ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA z.3 Nr kol. 1453

Jarosław Z. MIRSKI
Katedra Architektury i Ochrony Budowli Zabytkowych
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

SIATKI DWUWARSTWOWE OPRACOWANE NA PODSTAWIE TETRAEDRU

Streszczenie. W pracy przedstawiono trzy sposoby podziału trójkąta sferycznego, które pozwalają z 4-ścianu foremnego otrzymać wielościany pochodne o większej liczbie ścian. Liczby ścian generowanych wielościanów ujęto w tabele systematyzujące. Pokazano sposoby tworzenia wielościanów prototypowych dla konstrukcji dwuwarstwowych w zależności od rodzaju przekształcenia i sposobu ustawienia względem osi środkowej.

GENERATION TWOLAYER NETWORKS OF A TETRAEDR

Summary. In this work are presented 3 kinds of division of a spherical triangle that enable to get from the regular 4-polyhedron derivated polyhedrons with bigger amount of walls. They were presented ways of generating for prototype polyhedrons for twolayer constructions depending from the kind of transformation and the way of setting in relation to the centre axis.

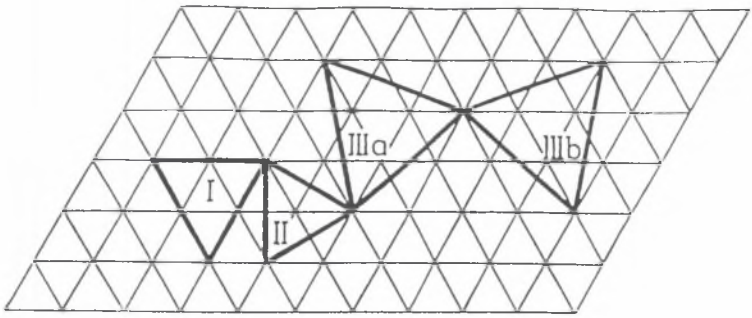
1. WPROWADZENIE

Praca dotyczy siatek dwuwarstwowych, które mogą stanowić zasadę geometryczną konstrukcji przekryć: kratownic, tarczownic itp. Trójkąty równoboczne stanowiące ściany czworościanu foremnego, są dzielone na mniejsze trójkąty jednym z trzech podanych sposobów. Przyjęto do rozważań podział trójkątów płaskich zamiast sferycznych, jak to zaproponował T. Tarnai w pracy [1]. Numeryczne obliczenie punktów podziału każdej krawędzi wymaga na wejściu współrzędnych sferycznych jej początku i końca. Podział kątów widzenia każdej krawędzi ze środka sfery pozwala obliczyć długości krawędzi trójkątów mniejszych. W otrzymanej siatce sferycznej łuki okręgów zastępowane są cięciwami, co daje pewien wielościan wpisany w sferę. Wielościan ten poddawany jest dalszym przekształceniom, co w konsekwencji prowadzi do skonstruowania siatki dwuwarstwowej. Liczby ścian generowanych wielościanów ujęto w tabele systematyzujące.

2. ZASADY PRZEKSZTAŁCANIA WIELOŚCIANÓW

Wprowadzając uproszczenie polegające na rozpatrzeniu zagadnienia interpolacji trójkąta płaskiego, odpowiadającego krzywoliniowej siatce wielościanu, z elementów trójkąta równobocznego siatki wyjściowej można zbudować, metodą podziałów, kolejne trójkąty mniejsze.

Siatka trójkątów małych powinna przy tym spełniać warunki [2], [3]: 1) elementem siatki jest mały trójkąt równoboczny o stałej powierzchni, 2) podział trójkąta wyjściowego na małe oczka musi być liczbą całkowitą, 3) siatki wykreślone na ścianach 4-ścianu powinny być spójne, tzn. linie siatek powinny schodzić się na krawędziach 4-ścianu, a oczka położone na obu ścianach o wspólnej krawędzi powinny stanowić trójkąt równoboczny.



Rys. 1. Trzy schematy podziału trójkąta równobocznego
Fig.1. Three schemes of equilateral triangle division

Trzy sposoby podziału trójkąta przedstawiono schematycznie na rys. 1 na płaskiej siatce trójkątów równobocznych, powstałej z równo oddalonych od siebie trzech grup prostych równoległych, przecinających się pod kątem 60°.

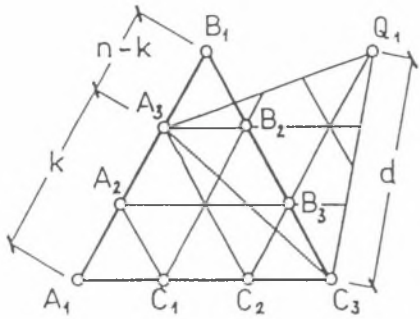
Wielościany, których budowa wynika z I rodzaju przekształcenia, mają schematy podziału trójkąta zbudowane z trzech rodzin prostych równoległych do boków tego trójkąta.

