ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria: ELEKTRYKA z. 178 Nr kol. 1498

Janusz M. JAWORSKI
Politechnika Lubelska
Główny Urząd Miar

BŁĄD BŁĘDU I NIEPEWNOŚĆ NIEPEWNOŚCI

Streszczenie. W artykule omówiono niedokładność miar niedokładności pomiaru: błędu granicznego i niepewności rozszerzonej. Porównując obliczone wartości błędu granicznego względnego błędu granicznego pomiaru i niepewności rozszerzonej względnej niepewności pomiaru sformułowano wskazówki, jak wyznaczać niepewność rozszerzoną pomiaru.

ERROR OF THE ERROR AND UNCERTAINTY OF THE UNCERTAINTY

Summary. A problem of the inaccuracy of the limit error and expanded uncertainty as the measures of measurement inaccuracy is discussed. From the comparison of the calculated values of these measures one can draw a conclusion how to determine the expanded uncertainty and limit error.

1. WPROWADZENIE

Rozważamy pomiar, którego wynik $\hat{y}$ (ściślej estymata wartości prawdziwej $\mathring{y}$ wielkości mierzonej) jest średnią arytmetyczną $\bar{y}$ serii obserwacji (tj. pojedynczych pomiarów) $\{y(n)|\, n=1,2,\ldots,N\}$ powtarzanych w warunkach powtarzalności. Miarą niedokładności pomiaru może być graniczny błąd pomiaru lub niepewność rozszerzona (patrz [1])

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\max}\hat{y} &= E \\ U(\hat{y}) &= U \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Niepewność rozszerzoną oblicza się jako krotność niepewności standardowej $u(\hat{y})$

$$U = U(\hat{y}) = k\,u(\hat{y}) = k\,u\,, \tag{2}$$

gdzie k – współczynnik rozszerzenia.

Analizując niedokładność miar niedokładności sformułujemy wskazówki, jak obliczać niepewność rozszerzoną i błąd graniczny. Będziemy starali się także udowodnić następującą tezę:

miary niedokładności pomiaru w postaci błędu granicznego i niepewności rozszerzonej mają jednakową wartość raktyczną.

Porównamy najpierw obliczone wartości błędu granicznego i niepewności rozszerzonej.

2. OBLICZANIE BŁĘDU GRANICZNEGO I NIEPEWNOŚCI ROZSZERZONEJ

Graniczny błąd pomiaru i niepewność standardową obliczamy z zależności

$$\left.\begin{aligned} E &= k\, s(\overline{y}) + D = k\,A + D \\ U &= k\,u = k\,u(\hat{y}) = k\sqrt{u_A^2(\hat{y}) + u_B^2(\hat{y})} = k\sqrt{A^2+B^2} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

gdzie: k – współczynnik rozszerzenia, przyjmujemy jednakową jego wartość zarówno dla błędu granicznego, jak i niepewności rozszerzonej,

$s^2(\overline{y}) = s^2/N$ – estymata wariancji średniej arytmetycznej $\overline{y}$ randomizowanej przez hipotetyczne powtarzanie w warunkach powtarzalności,

s^2 – estymata wariancji zmiennej losowej modelującej pojedyncze obserwacje,

D – graniczny błąd systematyczny,

$u = \sqrt{A^2 + B^2} = u(\hat{y})$ – niepewność standardowa pomiaru,

$u_A^2(\hat{y}) = s^2(\overline{y}) = A^2$ – kwadrat niepewności standardowej liczonej metodą typu A,

$u_B^2(\hat{y}) = B^2$ – kwadrat niepewności standardowej liczonej metodą typu B, równy wariancji randomizowanego błędu systematycznego.

