

Jolanta DŹWIERZYŃSKA  
Zakład Geometrii i Grafiki Inżynierskiej  
Politechniki Rzeszowskiej

## ODWZOROWANIE CZĘŚCIOWO ZŁOŻENIOWE $\mathbf{Z}$ W PRZESTRZENI $n$ -WYMIAROWEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono poszerzenie na przestrzeń  $n$ -wymiarową  $P_n$  tzw. częściowo złożonego odwzorowania  $\mathbf{Z}$ , którego zasadę i właściwości omówiono w (1). Aparat odwzorowania  $\mathbf{Z}$  tworzą aparaty dwóch rzutowań prostych:  $R_o; \{\pi, O\}$  oraz  $R_s; \{\tau, S\}$ , gdzie  $\pi$  i  $\tau$  są rzutniami, a  $O$  i  $S$  środkami rzutowań spełniającymi dodatkowo warunki:  $O \notin \pi, S \notin \tau$  i  $S \notin \pi$ .

Aby odwzorowanie  $\mathbf{Z}$  było wykresalne, w budowie aparatów rzutowań  $R_o$  i  $R_s$  należy uwzględnić jedną z trzech wersji:

- rzutnia  $\pi$  jest prostą  $p(t)$ , a środek rzutowania  $O(S)$ - podprzestrzenią  $(n-2)$ -wymiarową, rozłączną z rzutnią,
- rzutnia jest płaszczyzną  $\pi(\tau)$ , a środek rzutowania  $O(S)$  - podprzestrzenią  $(n-2)$  - wymiarową przecinającą rzutnię w punkcie,
- rzutnia jest płaszczyzną  $\pi(\tau)'$ , zaś środek rzutowania  $O(S)'$  - podprzestrzenią  $(n-3)$  - wymiarową, rozłączną z rzutnią.

$\mathbf{Z}$  powyższego oraz na podstawie rachunku wymiarów można wnioskować, że odwzorowanie  $\mathbf{Z}$  jako odwzorowanie wykresalne przestrzeni  $P_n$  może mieć praktycznie użyteczną postać jedynie w przypadku, gdy  $n=3$  lub  $n=4$ .

## A PARTLY COMPOSITE REPRESENTATION $\mathbf{Z}$ IN THE $n$ -DIMENSIONAL SPACE

**Summary.** An enlargement on the  $n$ -dimensional space  $P_n$  of so called partly composite representation  $\mathbf{Z}$  is presented. It is proved that  $\mathbf{Z}$  representation may be practically useful when  $n=3$  or  $n=4$  only.

Niniejsze opracowanie jest kontynuacją i rozszerzeniem rozważań zawartych w artykule [1]. Opisane tam odwzorowanie częściowo złożeniowe  $\mathbf{Z}$  pozwoliło wskazać wspólne pole dla licznych odwzorowań wykresalnych jednorzutowych i wielorzutowych przestrzeni trójwymiarowej rzutowej, afinicznej oraz euklidesowej. Aparat odwzorowania  $\mathbf{Z}$ , jako metody zapisu wykresalnego przestrzeni  $P_3$ , tworzą aparaty dwóch rzutowań prostych:

$R_O; \{\pi, O\}$  oraz  $R_S; \{\tau, S\}$ . Rzutnie  $\pi$  i  $\tau$  tych rzutowań są odpowiednio dwiema dowolnie usytuowanymi w  $P_3$  płaszczyznami rzutowymi, zaś środki  $O$  i  $S$  dwoma różnymi punktami rzutowymi, spełniającymi dodatkowo warunki:  $O \notin \pi$ ,  $S \notin \tau$  i  $S \notin \pi$ . Tak pomyślany aparat pozwala przyporządkować każdej podprzestrzeni  $\mathcal{X} \in P_3$  parę rzutów  $\{\mathcal{X}^O, \mathcal{X}^{O,S}\}$ , w której:

$$\mathcal{X}^O = R_O(\mathcal{X}) = \tau \cap (\mathcal{X} \circ S)$$

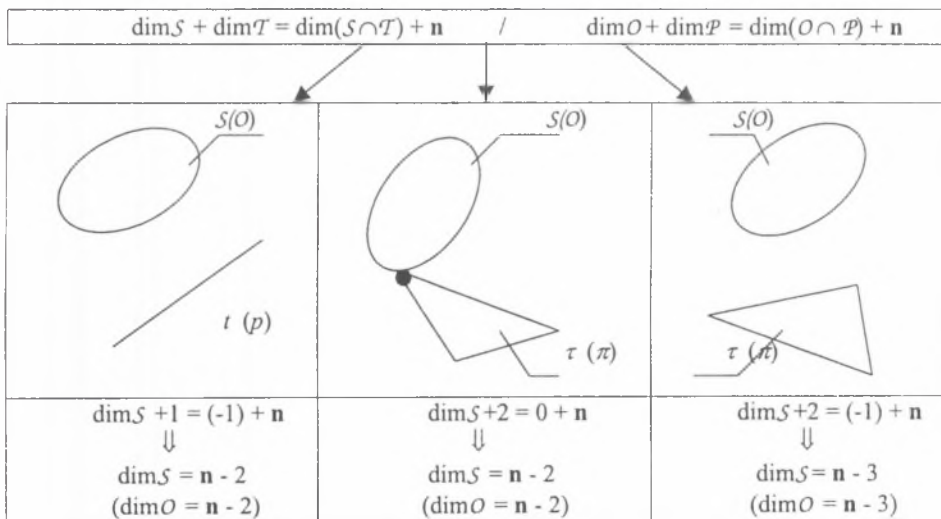
$\mathcal{X}^{O,S} = R_S[R_O(\mathcal{X})] = \tau \cap (\mathcal{X}^O \circ S)$ , gdzie  $\mathcal{X}^O = \pi \cap (\mathcal{X} \circ O)$ , zaś symbol  $(\mathcal{X} \circ O)$  oznacza złącz podprzestrzeni  $\mathcal{X}$  i  $O$ .

W szczególności wyróżnić można rodzinę podprzestrzeni  $\mathcal{X}_i$ , w tym punktów nie należących do  $m(O,S) - \{O,S\}$ , których rzuty  $\mathcal{X}^O$  oraz  $\mathcal{X}^{O,S}$  pozwalają na rzutową restytucję tych podprzestrzeni względem aparatu odwzorowania  $\mathbf{Z}$ , co świadczy o tym, że  $\mathbf{Z}$  jest tzw. odwzorowaniem minimalnym przestrzeni  $P_3$  [2].

Założmy obecnie, że odwzorowanie  $\mathbf{Z}$  należy zastosować do zapisu przestrzeni rzutowej  $n$ -wymiarowej  $P_n$ , przy czym uczestniczące w tym odwzorowaniu rzutowania wiązkowe  $R_O$  i  $R_S$  mogą być rzutowaniami *zwykłymi* (rzutnia i środek rzutowania są rozłączne) lub *uogólnionymi* (rzutnia nierozłączna ze środkiem) [2]. Ponieważ odwzorowanie  $\mathbf{Z}$  jest z założenia odwzorowaniem wykreślnym, więc w przestrzeni  $P_n$  za rzutnie rzutowań  $R_O$  i  $R_S$  należy przyjąć proste lub płaszczyzny.

Uwzględniając zasygnalizowaną wariantowość budowy aparatów rzutowań  $R_O$  i  $R_S$  dochodzi się do trzech zasadniczo różnych i możliwych do zastosowania w przestrzeni  $P_n$  wersji budowy aparatów rzutowań  $R_O; \{\mathcal{P}, O\}$  i  $R_S; \{\mathcal{T}, S\}$ :

- rzutnia  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  jest prostą  $t(p)$ , zaś środek  $S(O)$  rzutowania  $R_S(R_O)$  jest podprzestrzenią  $(n-2)$ -wymiarową, rozłączną z rzutnią,
- rzutnia  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  jest płaszczyzną  $\tau(\pi)$ , a środek rzutowania  $R_S(R_O)$  jest podprzestrzenią  $(n-2)$ -wymiarową, przecinającą rzutnię w punkcie,
- rzutnia  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  jest płaszczyzną  $\tau(\pi)$ , środek zaś  $S(O)$  rzutowania  $R_S(R_O)$  jest podprzestrzenią  $(n-3)$ -wymiarową, rozłączną z rzutnią.