W II przekształceniu schematy podziałów trójkątów są siatkami zbudowanymi z trzech rodzin prostych równoległych do trzech wysokości tych trójkątów. Przy zetknięciu trójkątów bokami oczka siatki uzupełniają się w przypadku tej środkowej symetrii.

Trzeci rodzaj podziału obejmuje przekształcenia wielościanów prawych i lewych, zwanych wielościanami dwukrotnymi [1]. Wielościany te powstają przez podział równobocznych trójkątów wyjściowych trzema rodzajami prostych równoległych do odpowiednich prostych, łączących określony punkt podziału boku trójkąta z przeciwległym wierzchołkiem tego trójkąta.

J. Fuliński podał i udowodnił w pracy [2] następujące twierdzenie: jeżeli bok trójkąta równobocznego o wielkości n na rys. 2 podzielimy w stosunku k : (n - k) i punkt A_3 dzielący bok połączymy z przeciwległym wierzchołkiem, otrzymamy odcinek d, którego kwadrat równy jest kwadratowi boku trójkąta n^2 pomniejszonego o iloczyn odcinków k(n - k):

$$d^2 = n^2 - k(n - k) = n^2 + k^2 - n \cdot k$$



Rys. 2. Rysunek do twierdzenia w tekście
Fig.2. Figure to theorem in the text

Wzór wyraża zatem liczbę oczek (w trójkącie przekształconym) o bokach o długości wynikłej z podziału na równe części. W trzecim sposobie podziału „liczbę oczek" otrzymujemy dodając „ułamki" trójkątów równobocznych. Podział na ścianie czworościanu może składać się z różnych trójkątów i czworokątów, zaś ich suma zawsze daje całkowitą liczbę trójkątów równobocznych.

Wzór na liczbę ścian w czworościanie otrzymujemy więc po przemnożeniu liczby oczek w trójkącie przez cztery. Podstawiając wówczas we wzorze kolejne liczby naturalne za n i k, otrzymamy tabelę 1, odzwierciedlającą wielościany powstałe w trzech rodzajach przekształceń.

Na podstawie analizy tabeli 1 dochodzimy do wniosku, że istnieją tylko dwa przekształcenia wielościanów o ścianach z trójkątów równobocznych. Pierwsze przekształcenie wyraża się wzorem:

$$N = 4 \cdot n^2$$

(gdzie: n jest kolejną liczbą naturalną) i przedstawia układ wielościanów jednokrotnych: 4-, 16-, 36-ścian, ... itd., dzieląc tabelę na dwie trójkątne, symetryczne części.

Drugie przekształcenie, wyrażone wzorem: $N = 4 \cdot 3 \cdot n^2$, zawiera wielościany także jednokrotne (oznaczone kropką): 12-, 48-, 108-ścian, ... itd., leżące na dwusiecznej tej trójkątnej tabeli, którą dzieli symetrycznie.

Powyżej i poniżej tej dwusiecznej są dwie rodziny wielościanów dwukrotnych. Wielościany dwukrotne, czyli wielościany prawe i lewe, mają tę samą siatkę ze względu na lustrzane odbicie siatek w rozwinięciu, przy czym przez nazwę siatki rozumie się rozwinięcie ścian wielościanu na płaszczyznę.

W tabeli można także wyodrębnić wielościany - nazwijmy je umownie wielościanami „translacyjnymi" - pochodzące z podwojenia liczb n i k w podanym wzorze. Przykładem dwukrotnych wielościanów „translacyjnych" są wielościany:

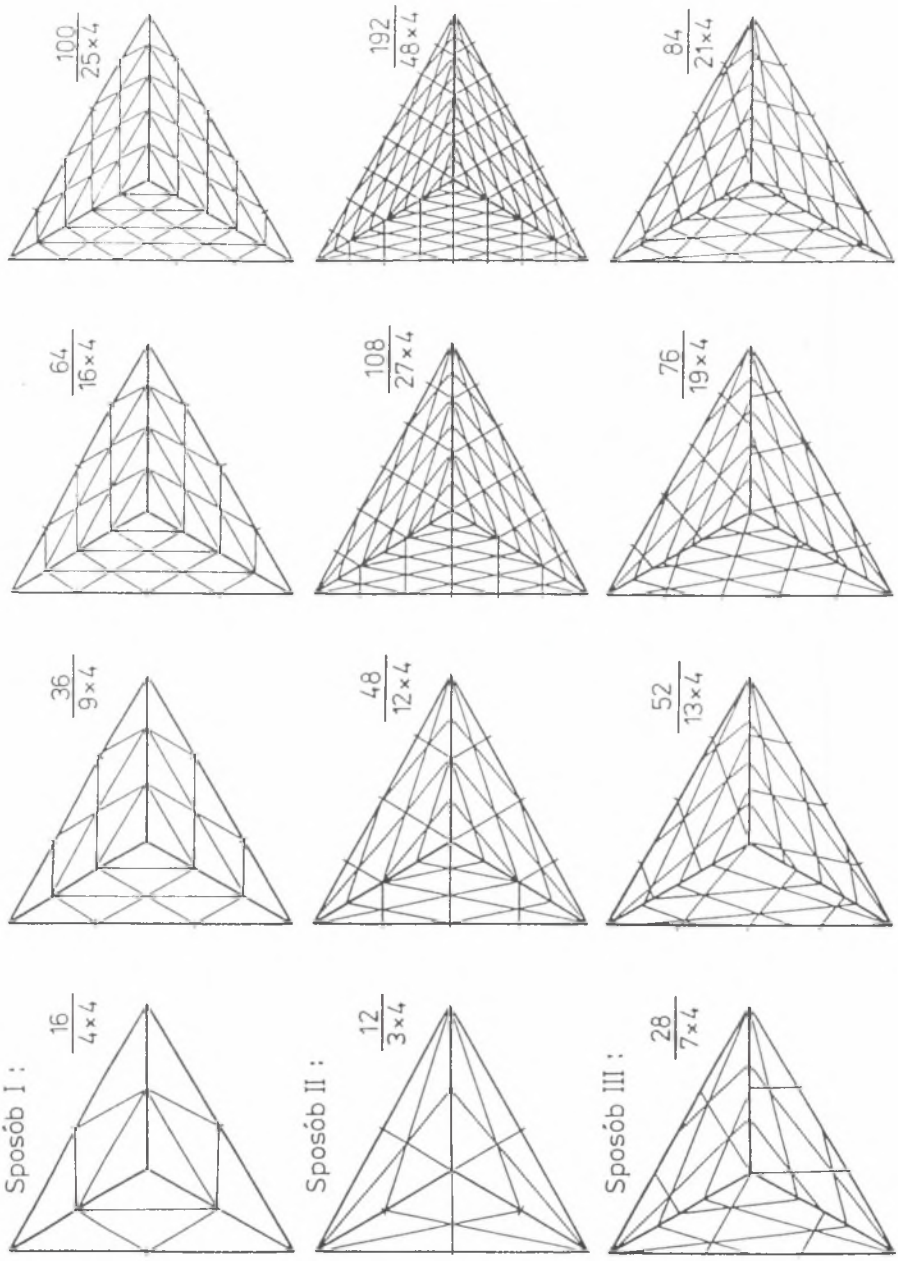
28-ścian (n = 2, k = 3) i 112-ścian (n = 4, k = 6),
52-ścian (n = 3, k = 4) i 208-ścian (n = 6, k = 8)

Na rysunku 3 pokazano, dla przykładu, po cztery kolejne rozwiązania podziałów trójkąta sferycznego na trzech współwierzchołkowych ścianach czworościanu foremnego dla wymienionych trzech grup przekształceń.

Tabela 1

Trójkątna tabela wielościanów tworzonych z 4-ścianu foremnego w trzech przekształceniach

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4	12•	28	52	84	124	172	228	292	364	444	532	628	732	844	964
2	12	16	28	48•	76	112	156	208	268	336	412	496	588	688	796	912
3	28	28	36	52	76	108•	148	196	252	316	388	468	556	652	756	868
4	52	48	52	64	84	112	148	192•	244	304	372	448	532	624	724	832
5	84	76	76	84	100	124	156	196	244	300•	364	436	516	604	700	804
6	124	112		112	124	144	172	208	252	304	364	432•	508	592	684	784
7	172				156	172	196	228	268	316	372	436	508	588•	676	772
8							228	256	292	336	388	448	516	592	676	768•
9									324	364	412	468	532	604	684	772
10										400	444	496	556	624	700	784
11											484	532	588	652	724	804
12												576	628	688	756	832
13													676	732	796	868
14														784	844	912
15															900	964
16																1024



Rys. 3. Przykłady kolejnych rozwiązań trzech sposobów podziału trójkąta sferycznego na trzech przywierzchołkowych ścianach 4-ścianu foremnego. Oznaczenia liczb: w liczniku podano wielościan, w mianowniku - ilość trójkątów małych wynikłych z podziału i przemnożonych przez cztery ściany 4-ścianu

Fig.3. Examples of following solutons for three kinds of divisions of a spherical trangle on three walls at the vertices of the regular tetrahedron. Number signs: the polyhedron as a numerator; as a denominator the number of small triangles coming from the division multiplicated by the 4 walls of the tetrahedron

