

Jerzy JAKUBIEC

Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej
Politechnika Śląska

WYZNACZANIE NIEPEWNOŚCI PRZETWARZANIA PRÓBKUJĄCEGO ZA POMOCĄ REDUKCYJNEJ ARYTMETYKI INTERWAŁOWEJ

Streszczenie. Przetwarzanie próbkujące ma na celu dostarczanie ciągów wyników pomiaru wartości chwilowych wielkości zmiennej w czasie. Pojedynczy wynik jest efektem przetwarzania analogowego, analogowo-cyfrowego i na końcu programowego. Błąd wyniku jest wypadkową wielu błędów cząstkowych o różnym charakterze, a zatem wyznaczenie jego niepewności jest zagadnieniem złożonym. W referacie przedstawiono metodę opartą na redukcyjnej arytmetyce interwałowej, pozwalającą na obliczenie niepewności na podstawie znajomości funkcji gęstości prawdopodobieństwa opisujących poszczególne źródła błędu oraz współczynników algorytmu przetwarzania. Związek między niepewnościami ma postać równania macierzowego uwzględniającego zależności zachodzące między różnymi rozkładami błędu w procesie ich splatania. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładem obliczenia niepewności dla przyjętej struktury przetwornika próbkującego.

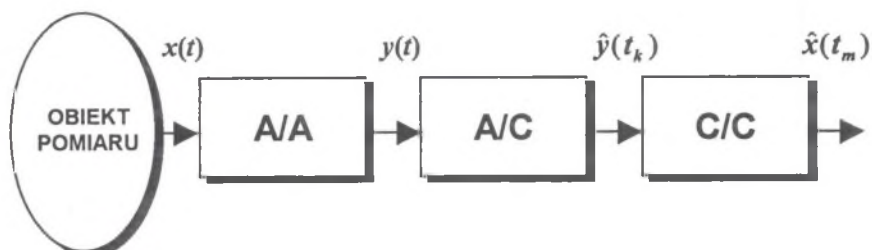
UNCERTAINTY EVALUATION OF SAMPLING PROCESSING BY MEANS OF REDUCTIVE INTERVAL ARITHMETIC

Summary. The aim of sampling processing is to deliver sequences of measurement results representing instantaneous values of an input quantity of a sampling converter. The single result is an effect of analog processing, analog-to-digital conversion and digital processing, so its error is a composition of many different partial errors. Thus, calculation of the result uncertainty is a sophisticated task. The paper presents a method applied to reductive interval arithmetic which allows calculating uncertainty for the known probability density function of

the error value sets and the known coefficients of the digital processing algorithm. The relationship between uncertainties is of matrix form the elements of which depend on relations between the error value sets during its convolution. The general considerations have been illustrated by the example presenting uncertainty calculation for the assumed structure of a sampling converter.

1. WSTĘP

Przetwarzanie próbkujące stanowi podstawowy sposób pozyskiwania ciągów danych dla celów pomiarów wielkości zmiennych w czasie. W praktyce do tego celu wykorzystuje się różnego rodzaju rozwiązania, tym niemniej można wskazać strukturę, która może być uznana za reprezentatywną dla szerokiej klasy układów. Typowy tor pomiarowy realizujący tego rodzaju działanie nazwano przetwornikiem próbkującym [4]. Jego schemat przedstawia rys.1.



Rys.1. Struktura toru pomiarowego w przetworniku próbkującym

Fig.1. Structure of measuring chain in sampling converter

W strukturze toru pomiarowego przetwornika próbkującego można wskazać trzy rodzaje elementów, które wyróżniono na rys.1 za pomocą kolejnych blozków. Pierwsza grupa obejmuje układy analogowe, takie jak: czujnik, wzmacniacze pomiarowe, komutatory oraz analogowe części układu próbkująco-pamiętającego P/P i przetwornika A/C. Układy te oznaczono łącznie symbolem A/A. Ich zadaniem jest przetworzenie zmiennej w czasie wielkości wejściowej $x(t)$ na wielkość $y(t)$ (z reguły jest to napięcie) tak, aby można było dokonywać procesu próbkowania i kwantowania z wymaganą dokładnością. Działania te realizuje element oznaczony jako A/C. Zakładając, że błędy próbkowania i kwantowania mieszczą się w dopuszczalnych granicach, wynik kwantowania $\hat{y}(t_k)$ można traktować jako ocenę wartości wielkości $y(t)$ w chwili t_k . Ostatnim ogniwem toru jest algorytm o symbolu