Rys.1  
Fig.1

Rysunek 1 obrazuje symbolicznie strukturę aparatu rzutowania  $R_S$  ( $R_O$ ) w każdej z wymienionych wersji oraz uzasadnia za pomocą rachunku wymiarów przyjęte w poszczególnych wersjach wymiary środków rzutowań  $S$  ( $O$ ).

Spróbujmy teraz zestawić aparat odwzorowania  $\mathbf{Z}$  przestrzeni  $P_n$ , ze wskazanych na rysunku 1 różnych wersji aparatów rzutowań  $R_O$  i  $R_S$ . W zestawieniu tym konieczne jest uwzględnienie następujących warunków, będących uogólnieniem właściwości opisanego w [1] aparatu odwzorowania  $\mathbf{Z}$  przestrzeni  $P_3$ . Mianowicie:

- środki  $S$  i  $O$  rzutowań wiązkowych  $R_S$  i  $R_O$ , wykorzystywanych w definiowanym odwzorowaniu  $\mathbf{Z}$ , muszą tworzyć układ minimalnego odwzorowania wielorzutowego przestrzeni  $P_n$ , a więc  $S \circ O \neq P_n$  oraz  $S \cap O = \emptyset$ , czyli

$$\dim S + \dim O \leq n \quad (1)$$

- rzutnia  $\mathcal{P}$  rzutowania  $R_O$  powinna należeć do rodziny podprzestrzeni nierzutujących w rzutowaniu  $R_S$ , co gwarantuje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie rzutów  $(P_n)^O \subset \mathcal{P}$  i  $(P_n)^{O,S} \subset \mathcal{T}$  i wyraża się spełnieniem nierówności

$$\dim \mathcal{P} + \dim S + 1 \leq n \quad (2)$$

Wszystkie teoretycznie możliwe przypadki zestawień aparatów rzutowań  $R_O$  i  $R_S$ , mogących dać aparat wykreślnego odwzorowania wiązkowego częściowo złożeniowego  $\mathbf{Z}$  przestrzeni  $P_n$  pokazano w tablicy 1. Dla poszczególnych par wyróżnionych aparatów rzutowań  $R_O; \{\mathcal{P}, O\}$  i  $R_S; \{\mathcal{T}, S\}$  sprawdzono warunki zachowania nierówności (1) i (2), zapisując wyniki analizy w odpowiednich polach tablicy.

Zestawione w tablicy 1 obliczenia wskazują, że rozważane odwzorowanie częściowo złożeniowe  $\mathbf{Z}$ , traktowane jako odwzorowanie wykreślne przestrzeni  $P_n$ , ma praktycznie użyteczną postać jedynie wtedy, gdy:

1<sup>o</sup> aparat odwzorowania  $\mathbf{Z}$  jest zbudowany przy uwzględnieniu warunków zapisanych w polach 3A, 3B oraz 3C tablicy 1,

2<sup>o</sup> wymiar  $n$  odwzorowywanej przestrzeni  $P_n$  jest równy 3 (dla odwzorowań typu 3A, 3B, 3C) lub 4 (dla odwzorowania typu 3C).

Wniosek 2<sup>o</sup> świadczy o tym, że odwzorowania typu  $\mathbf{Z}$  znajdują bardzo ograniczone zastosowania w wykreślnych opisach rzutowych przestrzeni wielowymiarowych. Eliminację tego ograniczenia uzyskać można, wspomagając odwzorowania  $\mathbf{Z}$  tzw. „odwzorowaniami centrycznymi”. Nie jest to jednak objęte tematem niniejszych rozważań.

