

TOMASZ SULIMA-SAMUJŁO
Wydział Matematyki Stosowanej
Pracownia Geometrii Wykreślnej
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

PORÓWNANIE ZAPISÓW GEOMETRYCZNYCH W PRZYJĘTYCH ODWZOROWANIACH DWUOBRAZOWYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono dwie metody wchodzące w skład odwzorowań dwuobrazowych: okręgowo-środkową (OS), przekształcającą prostą w prostą i okrąg oraz dwuśrodkową (DS), w której rzutami prostej są dwie proste. W obu odwzorowaniach przyjęto rzutnię π oraz dwa środki rzutowania S_1 i S_2 względnie T_1 i T_2 . Punkty te leżą na prostych prostopadłych do π , a rzutnia jest ich płaszczyzną symetrii.

W odwzorowaniu OS punkt rzutowany jest okręgowo poprzez okrąg leżący w płaszczyźnie tego punktu i środków S_1 i S_2 , przechodzący przez środek S_1 i o średnicy, której końcami są rzutowany punkt i jego rzut okręgowy. Punkt rzutowany jest również ze środka S_2 . Rzuty okręgowy i środkowy leżą na prostej przechodzącej przez punkt S' .

W odwzorowaniu DS punkt rzutowany jest ze środków T_1 i T_2 . Rzuty środkowe leżą na prostej przechodzącej przez punkt T' .

Rozpatrzono w obu rzutach zapisy różnych możliwych położenia punktu, odwzorowanie prostej ogólnej i szczególnej oraz wzajemne położenia dwu prostych: przecinanie się w punkcie właściwym i niewłaściwym, nieprzecinanie się oraz prostopadłość.

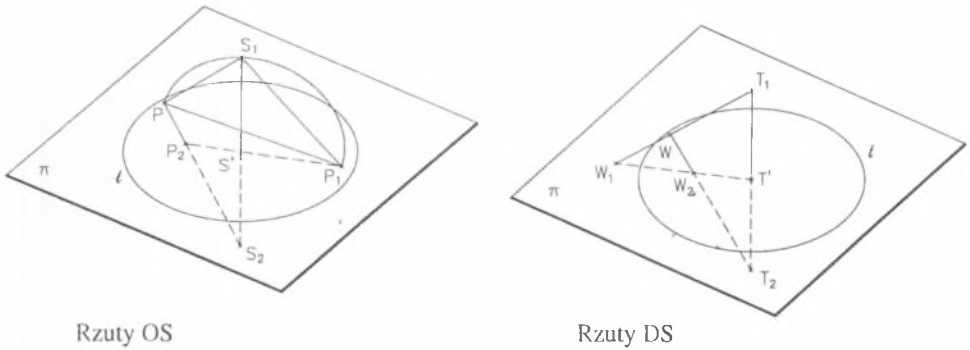
COLLATION OF GEOMETRICAL RECORDINGS IN ASSUMED DOUBLE- IMAGE PROJECTIONS

Summary. The following projections have been discussed: 1) circular – central (OS) transforming straight line and a circle and 2) double – central in which two lines are the images of straight line. There have also been demonstrated recordings of different positions of point, projections of straight line in general and particular and mutual positions of two lines: intersection at accessible point and at point at infinity, non intersection and perpendicularity.

1. WPROWADZENIE

Autor zajmuje się analizą różnych odwzorowań dwuobrazowych [1], [2]. Niniejsze opracowanie jest kontynuacją tych prac i przedstawia analizę dwóch metod wchodzących w skład tych odwzorowań: 1) rzutów okręgowo - środkowych (odwzorowujących prostą poprzez okrąg i prostą) i 2) rzutów dwuśrodkowych (odwzorowaniem prostej są dwie proste). Kolejno omówiono główne założenia opisywanych metod, zapis punktu i prostej z uwzględnieniem szczególnych położenia oraz wzajemne położenia dwóch prostych (proste przecinające się w punkcie właściwym lub niewłaściwym, skośne i prostopadłe).