Przedział $[-D, D]$ jest przedziałem, w którym leży nieznany błąd systematyczny (teoria błędów) i przedziałem, w którym mieszczą się wszystkie randomizowane błędy systematyczne. Zwykle przyjmuje się, że randomizowane błędy systematyczne mają rozkład prostokątny, jest wówczas

$$B^2 = \tfrac{1}{3} D^2, \tag{4}$$

co pozwala zapisać równania (3) w postaci

$$\left.\begin{aligned} E &= k\,A + \sqrt{3}\,B = k\,A + D \\ U &= k\sqrt{A^2+B^2} = k\sqrt{A^2 + \tfrac{1}{3}D^2} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Oznaczymy stosunek niepewności liczonych metodą A i metodą B

$$\lambda = \frac{B}{A} \tag{6}$$

i zapiszemy błąd oraz niepewność w postaci

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{k}{\sqrt{3}\,\lambda}+1\right)D = \left(k+\sqrt{3}\,\lambda\right)A \\ U &= \frac{k}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\;D = k\sqrt{1+\lambda^2}\;A \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Stosunek błędu granicznego do niepewności rozszerzonej

$$\gamma = \frac{E}{U} = \frac{k+\sqrt{3}\,\lambda}{k\sqrt{1+\lambda^2}}, \tag{8}$$

osiąga maksimum

$$\gamma_{\max} = \sqrt{1+\frac{3}{k^2}}, \tag{9}$$

dla

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{k}. \tag{10}$$

Dla standardowej wartości współczynnika rozszerzenia $k = 2$ ($p \approx 0{,}95$) mamy

$$k = 2\,; \quad \gamma_{\max} = \sqrt{\frac{7}{4}} \approx 1{,}323\,; \quad \text{dla } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866. \tag{11}$$

Błąd graniczny może być większy od niepewności rozszerzonej co najwyżej o 32% jej wartości. Ponieważ błąd i niepewność są liczbami niedokładnymi (o ich niedokładności patrz rozdział następny), to różnice między nimi można uznać za nieistotne.

3. NIEDOKŁADNOŚĆ BŁĘDU GRANICZNEGO I NIEPEWNOŚCI ROZSZERZONEJ

Standardowe wartości współczynnika rozszerzenia $k = 2$ ($p \approx 0{,}95$) i $k = 3$ ($p \approx 0{,}99$) przyjęto opierając się na założeniu, że hipotetyczny błąd pomiaru (przypadkowy w teorii błędu i całkowity w teorii niepewności) nakładający się na wartość prawdziwą ma rozkład normalny. Błąd graniczny i niepewność rozszerzoną należałoby liczyć z zależności

$$\left.\begin{aligned} E &= Z_p\sigma(\bar{y}) + D \\ U &= Z_p\sigma(\hat{y}) \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

gdzie: Z_p – wartość krytyczna rozkładu normalnego standaryzowanego N(0, 1),
{przedział $[-Z_p, Z_p]$ obejmuje p-tą część rozkładu N(0, 1)},
$\sigma^2(\bar{y}) = \sigma^2/N$ – wariancja średniej arytmetycznej $\bar{y}$ randomizowanej przez hipotetyczne powtarzanie w warunkach powtarzalności,

σ^2 – wariancja zmiennej losowej modelującej pojedyncze obserwacje,

D – graniczny błąd systematyczny,

$\sigma^2(\hat{y})$ – wariancja estymaty $\hat{y}$ randomizowanej przez hipotetyczne powtarzanie pomiaru w warunkach randomizujących i centrujących błąd systematyczny.

Ponieważ $Z_{0,95} = 1,960$ i $Z_{0,99} = 2,576$, przyjęto wartości standardowe $k = 2$ i $k = 3$.

Zamiast wariancji $\sigma^2(\bar{y})$ i $\sigma^2(\hat{y})$ znane są tylko ich estymaty $s^2(\bar{y})$ i $u^2(\hat{y})$, błąd graniczny i niepewność rozszerzoną należałoby więc liczyć z zależności (2)

$$\left.\begin{aligned} E^* &= k_E A + D = \left(\frac{k_E}{\sqrt{3}\,\lambda} + 1\right) D = (k_E + \sqrt{3}\,\lambda) A \\ U^* &= k_U\, u = \frac{k_U}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}\, D = k_U \sqrt{1 + \lambda^2}\, A \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

gdzie: $k_E = T_p(N - 1)$,

$k_U = T_p[\mathrm{int}\,(\nu_U)]$,

$T_p(\nu)$ – wartość krytyczna rozkładu t-Studenta o ν stopniach swobody,

ν_U – umyślona liczba stopni swobody przypisywana kwadratowi niepewności standardowej $u^2(\hat{y})$ jako estymacie wariancji $\sigma^2(\hat{y})$, wyliczana z formuły Welcha-Satterthwaite'a

$$\frac{u^4(\hat{y})}{\nu_U} = \frac{u_A^4(\hat{y})}{N-1} + \frac{u_B^4(\hat{y})}{\nu_B}, \tag{14}$$

ν_B – liczba stopni swobody przyporządkowana niepewności standardowej $u_B^2(\hat{y}) = B^2$ liczonej metodą typu B.