Tabela 2

Układ wielościanów generowanych z 4-ścianu foremnego wg kolejności liczby ścian

WIELOŚCIAN WYJŚCIOWY INITIAL POLYHEDRON	RODZAJE PRZEKSZTAŁCEŃ / KINDS OF TRANSFORMATIONS												
	I RODZAJ / I KIND			II RODZAJ / II KIND				III RODZAJ / III KIND					
	WIELOŚCIAN PRZEKSZTAŁCONY CONVERTED POLYHEDRON	SIATKA MACIERZYSTA WIELOŚCIANU PRZEKSZTAŁCONEGO BASIC NETWORK OF THE CONVERTED POLYHEDRON		WIELOŚCIAN PRZEKSZTAŁCONY CONVERTED POLYHEDRON	SIATKA MACIERZYSTA WIELOŚCIANU PRZEKSZTAŁCONEGO BASIC NETWORK OF THE CONVERTED POLYHEDRON			WIELOŚCIAN PRZEKSZTAŁCONY CONVERTED POLYHEDRON	SIATKA MACIERZYSTA WIELOŚCIANU WYJŚCIOWEGO BASIC NETWORK OF THE INITIAL POLYHEDRON		SIATKA MACIERZYSTA WIELOŚCIANU PRZEKSZTAŁCONEGO BASIC NETWORK OF THE CONVERTED POLYHEDRON		
			$\frac{3N-4\cdot 3}{6}$			N	$\frac{N}{2}-2$			$\frac{N}{6}-2$		$\frac{N}{3}$	$\frac{N}{6}-2$
N	$3\cdot N$	ilość quanitity △	ilość quanitity ⬡	$4\cdot N$	ilość quanitity △	ilość quanitity △	ilość quanitity ⬡	$\frac{4\cdot N}{3}$	ilość quanitity △	ilość quanitity ⬡	ilość quanitity △	ilość quanitity △	ilość quanitity ⬡
4	12	4	0	16	4	4	0	–	–	–	–	–	–
12	36	4	4	48	4	12	4	16	4	0	4	4	0
16	48	4	6	64	4	16	6	–	–	–	–	–	–
28	84	4	12	112	4	28	12	–	–	–	–	–	–
36	108	4	16	144	4	36	16	48	4	4	4	12	4
48	144	4	22	192	4	48	22	64	4	6	4	16	6
52	156	4	24	208	4	52	24	–	–	–	–	–	–
64	192	4	30	256	4	64	30	–	–	–	–	–	–
76	228	4	36	304	4	76	36	–	–	–	–	–	–
84	252	4	40	336	4	84	40	112	4	12	4	28	12
100	300	4	48	400	4	100	48	–	–	–	–	–	–
108	324	4	52	432	4	108	52	144	4	16	4	36	16
112	336	4	54	448	4	112	54	–	–	–	–	–	–
124	372	4	60	496	4	124	60	–	–	–	–	–	–

3. TWORZENIE SIATEK DWUWARSTWOWYCH

Z każdego wielościanu tabeli 1 można otrzymać przez transformację nowy wielościan. Dla wielościanu o N ścianach można ująć liczbowo przekształcenie w następujący sposób: I rodzaj przekształcenia da wielościan o 3 · N ścianach, w II rodzaju przekształcenia 4 · N ścianach i w III rodzaju przekształcenia otrzymujemy $\frac{4}{3} \cdot N$ ścian.

Ze zbioru tabeli 1 utworzono tabelę 2 szeregując w pierwszej kolumnie wielościany wg kolejności liczby ścian. W tabeli tej podano wielościany wg wymienionych trzech rodzajów przekształceń.

Chcąc teraz utworzyć siatkę dwuwarstwową poprzez odpowiednie połączenie dwóch wielościanów zgodnie z prototypowymi przekształceniami, należy siatkę wielościanu wyjściowego W połączyć zgodnie ze wzorami: PI = 3 · W, PII = 4 · W, PIII = $\frac{4}{3} \cdot W$.

Przykłady konstrukcji dwuwarstwowych:

$$\frac{W}{PI} = \frac{4}{12}, \quad \frac{W}{PI} = \frac{12}{36}, \quad \frac{W}{PI} = \frac{16}{48}, \ldots, \quad \frac{W}{PI} = \frac{388}{1164}, \ \ldots \text{ itd.},$$

$$\frac{W}{PII} = \frac{4}{16}, \quad \frac{W}{PII} = \frac{12}{48}, \quad \frac{W}{PII} = \frac{16}{64}, \ldots, \quad \frac{W}{PII} = *, \ \ldots \text{ itd.},$$

$$\frac{W}{PIII} = *, \quad \frac{W}{PIII} = \frac{12}{16}, \quad \frac{W}{PIII} = *, \ldots, \quad \frac{W}{PIII} = *, \ \ldots \text{ itd.},$$

przy czym * oznacza, że przekształcenie nie istnieje.