2. METODY RZUTÓW OKRĘGOWO - ŚRODKOWYCH (OS) I RZUTÓW DWUŚRODKOWYCH (DS) ORAZ ODWZOROWANIE PUNKTU (RYS. 1).



Rys.1. Zasada odwzorowań OS i DS
Fig.1. Principles of mapping OS and DS

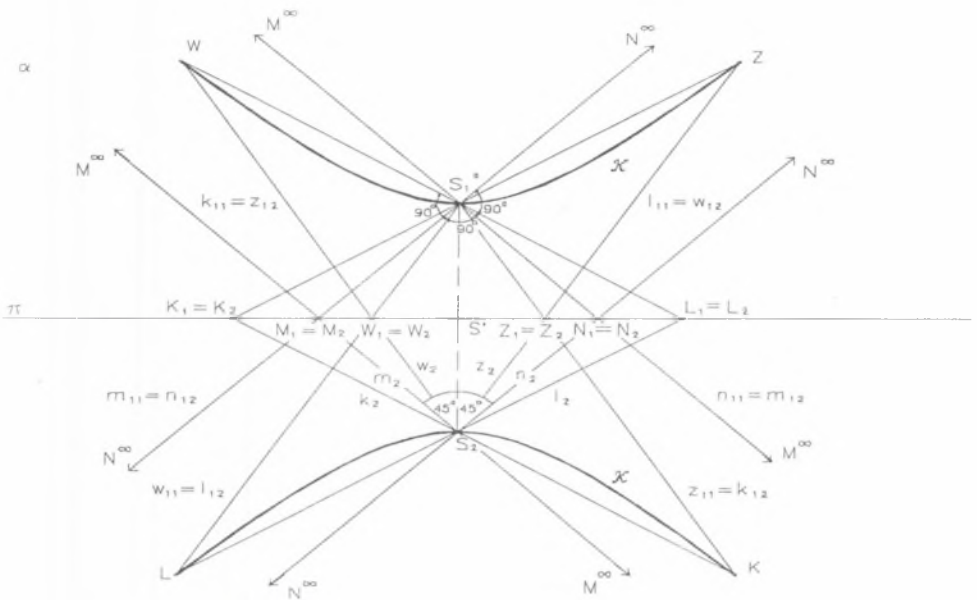
Dla każdego z dwu omawianych odwzorowań przyjmujemy dowolnie płaszczyznę π jako rzutnię oraz po dwa stałe punkty usytuowane na prostych prostopadłych do π i tak, by rzutnia była dla nich płaszczyzną symetrii. Są to dla odwzorowania OS punkty S_1 i S_2 , a dla DS - T_1 i T_2 . Punkty przecięcia π przez proste, na których te punkty leżą, to odpowiednio S' oraz T' . Są one środkami okręgów oddalenia τ o promieniach $S'S_1(S_2)$ oraz $T'T_1(T_2)$ i leżących na rzutni. W rzutach OS dowolny punkt P odwzorowuje się na π poprzez dwa swoje obrazy: P_1 i P_2 . Punkt P_1 jest punktem przecięcia rzutni przez prostą leżącą w płaszczyźnie określonej przez punkty P , S_1 i S_2 , poprowadzonej przez punkt S_1 i prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty PS_1 . Odcinek PP_1 jest średnicą okręgu przechodzącego przez S_1 . Punkt P_2 jest rzutem środkowym punktu P ze środka S_2 za pomocą prostej S_2P należącej do wiązki $[S_2]$. W rzutach DS dowolny punkt W zostaje odwzorowany na rzutni dwoma swoimi obrazami W_1 i W_2 , będącymi rzutami środkowymi W poprzez proste należące do wiązek $[T_1]$ i $[T_2]$. Przy tych założeniach punkty P_1 , P_2 i S' oraz W_1 , W_2 i T' są współliniowe.

Różne przypadki położenia punktu w obu rzutach przedstawiono na rysunku 2.