Jeżeli ν_B jest znane, to liczbę stopni swobody przyporządkowaną niepewności standardowej $u^2(\hat{y})$ można obliczyć jako

$$\nu_U = \frac{(A^2 + B^2)^2}{\dfrac{A^4}{N-1} + \dfrac{B^4}{\nu_B}} = (N-1)\frac{(1+\lambda^2)^2}{1 + \dfrac{N-1}{\nu_B}\lambda^4}. \tag{15}$$

Obliczymy teraz miary niedokładności estymaty s odchylenia standardowego σ zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. Estymata s^2 wariancji σ^2 jest wyznaczana na podstawie próby N-elementowej, przypisuje się więc jej $\nu = (N - 1)$ stopni swobody. Rozkład randomizowanej estymaty s^2 można wyrazić za pomocą rozkładu chi kwadrat

$$s^2 = \frac{\chi^2(\nu)}{\nu}\sigma^2, \tag{16}$$

gdzie $\chi^2(\nu)$ – zmienna losowa o rozkładzie chi kwadrat o ν stopniach swobody.

Wartość oczekiwana i wariancja randomizowanej estymaty s^2 wynoszą

$$\left.\begin{aligned} &E(s^2) = \sigma^2 \\ &\mathrm{var}(s^2) = \sigma^2(s^2) = \frac{2}{\nu}\sigma^4 \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Graniczny bezwzględny błąd estymaty s^2 (przy współczynniku rozszerzenia $k = 2$) wynosi

$$\Delta_{\max} s^2 = 2\sigma(s^2) = 2\sqrt{\frac{2}{\nu}}\,\sigma^2. \tag{18}$$

Zastępujemy wariancję σ^2 jej estymatą s^2 i obliczamy względny błąd estymaty odchylenia standardowego s

$$\delta_{\max} s = \delta_{\max} s(\bar{y}) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}. \tag{19}$$

Kwadrat niepewności standardowej estymaty s^2 wynosi

$$u^2(s^2) = \sigma^2(s^2) = \frac{2}{\nu}\sigma^4, \tag{20}$$

stąd (prawo propagacji niepewności)

$$u^2(s) = \frac{2}{\nu}\frac{\sigma^4}{s^2}. \tag{21}$$

Zastępujemy wariancję σ^2 jej estymatą s^2, otrzymujemy

$$u(s) = \sqrt{\frac{1}{2\nu}}\,s. \tag{22}$$

Zastępujemy dalej estymatę s niepewnością standardową $u(y) = u$ i obliczamy względną niepewność rozszerzoną (przyjmując współczynnik rozszerzenia $k = 2$) niepewności standardowej u i niepewności rozszerzonej U

$$U_{\mathrm{rel}}(u) = U_{\mathrm{rel}}(U) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}. \tag{23}$$

Zależność (23) traktuje się jako związek między niepewnością rozszerzoną względną niepewności (tj. miarą niedokładności niepewności) a przyporządkowaną jej liczbą stopni swobody. Jeżeli więc niepewność rozszerzona względna $U_{\mathrm{rel}}[u_{\mathrm{B}}(\hat{y})] = U_{\mathrm{rel}}(B)$ niepewności liczonej metodą typu B, równa granicznemu błędowi względnemu $\delta_{\max}(\Delta_{\max} D)$ granicznego błędu systematycznego, wynosi β, to niepewności $u_{\mathrm{B}}^2(\hat{y})$ odpowiada liczba stopni swobody

$$\nu_B = \frac{2}{\beta^2}. \tag{24}$$

Jeżeli niepewności $u^2(\hat{y})$ odpowiada liczba stopni swobody ν_U, to niepewność rozszerzona względna $U_{rel}(U^*)$ niepewności rozszerzonej U^* wynosi