#### Uwaga:

Zasygnalizowane w tablicy 1 zestawienia 1A, 2A oraz 3A, 3B i 3C aparatów rzutowań wiązkowych  $R_S$  i  $R_O$  dają możliwość budowy aparatów odwzorowania  $\mathbf{Z}$  przestrzeni  $P_2$ , ale tego rodzaju odwzorowania wykreślne przestrzeni, dającej się zapisać w oryginale na płaszczyźnie, nie mają praktycznego uzasadnienia.

Zauważmy jeszcze, że wśród wyróżnionych w tablicy 1 odwzorowań  $\mathbf{Z}$  odwzorowanie typu 3C realizowane w przestrzeni  $P_3$  jest identyczne z odwzorowaniem opisanym w [1].

Pozostałe odmiany odwzorowania  $\mathbf{Z}$ :

- typu 3A i 3B, realizowane w przestrzeni  $P_3$ ,
- typu 3C, realizowane w  $P_4$ ,

Tablica 1

<div style="text-align: center;">Aparat rzutowania <math>R_S</math></div> <div style="text-align: center;">Aparat rzutowania <math>R_O</math></div>	<b>1</b> $\{S, t\}$ $\dim S = n-2$ $p \cap S = \emptyset$	<b>2</b> $\{S, \pi\}$ $\dim S = n-2$ $\dim(S \cap \pi) = 0$	<b>3</b> $\{S, \pi\}$ $\dim S = n-3$ $S \cap \pi = \emptyset$
<b>A</b> $\{O, p\}$ $\dim O = n-2$ $p \cap O = \emptyset$	(1) $(n-2)+(n-2) \leq n-2$ $n \leq 2$ (2) $1+(n-2)+1 \leq n$ $n \leq n$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>n \leq 2</math></div>	(1) $(n-2)+(n-2) \leq n-2$ $n \leq 2$ (2) $1+(n-2)+1 \leq n$ $n \leq n$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>n \leq 2</math></div>	(1) $(n-2)+(n-3) \leq n-2$ $n \leq 3$ (2) $1+(n-3)+1 \leq n$ $-1 \leq 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>n \leq 3</math></div>
<b>B</b> $(O, \pi)$ $\dim O = n-2$ $\dim(O \cap \pi) = 0$	(1) $(n-2)+(n-2) \leq n-2$ $n \leq 2$ (2) $2+(n-2)+1 \leq n$ $1 \leq 0$ sprzeczność	(1) $(n-2)+(n-2) \leq n-2$ $n \leq 2$ (2) $2+(n-2)+1 \leq n$ $1 \leq 0$ sprzeczność	(1) $(n-3)+(n-2) \leq n-2$ $n \leq 3$ (2) $2+(n-3)+1 \leq n$ $n \leq n$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>n \leq 3</math></div>
<b>C</b> $(O, \pi)$ $\dim O = n-3$ $O \cap \pi = \emptyset$	(1) $(n-2)+(n-3) \leq n-2$ $n \leq 3$ (2) $2+(n-2)+1 \leq n$ $1 \leq 0$ sprzeczność	(1) $(n-2)+(n-3) \leq n-2$ $n \leq 3$ (2) $2+(n-2)+1 \leq n$ $1 \leq 0$ sprzeczność	(1) $(n-3)+(n-3) \leq n-2$ $n \leq 4$ (2) $2+(n-3)+1 \leq n$ $n \leq n$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><math>n \leq 4</math></div>

stanowią, w stosunku do [1], nowe propozycje realizacji odwzorowań wykreślonych odpowiednich przestrzeni rzutowych. Pomimo odmienności szczegółowych zasad budowy aparatów tych odwzorowań dowodzi się, że występujące w odwzorowywanych przestrzeniach rodziny podprzestrzeni o tzw. *obrazach prostych* charakteryzują się takimi samymi właściwościami, jak ustalono w [1].