Różne położenia punktu (— odległość)			
Odwzorowanie OS		Odwzorowanie DS	
$P \leftrightarrow \pi > S_1 (S_2) \leftrightarrow \pi$	$P \leftrightarrow \pi < S_1 (S_2) \leftrightarrow \pi$	$W \leftrightarrow \pi > T_1 (T_2) \leftrightarrow \pi$	$W \in \pi$
$P \leftrightarrow \pi = S_1 \leftrightarrow \pi$	$P \leftrightarrow \pi = S_2 \leftrightarrow \pi$	$W \leftrightarrow \pi = T_1 \leftrightarrow \pi$	$W \leftrightarrow \pi = T_2 \leftrightarrow \pi$
$P \in \alpha \subset S_1 \wedge S_2$	$P \in \alpha \subset S_1 \wedge S_2$	$W \leftrightarrow \pi < T_1 (T_2) \leftrightarrow \pi$	$W \in l \subset T_1 \vee T_2$

Rys. 2. Odwzorowanie punktu w rzutach OS i DS
 Fig.2. Mapping of a point in projections OS and DS

Przeanalizujmy w rzutach OS takie położenia punktów, dla których rzuty okręgowe i środkowe jednoczą się [1]. Dotyczy to położeń, gdy $P \leftrightarrow \pi > (S_1 (S_2) \leftrightarrow \pi$. Najpierw weźmy pod uwagę zbiór takich punktów, które leżą na dowolnej płaszczyźnie α pęku płaszczyzn o osi $S_1 S_2$ (rys.3). Występują tu trzy pęki prostych: $S_2 (k_2, m_2, w_2, z_2, n_2, l_2, \dots)$, $S_1 (k_{11}, m_{11}, w_{11}, z_{11}, n_{11}, l_{11}, \dots)$ oraz $S_1 (z_{12}, n_{12}, l_{12}, k_{12}, m_{12}, w_{12}, \dots)$. Dwa pierwsze są perspektywiczne, a pęki o wspólnym środku S_1 są kongruentne. Tak więc pęki $S_2 (k_2, m_2, w_2, \dots)$ i $S_1 (k_{12}, m_{12}, n_{12}, \dots)$ są rzutowe, a ich utworem jest stożkowa K . Stożkowa K jest hiperbolą, gdyż przecina prostą niewłaściwą płaszczyzny α w dwu punktach : N^∞ i M^∞ . Wierzchołkami hiperboli są punkty S_1 i S_2 .

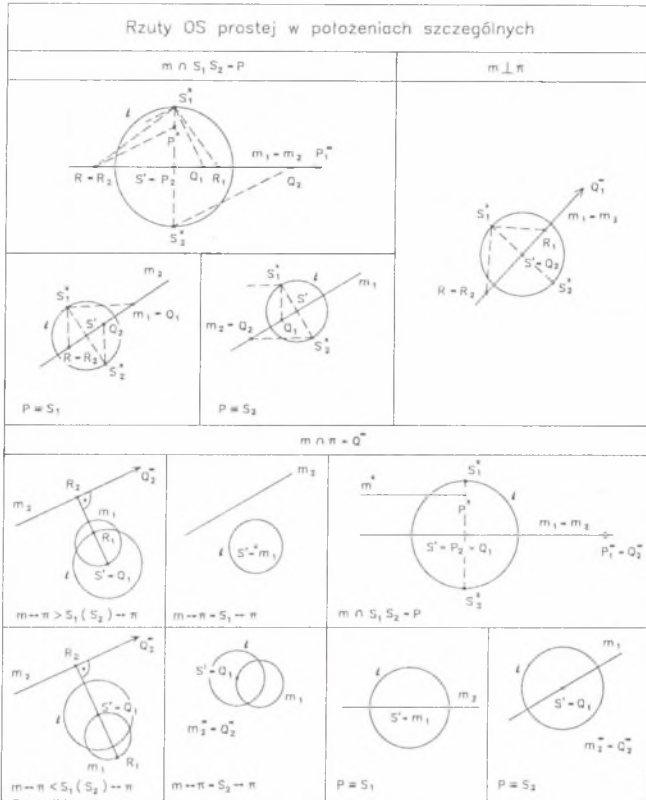


Rys. 3. Zbiór punktów \in do α , których rzuty jednoczą się
 Fig.3. A set of points belonging to α with congruent projections