$$U_{rel}(U^*) = \sqrt{\frac{2}{\nu_U}}. \tag{25}$$

Jeżeli niepewność $u_A^2(\hat{y}) = s^2(\bar{y}) = A^2$ jest obliczana na podstawie próby N-elementowej, to graniczny błąd względny $\delta_{max}(k_E A)$ granicznego błędu przypadkowego $k_E A$ wynosi

$$\delta_{max}(k_E A) = \sqrt{\frac{2}{N-1}}. \tag{26}$$

Stosując prawo propagacji błędów, wyznaczymy jeszcze graniczny błąd względny $\delta_{max}(E^*)$ granicznego błędu pomiaru E^*

$$\delta_{max}(E^*) = \frac{\sqrt{\frac{2}{N-1}}}{1+\frac{\sqrt{3}\,\lambda}{k_E}} + \frac{\beta}{1+\frac{k_E}{\sqrt{3}\,\lambda}}. \tag{27}$$

4. OBLICZENIA

W tabeli 1 – wiersze 3,4 i 5 – zestawiono wartości błędu granicznego E, niepewności rozszerzonej U i błędu prawdziwego

$$\delta(U \approx E) = \frac{E}{U} - 1, \tag{28}$$

powodowanego zastąpieniem niepewności rozszerzonej U przez błąd graniczny E obliczone dla współczynnika rozszerzenia $k = 2$ ($p \approx 0{,}95$) dla różnych wartości współczynnika λ, przy czym wartości E i U dla $\lambda = \infty$; 5; 2 i 1 podano w stosunku do D, a dla $\lambda = 1$; 0,5; 0,2 i 0 – w stosunku do A (komórki w podwójnej ramce).

W dalszych wierszach tabeli 1 zestawiono wartości liczby stopni swobody ν_U, błędu granicznego E^*, niepewności rozszerzonej U^*, błędów prawdziwych

$$\left.\begin{aligned} \delta(E^* \approx E) &= \frac{E}{E^*} - 1 \\ \delta(U^* \approx E^*) &= \frac{E^*}{U^*} - 1 \\ \delta(U^* \approx E) &= \frac{E}{U^*} - 1 \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

powodowanych zastąpienie E^* przez E, U^* przez E^* i U^* przez E oraz miar niedokładności błędu granicznego i niepewności rozszerzonej $\delta_{\max}E^*$ i $U_{\rm rel}(U^*)$ obliczone dla poziomu ufności $p \approx 0{,}95$ dla różnych liczności N serii obserwacji i różnych wartości współczynnika λ. Podobnie jak poprzednio dla $\lambda = \infty$; 5; 2 i 1 wartości E^* i U^* podano w stosunku do D, a dla $\lambda = 1$; 0,5; 0,2 i 0 – w stosunku do A. Liczbę stopni swobody ν_U i miary niedokładności $\delta_{\max}E^*$ i $U_{\rm rel}(U^*)$ obliczano, zakładając $\beta = 0{,}1$ i odpowiednio $\nu_B = 200$.

Tabela 1

Porównanie wartości błędów granicznych i niepewności rozszerzonych oraz miar ich niedokładności