Mianowicie w odwzorowaniu **2** typu 3A, 3b lub 3C realizowanym przy wykorzystaniu rzutowań wiązkowych  $R_O; \{P, O\}$  i  $R_S; \{T, S\}$  podprzestrzeń  $\mathcal{X} \subset P_n$  ma tzw. *obraz prosty*, tzn.:

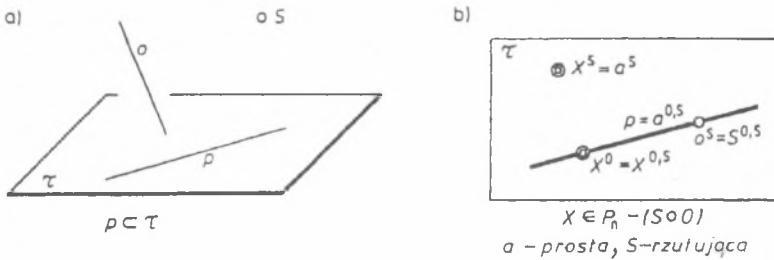
$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}^S \circ S) \cap (\mathcal{X}^O \circ O), \text{ gdy } \mathcal{X} \cap (S \circ O) = (\mathcal{X} \cap S) \circ (\mathcal{X} \cap O).$$

Podprzestrzenie nie mające obrazów prostych zapisuje się w omawianych odwzorowaniach za pośrednictwem tzw. *obrazów złożonych*, które mają formę:

- *obrazów złączowych*, gdy odwzorowywaną podprzestrzeń  $\mathcal{K}$  traktuje się jako złącz podprzestrzeni odwzorowywanych w sposób restytuowalny,
- *obrazów iloczynowych*, gdy  $\mathcal{K}$  jest iloczynem podprzestrzeni wcześniej odwzorowanych w sposób restytuowalny.

Przykłady budowy obrazów prostych, złączowych oraz iloczynowych podprzestrzeni przestrzeni  $P_3$  oraz  $P_4$  uzyskanych za pomocą odwzorowania  $\mathbf{Z}$  typu 3A, 3B oraz 3C wykreślono odpowiednio na rysunkach 2, 3 i 4. Rysunki te pokazują dodatkowo możliwość zapisu rzutowych relacji zachodzących pomiędzy podprzestrzeniami, co dowodzi, że wykorzystane do ich wykonania odwzorowania wykreślne typu  $\mathbf{Z}$  stanowią efektywne metody opisu wykreślnego figur wyróżnionych w odwzorowywanych przestrzeniach rzutowych.

