka. WNT, Warszawa 1971
3. Huybers P., Polyhedra for building structures; why and how?, International conference on lightweight structures in civil engineering, Warsaw, 25 - 29 september 1995
4. Niemierko A., „Rzecz o kratownicach”, WKiŁ, Warszawa 1987

Recenzent: Dr inż. Jarosław Mirski  
Politechnika Świętokrzyska

## Abstract

All truss joints of classic surface trusses usually belong to surfaces approximated by those trusses. However, the so-called quasi-surface trusses, omitting this requirement, can be made as well. The article describes the rules applied for surface approximation, the method of designing and linking of geometrically similar models (geosims) of one-layer and quasi-surface trusses generated on a sphere or on rotational ellipsoid. In particular, the article presents the examples for linking of geosims of those trusses. Determination and visualisation of structures of the trusses are realised with the help of application of AutoCAD.