N			λ							
			∞	5	2	1		0,5	0,2	0
×	E/D	E/A	1,000	1,231	1,577	2,155	3,732	2,866	2,346	2,000
×	U/D	U/A	1,155	1,178	1,291	1,633	2,828	2,236	2,040	2,000
×	$\delta(U \approx E)$		-0,134	0,045	0,222	0,319		0,282	0,150	0,000
3	ν_U		200,0	186,5	43,10	8,08		3,12	2,16	2
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,497	2,242	3,484	6,035	5,269	4,649	4,303
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,161	1,301	1,882	3,261	3,497	4,388	4,303
	$\delta(E^* \approx E)$		0,000	-0,178	-0,300	-0,381		-0,456	-0,495	-0,535
	$\delta_{\max}E^*$		0,100	0,398	0,598	0,741		0,849	0,933	1,000
	$\delta(U^* \approx E^*)$		-0,122	0,289	0,723	0,852		0,478	0,059	0,000
	$\delta(U^* \approx E)$		-0,122	0,060	0,212	0,145		-0,180	-0,465	-0,535
	$U_{\rm rel}(U^*)$		0,100	0,104	0,215	0,502		0,800	0,962	1,000
5	ν_U		200,0	216,0	75,76	15,69		6,24	4,33	4,00
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,321	1,802	2,603	4,504	3,642	3,122	2.776
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,160	1,285	1,730	2,998	2,736	2,831	2.776
	$\delta(E^* \approx E)$		0,000	-0,068	-0,124	-0,172		-0,213	-0,249	-0,279
	$\delta_{\max}E^*$		0,100	0,242	0,370	0,474		0,563	0,640	0,707
	$\delta(U^* \approx E^*)$		-0,122	0,138	0,402	0,504		0,330	0,103	0,000
	$\delta(U^* \approx E)$		-0,122	0,061	0,227	0,246		0,048	-0,171	-0,279
	$U_{\rm rel}(U^*)$		0,100	0,100	0,162	0,357		0,566	0,680	0,707
7	ν_U		200,0	205,4	101,4	23,30		9,36	6,48	6,00
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,287	1,706	2,413	4,179	3,313	2,793	2,447
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,160	1,280	1,688	2,926	2,528	2,495	2,447
	$\delta(E^* \approx E)$		0,000	-0,045	-0,076	-0,107		-0,135	-0,160	-0,183
	$\delta_{\max}E^*$		0,100	0,205	0,297	0,379		0,452	0,518	0,577
	$\delta(U^* \approx E^*)$		-0,122	0,106	0,333	0,429		0,311	0,119	0,000
	$\delta(U^* \approx E)$		-0,122	0,061	0,232	0,277		0,133	-0,060	-0,183
	$U_{\rm rel}(U^*)$		0,100	0,099	0,140	0,293		0,462	0,555	0,577

cd. tabeli 1

N			λ							
			∞	5	2	1		0,5	0,2	0
10	ν_U		200,0	208,9	130,8	34,44		14,02	9,73	9,00
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,260	1,652	2,304	3,994	3,128	2,608	2,262
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,160	1,277	1,658	2,398	2,398	2,306	2,262
	$\delta(E^*\approx E)$		0,000	-0,023	-0,045	-0,065		-0,084	-0,100	-0,116
	$\delta_{max}E^*$		0,100	0,177	0,247	0,310		0,367	0,422	0,471
	$\delta(U^*\approx E^*)$		-0,,122	0,087	0,294	0,390		0,304	0,131	0,000
	$\delta(U^*\approx E)$		-0,122	0,061	0,235	0,300		0,195	0,017	-0,116
	$U_{rel}(U^*)$		0,100	0,098	0,124	0,241		0,378	0,453	0,471

Tabela 2

Porównanie wartości błędów granicznych i niepewności rozszerzonych oraz miar ich niedokładności (ciąg dalszy)

N			λ							
			∞	5	2	1		0,5	0,2	0
×	E/D	E/A	1,000	1,231	1,577	2,155	3,732	2,866	2,346	2,000
×	U/D	U/A	1,155	1,178	1,291	1,633	2,828	2,236	2,040	2,000
×	$\delta(E\rightarrow U)$		-0,134	0,045	0,222	0,319		0,282	0,150	0,000
15	ν_U		200,0	211,5	165,1	52,34		21,78	15,14	14,00
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,248	1,619	2,238	3,877	3,011	2,491	2,145
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,160	1,274	1,638	2,838	2,326	2,173	2.145
	$\delta(E^*\approx E)$		0,000	-0,014	-0,026	-0,037		-0,048	-0,058	-0,066
	$\delta_{max}E^*$		0,100	0,155	0,210	0,254		0,298	0,339	0,378
	$\delta(U^*\approx E^*)$		-0,122	0,076	0,271	0,366		0,294	0,119	0,000
	$\delta(U^*\approx E)$		-0,122	0,061	0,238	0,315		0,232	0,080	-0,066
	$U_{rel}(U^*)$		0,100	0,097	0,110	0,196		0,303	0,363	0,378
25	ν_U		200,0	213,5	205,5	85,71		37,22	25,95	24,00
	E^*/D	E^*/A	1,000	1,238	1,596	2,192	3,796	2,724	2,410	2,064
	U^*/D	U^*/A	1,139	1,160	1,272	1,622	2,811	2,265	2,101	2,064
	$\delta(E^*\approx E)$		0,000	-0,006	-0,012	-0,017		-0,022	-0,027	-0,031
	$\delta_{max}E^*$		0,100	0,136	0,171	0,203		0,233	0,262	0,289
	$\delta(U^*\approx E^*)$		-0,122	0,067	0,255	0,351		0,203	0,148	0,000
	$\delta(U^*\approx E)$		-0,122	0,061	0,240	0,328		0,265	0,121	-0,031
	$U_{rel}(U^*)$		0,100	0,097	0,099	0,153		0,232	0,278	0,289