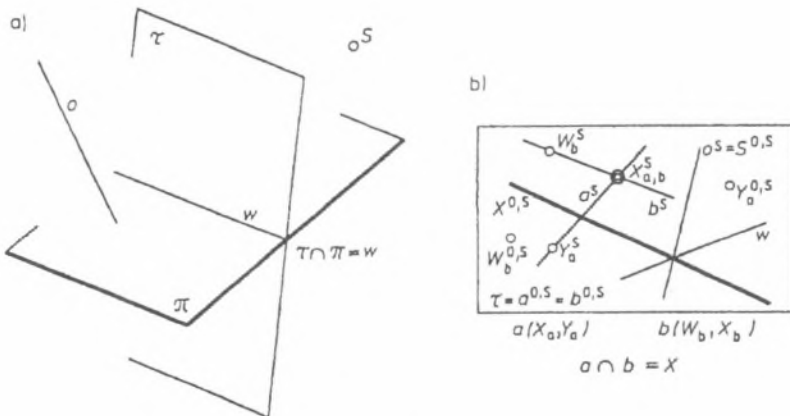
3A dla  $P_3$



Rys.2

Fig.2

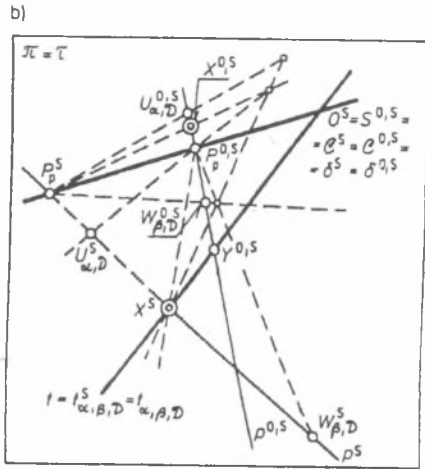
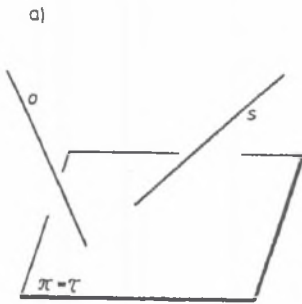
3 dla  $P_3$



Rys.3

Fig.3

3C dla P<sub>4</sub>



$$P^S(W^S, U^S, P^S, \dots) \wedge p^{0,S}(W^{0,S}, U^{0,S}, P^{0,S}, \dots)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\left. \begin{aligned} X^S &= p^S \cap t^S \\ Y^S &= p^{0,S} \cap t^{0,S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X^{0,S} \neq Y^{0,S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(t, U), \beta(t, W) \\ &\alpha \neq \beta, \text{ bo } p(U, W) \cap t = \emptyset \\ &\mathcal{D}(\alpha, \beta) \neq \mathcal{D}(O, S), \text{ bo } \mathcal{D}^S \neq \mathcal{D}^S \text{ i } \mathcal{D}^{0,S} \neq \mathcal{D}^{0,S} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$$

obraz  $\delta \Leftrightarrow \delta^0 = \delta^{0,S} = O^S = S^{0,S}$  i obraz podprzestrzeni  $\mathcal{D}$

Rys.4

Fig.4

LITERATURA

1. Dźwierzynska J., Januszewski B.: Odwzorowanie częściowo złożeniowe **1** trójwymiarowej przestrzeni rzutowej na płaszczyznę oraz jego adaptacje do zapisu przestrzeni afinicznej i euklidesowej. Publikacja przygotowana do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Rzeszowskiej, 1999
2. Januszewski B, Steciak A.: Podstawy pewnej klasyfikacji wykreślnych odwzorowań wielorzutowych wiązkowych. Międzynarodowe Sympozjum Geodezja i geometria inżynierska w budownictwie i inżynierii. Rzeszów-Kaczarnica 1996
3. Słoma J.: Centryczne odwzorowania przestrzeni rzutowych **n** – wymiarowych. Publikacja przygotowana do druku w Wydawnictwie Uczelnianym Politechniki Lubelskiej, 1999

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Marian Palej

**Abstract**

An enlargement on the  $n$ -dimensional space  $P_n$  of so called partly composite representation  $Z$ , described in (1) for the case  $n=3$ , is presented.

The  $Z$  representation apparatus is created by two simple projection apparatuses  $R_o; \{\pi, O\}$  and  $R_s; \{\tau, S\}$ , where  $\pi$  and  $\tau$  are projection subspaces and  $O, S$  - centres of projection fulfilling additionally the conditions:  $O \notin \pi$ ,  $S \notin \tau$  and  $S \notin \pi$ .

The assumption of one of three kinds of projection subspaces is necessary to make considered method of representation graphically useful:

- a) the projection subspace is a line  $p(t)$  and the centre of projection  $R_o (R_s)$  is a  $(n-2)$ -dimensional subspace, separable with projection subspace,
- b) the projection subspace is a plane  $\pi(\tau)$ , while the centre of projection  $R_o (R_s)$  is a  $(n-2)$ -dimensional subspace, intersecting the projection subspace in a point,
- c) the projection subspace is a plane  $\pi(\tau)$  but the centre of projection  $R_o (R_s)$  is a  $(n-3)$ -dimensional, separable with  $\pi(\tau)$  - subspace.

There are conclusions of above mentioned conditions and of dimension computation discussed. It is proved that presented  $Z$  representation may be practically useful when  $n=3$  or  $n=4$  only. There are some examples of representation of the space  $P_3$  and  $P_4$  presented.