3. ODWZOROWANIE PROSTEJ

3.1. Rzuty OS

Weźmy pod uwagę dowolną prostą l w położeniu ogólnym względem elementów aparatu projekcyjnego (rys. 4). Niech będzie ona podstawą prostoliniowego szeregu punktów, wśród których przyjmijmy czwórkę harmoniczną $(ABRQ^\infty)$, gdzie A i B leżą po obu stronach rzutni w odległości równej $S_1 (S_2) \leftrightarrow \pi$, R leży na rzutni i jest środkiem odcinka AB oraz punkt Q^∞ niewłaściwy prostej l . Znajdujemy odwzorowanie prostej l na rzutni π . Rzutem okręgowym [1] jest okrąg l_1 , przechodzący podobnie jak rzut każdej prostej przez punkt S' , a rzutem środkowym prosta l_2 , będąca przecięciem pęku $(S_2A, S_2R, S_2B, S_2Q^\infty \dots)$ przez rzutnię. Odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne i odwracalne, gdy pokazany jest okrąg oddalenia \mathcal{C} . Znajdźmy rzuty czwórki harmonicznej $(ABRQ^\infty)$ wykorzystując współliniowość S' i rzutów środkowego i okręgowego. Rzutami punktu A są: A_2^∞ jako punkt niewłaściwy prostej l_2 , będący rzutem środkowym oraz A_1 rzut okręgowy. Rzuty punktu B to: B_1 - jednoczący się z S' , który jest rzutem okręgowym i B_2 - rzut środkowy znaleziony jako punkt wspólny l_2 i stycznej do okręgu l_1 , poprowadzonej przez punkt $S' = B_1$. Punkt $R = R_2$ znajdujemy wykonując pomocnicze kłady prostokątne prostych przechodzących przez



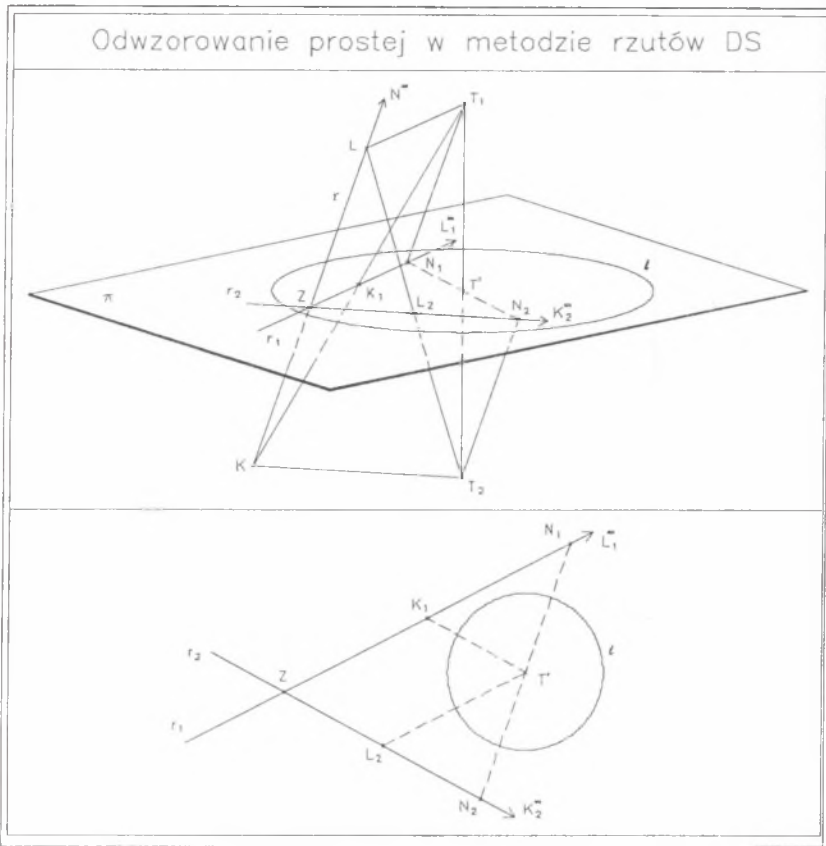
Rys. 5. Odzworowanie prostej w położeniu szczególnym w rzutach OS
 Fig.5. Mapping of a straight line in special position in OS projections

3.2. Rzuty DS

Rozważmy prostą r położoną ogólnie jako podstawę prostoliniowego szeregu punktów i przyjmijmy na niej czwórkę harmoniczną $(KLZN^\infty)$, gdzie punkty K i L leżą po obu stronach rzutni i w odległości od niej jak środki rzutowania T_1 i T_2 . Punkt Z leży zatem na π , a N^∞ jest punktem niewłaściwym r (rys. 6).