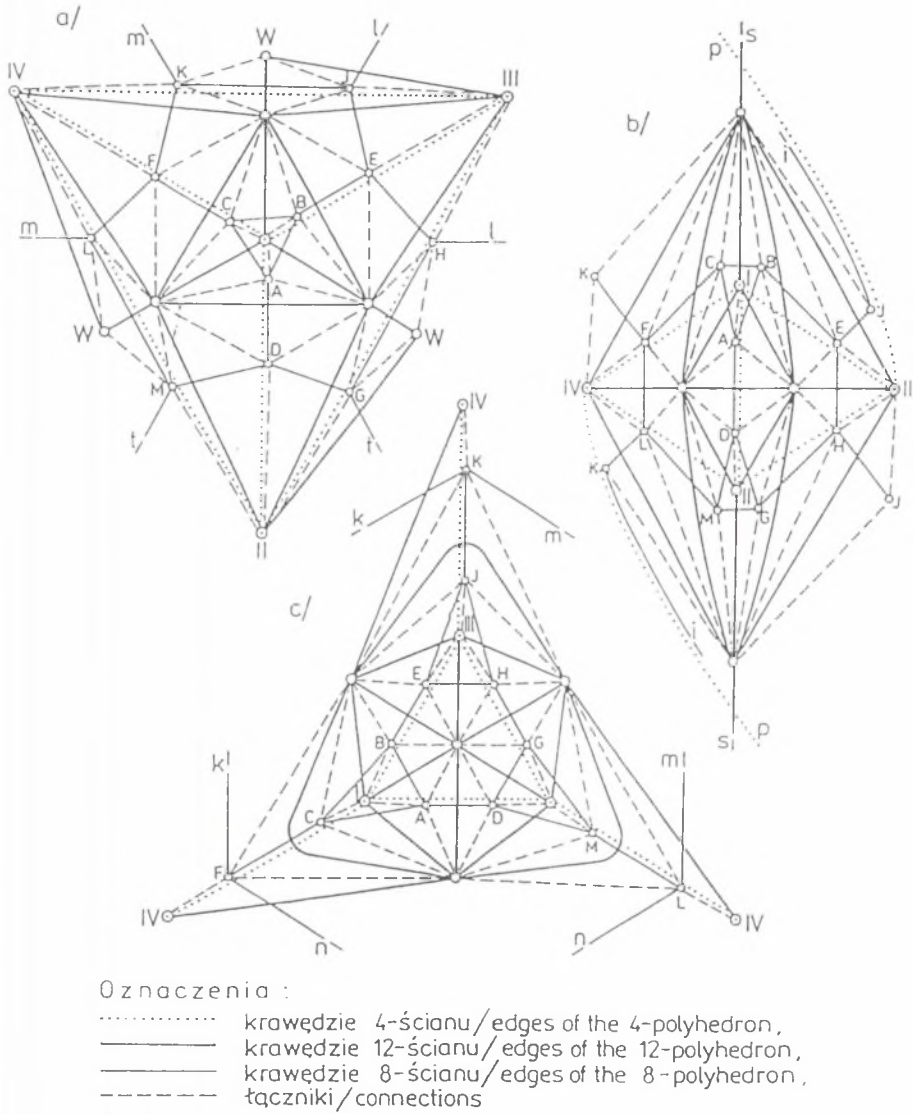
Istotą tabeli 2 jest pokazanie wszystkich możliwych przekształceń wielościanów, czyli takich połączeń wielościanów, z których otrzymuje się konstrukcje dwuwarstwowe. Poza podanymi w tabeli, innych przekształceń z 4 - ścianu foremnego nie ma. W tabeli podano wszystkie możliwe kombinacje.

4. KONSTRUKCJE PROTOTYPOWE

Prototypami konstrukcji generowanych z czworościanu foremnego są trzy przekształcenia:

- przekształcenie 12-ścianu trójkątowego w 36-ścian trójkątowy, rys.4,
- przekształcenie 12-ścianu trójkątowego w 48-ścian trójkątowy, rys.5,
- przekształcenie 36-ścianu trójkątowego w 48-ścian trójkątowy, rys.6.

Schematy na rysunku 4, 5 i 6 wykonano przy uwzględnieniu trzech możliwych ustawień każdego wielościanu względem osi środkowej tak, aby odpowiednie grupy wierzchołków były na wspólnym poziomie.



Rys.4. Schemat ideowy prototypowego przekształcenia I rodzaju 12-ścianu w 8-ścian półforemny, tj. siatkę macierzystą 36-ścianu trójkątowego w trzech ustawieniach względem osi środkowej

Fig.4. Schematic diagram of the prototype first kind transformation of the 12-polyhedron into a halfregular 8-polyhedron, namely basic network of a triangle 36-polyhedron in 3 settings in relation to the symmetry axis

a) Pierwszy rodzaj przekształcenia prototypowego

Przekształcając 4-ścian foremny w I rodzaju, otrzymuje się w efekcie przekształcenia ten sam wielościan. Z tego powodu przy rozważaniu siatek dwuwarstwowych tworzonych z 4-ścianu foremnego zachodzi konieczność posłużenia się wielościanem o większej liczbie ścian. Dlatego jako prototyp I rodzaju wzięto przekształcenie 12-ścianu w 36-ścian, wg tab. 2. Dwunastościan powstaje wg II sposobu przekształcenia 4-ścianu foremnego jak na rys. 3 przez podział wysokościami czterech trójkątów płaskich i wyeliminowanie siatki sferycznej tego 4-ścianu. Otrzymuje się w ten sposób 12 trójkątów równoramiennych jak na rys. 4.