C/C, zgodnie z którym ciąg danych cyfrowych $\{\hat{y}(t_k), k = 0, 1, \dots, K - 1\}$ jest przetwarzany w sposób programowy tak, aby wyznaczyć wartość chwilową wielkości $x(t)$ w określonej chwili oznaczonej ogólnie jako t_m . Algorytm taki realizuje odtwarzanie wartości chwilowych wielkości mierzonej i jest zawsze elementem składowym przetwornika próbkującego (w pewnych przypadkach jest bardzo prosty i polega na pomnożeniu wyniku kwantowania przez odpowiedni współczynnik). Prócz niego można stosować inne algorytmy, jak przykładowo algorytm służący do wygładzania danych. W przypadkach gdy przetwornik próbkujący jest elementem składowym przyrządu lub systemu pomiarowego, dane wyjściowe mogą być przetwarzane przez kolejne algorytmy, takie jak algorytm DFT lub inne.

W niniejszej pracy rozpatruje się linowe algorytmy o postaci:

$$\hat{x}(m) = a_0 \hat{y}(0) + a_1 \hat{y}(1) + \dots + a_{K-1} \hat{y}(K-1), \quad (1)$$

gdzie $\hat{y}(0), \hat{y}(1), \dots, \hat{y}(K-1)$ jest ciągiem danych wejściowych algorytmu (są to oceny wartości chwilowych wielkości y), $\hat{x}(m)$ jest wynikiem wyjściowym, a_0, a_1, \dots, a_{K-1} są stałymi współczynnikami. Zakłada się, że chwile próbkowania $t_k, k = 0, 1, \dots, K - 1$ są równo oddalone o okres T_s , zachodzi zatem $t_k = kT_s$, a m jest liczbą określającą odcinek czasu między chwilą t_0 a momentem t_m , dla którego wyznaczana jest wartość wielkości wyjściowej algorytmu.

Przetwornik próbkujący jest przyrządem pomiarowym, a zatem niezbędne jest określenie niepewności wyników uzyskiwanych na jego wyjściu. Niepewność ta nie może być wyznaczana poprzez wzorcowanie, ponieważ w praktyce trudno sobie wyobrazić przeprowadzenie tego rodzaju procedury dla przyrządu mierzącego wartości chwilowe wielkości zmiennej w czasie. Oznacza to, że niepewność musi być określona w sposób analityczny (liczalnie) na podstawie modelu przetwornika próbkującego, który obejmuje wszystkie istotne źródła błędów. W ogólnym przypadku jest to jednak zagadnienie złożone. Występuje wiele źródeł błędu zarówno na etapie przetwarzania analogowego, analogowo-cyfrowego, jak i programowego. Błędy te mają różnego rodzaju charakter – w szczególności należy wyodrębnić błędy statyczne, dynamiczne i losowe ze względu na właściwości algorytmu przetwarzania [1, 4]. Algorytm ten może mieć złożoną postać numeryczną, co dodatkowo utrudnia proces obliczania niepewności.

Konieczność prowadzenia złożonych obliczeń nie jest jedynym wyróżnikiem procedury wyznaczania niepewności przetwornika próbkującego. Można także wskazać inne uwarunkowania tej procedury. Przede wszystkim do obliczania niepewności nie można używać zbioru wyników wyjściowych, gdyż zmieniają się one w czasie. Oznacza to, że niepewność nie może być definiowana jako parametr zbioru wyników pomiaru, jak to przyjmuje się klasycznie [6], lecz jako parametr zbioru wartości błędu pojedynczego wyniku

na wyjściu przetwornika próbkującego. Wynika stąd konieczność identyfikacji wszystkich źródeł błędów przed rozpoczęciem pomiarów i określenia wzajemnych związków między błędami, czyli wyznaczenia modelu błędów przetwornika. Model ten musi być znany a priori. Uzyskuje się go w wyniku wykonania odpowiednich eksperymentów pomiarowych, badań symulacyjnych, obliczeń przeprowadzanych na podstawie danych katalogowych lub jako rezultat analizy metrologicznej.