Rzutami środkowymi prostej r ze środków T_1 i T_2 są proste r_1 i r_2 przecinające się w punkcie Z , leżącym na rzutni. Odzworowanie jest wzajemnie jednoznaczne i odwracalne wówczas, gdy pokażemy okrąg oddalenia \mathcal{t} . Wykorzystując współliniowość T' i rzutów środkowych z punktów T_1 i T_2 oraz relację harmoniczności znaleziono na prostej r_1 czwórkę $(ZN_1K_1L_1^\infty) = -1$ oraz $(ZN_2L_2K_2^\infty) = -1$ na r_2 .

Zapis prostej w położeniu szczególnym przedstawiono na rysunku 7.



Rys.6. Zapis prostej w rzutach DS
 Fig.6. Mapping of a straight line in DS projections

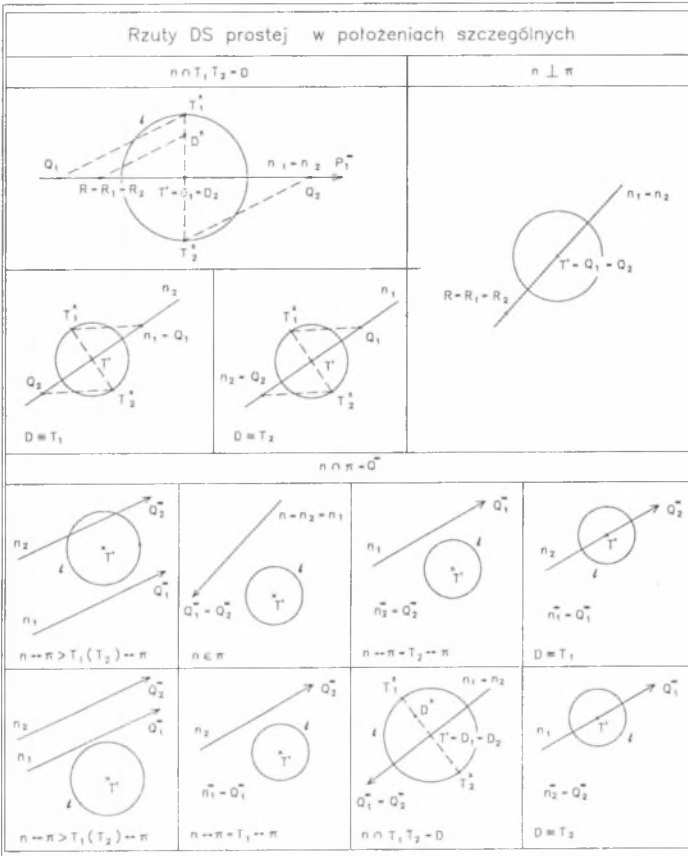
4. DWIE PROSTE

4.1. Rzuty OS

Rozpatrzono różne wzajemne położenia prostych a i b , a mianowicie: przecinanie w punkcie właściwym, przecinanie w punkcie niewłaściwym, skośne oraz prostopadłe (rys. 8).

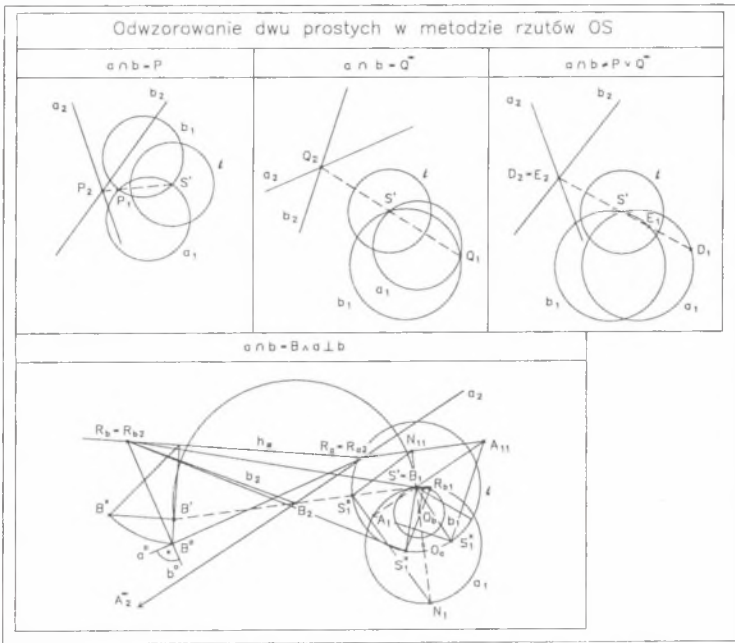
Zatrzymajmy się na ostatnim z tych położen. Dana jest prosta a rzutami a_1 i a_2 , na której przyjęto punkty A i B , leżące po obu stronach π i będące w tej samej od niej odległości jak środki S_1 i S_2 . Znalaziono punkt $R_a = R_{a2}$, leżący na rzutni, znajdując go tak jak pokazano na rysunku 4. Następnie wyznaczono punkt B' , będący rzutem prostokątnym punktu B na rzutnię π . Jak łatwo udowodnić, punkt B' leży na prostej przechodzącej przez punkty B_1 i B_2 , przy czym B_2 połowi odcinek B_1B' . Przyjęto dowolnie płaszczyznę α przechodzącą przez prostą a .