Ten 12-ścian ma 8 wierzchołków i 18 krawędzi. Teraz na każdej ścianie 12-ścianu trójkątowego ustawia się takie ostrosłupy, których wierzchołki leżą na wspólnej sferze tak, aby tworzyły one po odpowiednim połączeniu cztery sześciokąty foremne i cztery trójkąty równoboczne. Otrzymuje się w ten sposób 8-ścian półforemny o 12 wierzchołkach i 18 krawędziach. Ten 8-ścian półforemny jest siatką macierzystą 36-ścianu trójkątowego. Aby otrzymać pełną formę 36-ścienną, tzn. wielościan trójkątowy, należy 4 trójkąty równoboczne zamienić na 12 trójkątów równoramiennych, a 4 sześciokąty zamienić na 24 trójkąty równoramienne. Przy tej zamianie wszystkie dodatkowe wierzchołki winny leżeć na wspólnej, współśrodkowej sferze z wierzchołkami 8-ścianu półforemnego. 36-ścian trójkątowy ma 20 wierzchołków i 54 krawędzie.

Krawędzie ostrosłupów postawionych na ścianach 12-ścianu stanowią pręty łączące dwie warstwy, tj. warstwę 8-ścianu półforemnego i 12-ścianu trójkątowego. Na rys. 4 linie przerywane oznaczają zarówno pręty łączące dwie warstwy, jak i uzupełniające krawędzie, zamieniające 8-ścian w 36-ścian trójkątowy.

W ustawieniu na rys. 4a jedna ze ścian 4-ścianu foremnego jest ustawiona w najniższym położeniu poziomym, a jeden z wierzchołków 4-ścianu jest najwyżej położony; gdy jest na odwrót, wówczas ustawienie jest jak na rys. 4c, tzn. pozioma ściana jest w położeniu najwyższym, a jeden z wierzchołków jest w położeniu najniższym. W ustawieniu jak na rys. 4b dwie krawędzie 4-ścianu są na przeciwległych poziomach i są do siebie prostopadłe.

b) Drugi rodzaj przekształcenia prototypowego

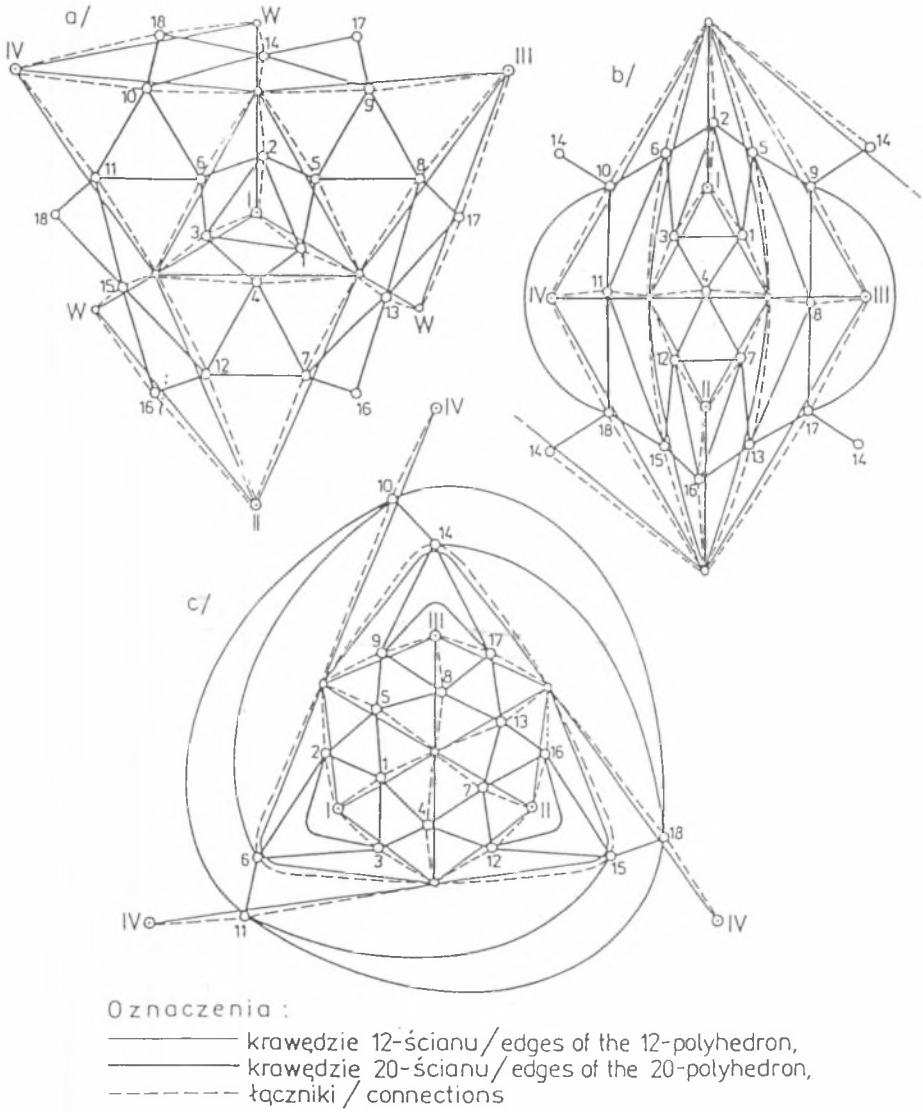
Drugi rodzaj przekształcenia 4-ścianu foremnego w 16-ścian z tab.2 również nie daje czytelnego obrazu konstrukcji dwuwarstwowej. Dlatego zamiast z 4-ścianu foremnego lepiej wyjść z 12-ścianu trójkątowego, który powstaje tak, jak to podano w I rodzaju przekształcenia. Przez środki krawędzi tego 12-ścianu prowadzimy promienie wilościanu i na nich w równych odległościach (od środka wielościanu) obiera się wierzchołki, które po połączeniu jak na rys. 5 utworzą 20-ścian nieforemny. Ten 20-ścian ma 4 sześciokąty powstające w miejsce ścian 4-ścianu, 4 trójkąty równoboczne powstające w miejsce czterech wierzchołków 4-ścianu i 12 trójkątów równoramiennych, powstające w miejsce krawędzi 4-ścianu, jak na rys.5.