5. WNIOSKI

Na podstawie danych liczbowych przytoczonych w tabeli 1 można wysnuć następujące wnioski:

(1) Zakładając, że musi być $U_{rel}(U^*) \leq 0{,}5$; ustalamy granice stosowalności serii obserwacji o licznościach

$N = 3$ dla $\lambda \geq 1$ (co mniej więcej odpowiada $A/D \leq 0{,}5$),
$N = 5$ dla $\lambda \geq 0{,}5$ (co mniej więcej odpowiada $A/D \leq 1$),
$N = 7$ dla $\lambda \geq 0{,}25$ (co mniej więcej odpowiada $A/D \leq 2$),
$N \geq 10$ dla dowolnych wartości λ i A/D;

niedokładność $U_{rel}(U^*)$ maleje wraz ze wzrostem λ, tzn. zwiększaniem się udziału niepewności liczonej metodą typu B (randomizowanego błędu systematycznego).

(2) Błąd zastąpienia E^* przez E [$\delta(E^* \approx E)$] jest mniejszy od granicznego błędu E^* ($\delta_{max}E^*$), co pozwala skorzystać z przybliżenia

$$E^* \approx E = 2A + D = 2\,s(\overline{y}) + D, \tag{30}$$

czyli obliczać graniczny błąd przypadkowy przyjmując standardową wartość współczynnika rozszerzenia $k = 2$.

(3) Spełniając warunki (1), można skorzystać z przybliżenia (30), czyli obliczać niepewność U^* (tj. błąd graniczny liczony metodą RiCBS) tak, jak błąd graniczny liczony metodą PBS ze standardową wartością współczynnika rozszerzenia $k = 2$.

Wniosek (3) potwierdza tezę postawioną na początku artykułu.

LITERATURA

1. Jaworski J. M.: Błąd pomiaru a niepewność pomiaru. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Elektryka z. 178, Gliwice 2001.
2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO 1993, 1995.
3. Tłum. pol.: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. GUM, 1999.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Kubisa

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 stycznia 2001 r.

Abstract

The limit error E (equal to the sum of the limit random error and the limit systematic error) and the expanded uncertainty U (equal to the product of the coverage factor and standard uncertainty) are not equal (different conditions of hypothetical repeating the

measurement) and their values are inaccurate. The relative limit error $\delta_{max}E$ of the limit error E and the relative expanded uncertainty $U_{rel}(U)$ of the expanded uncertainty U may be determine using the rules of the mathematical statistics. A comparison of the calculated values of the limit errors E, expanded uncertainties U and their inaccuracy measures suggests the following conclusions

1. Assuming that $U_{rel}(U) \leq 0{,}5$ we can determine the limits of λ (the standard uncertainty obtained from Type B evaluation divided by the standard uncertainty obtained from Type A evaluation) for N (number of repeated observations).
   $N = 3$ for $\lambda \geq 1$, $N = 5$ for $\lambda \geq 0{,}5$, $N = 7$ for $\lambda \geq 0{,}25$ and $N \geq 10$ for all values of λ.
2. The error caused by substitution by the limit error calculated for the coverage factor 2 for the limit error obtained from t-distribution (corresponding probability 0,95) is within the range of inaccuracy of the limit error obtained from t-distribution.
3. The error caused by substitution by the limit error calculated for the coverage factor 2 for the expanded uncertainty obtained from t-distribution (corresponding probability 0,95) is close to the inaccuracy of the expanded uncertainty obtained from t-distribution.