Prostą wspólną tej płaszczyzny i rzutni jest ślad $h_\alpha \subset R_a = R_{a2}$. Wyznaczono kład prostej a oraz układ prostej b prostopadłej do a , co umożliwiło określenie położenia punktu



Rys. 7. Odzworowanie prostej w położeniu szczególnym w rzutach DS
 Fig.7. Mapping of a straight line in special position in DS projections

$R_b = R_{b2}$ oraz rzutu b_2 . Na koniec znaleziono rzut b_1 . W tym celu skonstruowano R_{b1} za pomocą układu prostokątnego prostej przechodzącej przez punkty R_b i S' i przy wykorzystaniu wspólnego punktu B_1 . Mając wyznaczoną prostą $b \perp$ do a i przechodzącą przez punkt B można wyznaczyć kolejne proste prostopadłe do a jako proste pęku (Q_b^{co}), natomiast zmieniając położenie płaszczyzny α , przechodzącej przez prostą a , możemy uzyskać inne pęki prostych prostopadłych do a .

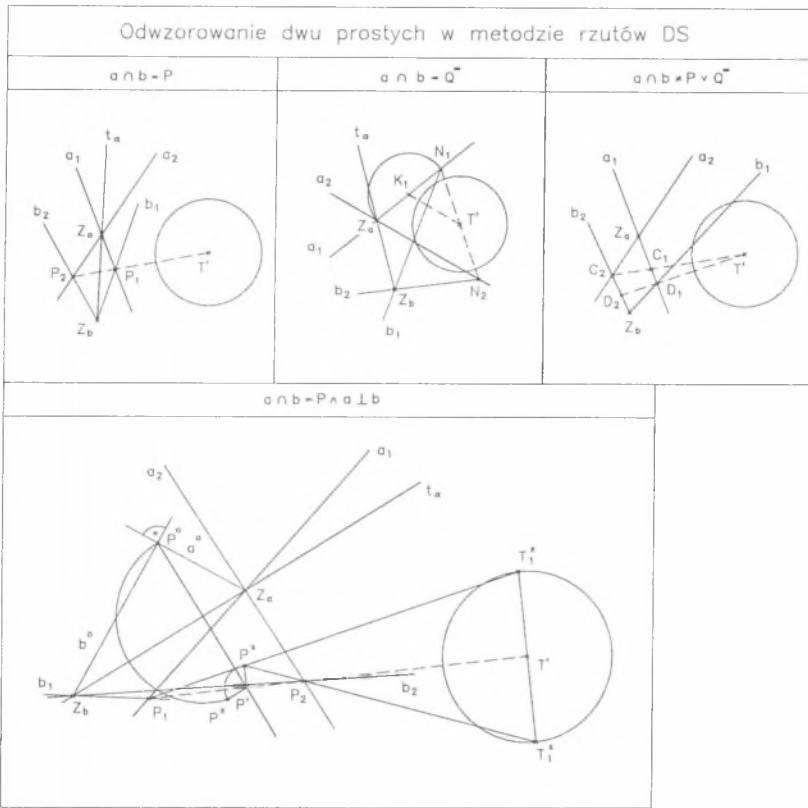


Rys. 8. Zapis dwóch prostych w różnych wzajemnych położeniach w rzutach OS
 Fig.8. Mapping of two straight lines in different mutual positions in OS projections

4.2. Rzuty DS

Rozpatrzono dwie proste a i b przecinające się w punkcie właściwym i w punkcie niewłaściwym, proste nie przecinające się oraz prostopadłe (rys. 9).