Utworzony 20-ścian nieforemny jest siatką macierzystą 48-ścianu. Zamieniając tę siatkę macierzystą na 48-ścian trójkątowy, otrzymujemy w miejsce sześcioboków 24 trójkąty, a w miejsce trójkątów równobocznych powstaje 12 trójkątów równoramiennych.

Zgodnie ze wzorem, że wielościan przekształcony musi mieć 4 razy tyle ścian trójkątnych co wielościan wyjściowy, 12-ścian trójkątowy daje 48-ścian trójkątowy z tabeli 1 i 2.

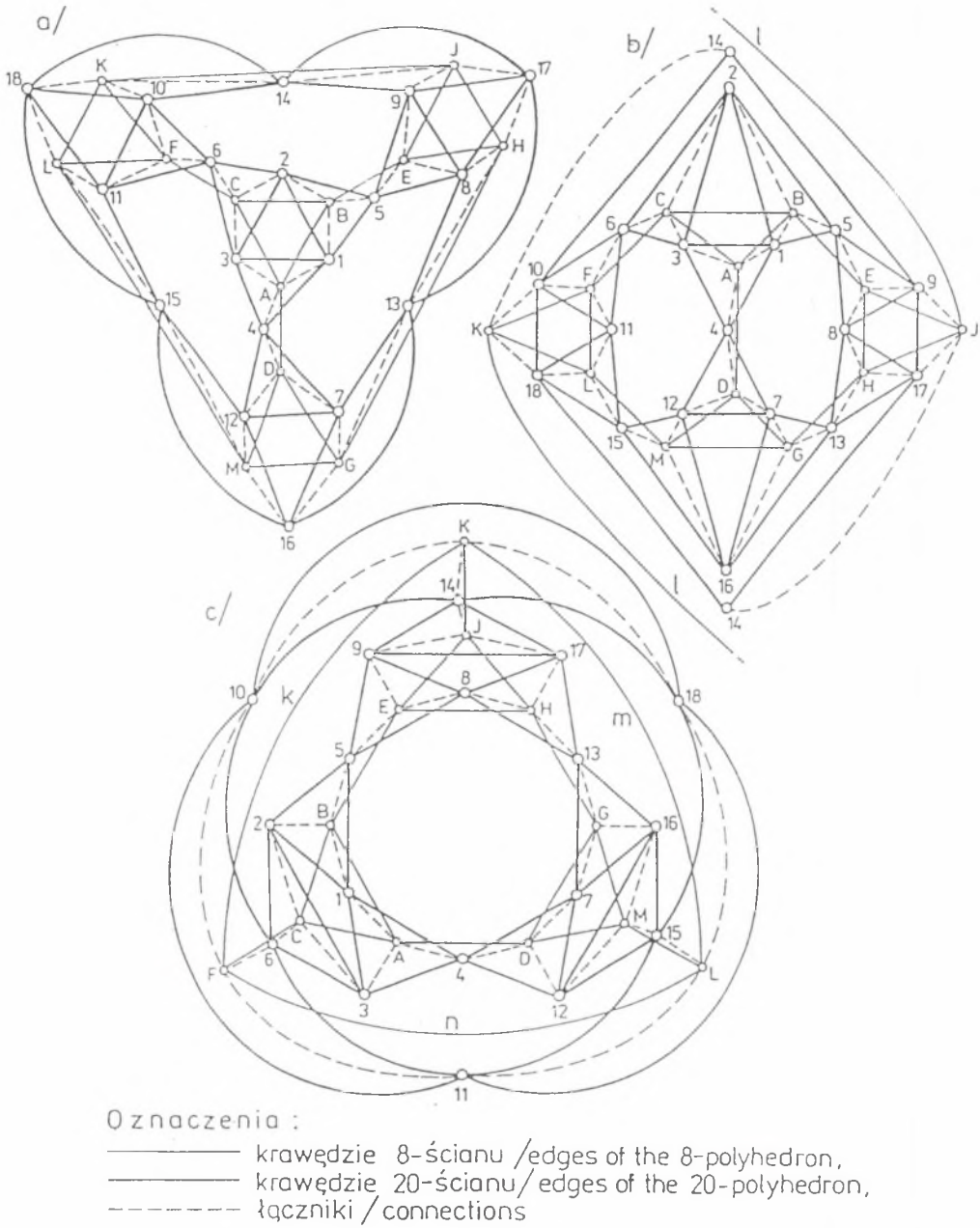
Łącząc odpowiednio wierzchołki siatki 12-ściennej z siatką macierzystą 48-ścianu, otrzymujemy konstrukcję dwuwarstwową.