Omówimy dokładnie konstruowanie rzutów b_1 i b_2 prostej $b \perp$ do danej a. Przyjmujemy prostą a rzutami a_1 i a_2 , przecinającymi się w punkcie przynależnym do rzutni Z_a . Obieramy dowolnie na prostej a punkt P (rzuty P_1 i P_2). Poprzez kład prostokątny prostych przechodzących przez punkty T_1 i P_1 oraz T_2 i P_2 wyznaczamy kład prostokątny P^X oraz punkt P' , będący rzutem prostokątnym punktu P na rzutnię π . Rzut P' leży na prostej przechodzącej przez punkty P_1, P_2 i T' . Następnie przez prostą a prowadzimy dowolną płaszczyznę α ($t_\alpha \subset Z_a$). Znajdujemy kład a^0 prostej a i wyznaczamy kład b^0 prostej b prostopadłej do a. Określamy położenie punktu Z_b , co z kolei umożliwia wyznaczenie rzutów b_1 i b_2 prostej b. Możemy teraz znaleźć dowolną inną prostą pęku (N_b^{cc}), względnie zmieniając położenie płaszczyzny α , przechodzącej przez prostą a, uzyskać inne pęki prostych prostopadłych do a.



Rys. 9. Zapis dwóch prostych w różnych wzajemnych położeniach w rzutach DS

Fig.9. Mapping of two straight lines in different mutual positions in DS projections

5. ZAKOŃCZENIE

Dalsze zagadnienia, które można rozważać w omawianych odwzorowaniach, jak na przykład wzajemne położenia prostej i płaszczyzny czy też dwóch płaszczyzn oraz konstrukcje miarowe, wykraczają poza zakreślone ramy niniejszego opracowania. Kontynuacja pracy nad przedstawionymi odwzorowaniami dwuobrazowymi, a także omówionymi w pracach [1] i [2] jest zamiarem autora.

Porównując przedstawione odwzorowania OS i DS wydaje się oczywiste, że graficznie prostsze jest to drugie, chociaż pracując nad nimi przy użyciu programu graficznego AutoCAD R14, umożliwiającego działanie przestrzenne, zagadnienia geometryczne rozwiązuje się przy jednakowym nakładzie pracy. Odwzorowanie OS jest ciekawsze od strony koncepcyjnej.

LITERATURA

1. Sulima-Samujłło T.: Analiza podstawowych relacji geometrycznych w dwóch wybranych dwurzutowych odwzorowaniach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Geometria i Grafika Inżynierska z. 2, Gliwice 1998
2. Koch A., Sulima-Samujłło T.: Odwzorowanie dwuśrodkowe z restytucją. Międzyuczelniane czasopismo naukowe Geometria Wykreślna i Grafika Inżynierska z. 4, Wrocław 1998
3. Ślusarczyk B.: Geometria rzutowa i wykreślna w zakresie krzywych i powierzchni stopnia drugiego. Warszawa 1976

Recenzent: Dr Czesław Prętki
Politechnika Poznańska

Abstract

In the article the following two methods belonging to double-image projections have been presented : circular-central (OS) transforming straight line into another straight line and a circle and double-central (DS.) where straight line is projected in the form of two straight lines. For both methods projecting plane π and two centers S_1 i S_2 (or T_1 i T_2) of projections have been assumed. These points belong to the lines perpendicular to π which is their plane of symmetry.

In the OS method a point is projected circularly by means of a circle lying in the plane determined by this point and the centers S_1 i S_2 . The circle is passing by the center S_1 and the end points of its diameter are the projected point and its circular projection. The circular and central projections belong to a line passing by S' .

In the DS method a point is projected from the centers T_1 i T_2 . The central projections belong to a line passing by a point T' .

The recordings of the following problems have been considered in both projection methods : representation of various positions of point, straight line in general and particular positions and mutual positions of two lines. The latter case contains the followings positions : intersecting (including the case of two lines having a common point at infinity), non-intersecting and perpendicular.