Na rys. 5 linie przerywane są jednocześnie krawędziami uzupełniającymi, zamieniającymi 20-ścian nieforemny w 48-ścian trójkątowy.



Rys.5. Schemat ideowy prototypowego przekształcenia II rodzaju 12-ścianu w 20-ścian nieforemny, tj. siatkę macierzystą 48-ścianu trójkątowego, w trzech ustawieniach względem osi środkowej

Fig.5. Schematic diagram of the prototype second kind transformation of a 12-polyhedron into an irregular 20-polyhedron namely basic network of a triangle 48-polyhedron in 3 settings in relation to the symmetry axis



Rys. 6. Schemat ideowy prototypowego przekształcenia III rodzaju 8-ścianu półforemnego, tj. siatki macierzystej 36-ścianu trójkątowego w 20-ścian nieforemny, tj. tj. siatkę macierzystą 48-ścianu trójkątowego, w trzech ustawieniach względem osi środkowej

Fig.6. Schematic diagram of the prototype sthird kind transformation of a halfregular 8-polyhedron nemely basic network of the triangle 36-polyhedron into 20-polyhedron namely basic network of a triangle 48-polyhedron, in 3 settings in relations the symmetry axis

c) Trzeci rodzaj przekształcenia prototypowego

W trzecim rodzaju przekształcenia jako prototyp przyjęto przekształcenie 36-ścianu trójkątowego w 48-ścian trójkątowy zgodnie z tabelą 2.

Siatką macierzystą 36-ścianu trójkątowego jest 8-ścian półforemny, który powstaje tak jak to opisano w I rodzaju przekształcenia na rys. 4. Wielościan ten ma 8 wierzchołków i 18 krawędzi. Pełną formę 36-ścienną otrzymujemy tak jak to opisano w I rodzaju przekształcenia.

Ze środka 8-ścianu półforemnego rzucamy środki jego krawędzi, jak na rys. 6, na współśrodkową sferę (z tym 8-ścianem), otrzymując wszystkie 18 wierzchołków i 36 krawędzi, powstałego w ten sposób 20-ścianu nieforemnego, będącego siatką macierzystą 48-ścianu trójkątowego. Ten 20-ścian składa się z 4 trójkątów równobocznych, 12 trójkątów równoramiennych i 4 sześciokątów równobocznych. Aby otrzymać pełną formę 48-ścienną, tzn. wielościan trójkątowy, należy 4 trójkąty równoboczne zamienić na 12 trójkątów równoramiennych, a 4 sześcioboki zamienić na 24 trójkąty. Przy tej zamianie wszystkie dodatkowe wierzchołki winny leżeć na wspólnej, współśrodkowej sferze z wierzchołkami wyżej podanego 20-ścianu.

Każdemu trójkątowi 8-ścianu półforemnego odpowiada trójkąt równoboczny siatki macierzystej 48-ścianu. Każdemu wierzchołkowi 8-ścianu półforemnego odpowiada 12 trójkątów równoramiennych siatki macierzystej 48-ścianu.

LITERATURA

1. Tarnai T.: Optimization of Spherical Networks for Geodesic Domes. Proceedings of the Thirol International Conference of Space Structures, held at the University of Surrey, Guildford, UK, 11-14 September 1984
2. Fuliński J.: Geometryczne elementy projektowania kratownic powierzchniowych. Zeszyty Naukowe AR. Nr 64. Wrocław. Melioracja XI. 1966
3. Fuliński J.: Geometria kratownic powierzchniowych. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. Nr 178. 1973
4. Mirski J.: Program obliczeń parametrów geometrycznych konstrukcji prętowych opartych na sferach. Zeszyty Naukowe AR. Wrocław. Geodezja V. 1990

Recenzent: Dr hab. inż. Janusz Rębelak

Abstract

The work presents two-layer networks which truss joints o layr on two spheres of free radiusses. Elements of each network correspond with shouders and apexes of polyhedrons. The example is the retrader and polyhedrones derivative with a bigger wall's number. There was accepted to considerations the division of flar triangles instead of spherical triangles –

proposed by T. Tarnai in his work [1]. Equilateral triangles which are walls of tetrahedron are divided into smaller triangles, into one of three presented exaples with assumption conditions shew in the work [2], [3]. Number of generated polyhedrons are enclosed with a systematic list. And the next there was presented kinds of creation prototype polyhedrons for two-layer constructions depending from the kind transformation and the way of setting in relation to the centre axis. There also presented original schemes of this networks.