2. MODEL BŁĘDÓW PRZETWORNIKA PRÓBKUJĄCEGO

W przypadku stosowania algorytmu przetwarzania w torze pomiarowym analiza metrologiczna toru realizowana jest w sposób narzucony przez właściwości algorytmu [1]. Powoduje to dwojakiego rodzaju skutki. Przede wszystkim błędy pozostałych elementów toru, tj. błędy układów analogowych oraz błędy próbkowania i kwantowania muszą być sprowadzone na wejście algorytmu. Ponadto rodzaje rozpatrywanych błędów wyodrębniane są ze względu na sposób propagacji błędów przez algorytm.

Przyjmijmy, że liczby podawane na wejście algorytmu są ocenami wartości chwilowych napięcia $y(t)$, co oznacza, że stanowią one wystarczająco dobre przybliżenie prawdziwych wartości chwilowych tego napięcia. Błąd oceny w chwili o numerze k , $k = 0, 1, \dots, K - 1$ określony jest jako

$$\delta(k) = \hat{y}(k) - y(k), \quad (2)$$

gdzie $y(k)$ jest prawdziwą wartością wielkości y w chwili k . Wartości prawdziwe nie są znane w trakcie realizacji pomiaru, można je natomiast uzyskiwać wykorzystując wielkości wzorcowe lub wytwarzać w eksperymentach symulacyjnych. Błędy mogą być również wyznaczone w sposób analityczny lub na podstawie danych katalogowych. Pozwala to na identyfikację źródeł błędów, w wyniku czego uzyskuje się ich opis w postaci analitycznej lub tabelarycznej (jako histogram). Tak wyznaczone modele błędów mogą być używane w analizie metrologicznej przetwornika próbkującego.

Wyznaczając z równania (2) ocenę $\hat{y}(k)$ i wprowadzając ją następnie do równania (1) otrzymuje się:

$$\dot{x}(m) + \delta_x(m) = a_0 [\dot{y}(0) + \delta_y(0)] + a_1 [\dot{y}(1) + \delta_y(1)] + \dots + a_{K-1} [\dot{y}(K-1) + \delta_y(K-1)]. \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę, że jest to zależność liniowa, można ją rozdzielić na dwa wyrażenia. Pierwsze

$$\dot{x}(m) = a_0 \dot{y}(0) + a_1 \dot{y}(1) + \dots + a_{K-1} \dot{y}(K-1) \quad (4)$$

łączy prawdziwą wartość chwilową na wyjściu algorytmu z ciągiem odpowiednich wartości wejściowych. Drugie ma postać

$$\delta_x(m) = a_0 \delta_y(0) + a_1 \delta_y(1) + \dots + a_{K-1} \delta_y(K-1) \quad (5)$$

i opisuje propagację błędów z wejścia na wyjście algorytmu.

Zgodnie z wyrażeniem (5) błąd wyjściowy jest kombinacją liniową błędów danych wejściowych algorytmu. Dane te reprezentują kolejne wartości chwilowe wielkości wejściowej algorytmu, co oznacza, że błędy wejściowe pochodzą z tego samego źródła, a ich liczba równa jest liczbie wyrazów algorytmu i wynosi K . Biorąc pod uwagę, że błąd pomiaru napięcia y stanowi wypadkową wszystkich błędów pozostałej – prócz algorytmu – części toru, może być przedstawiony jako suma błędów cząstkowych. W praktyce można wyróżnić wiele błędów cząstkowych [4], przy czym ze względu na właściwości algorytmu należy je podzielić na trzy kategorie – błędy statyczne, dynamiczne i losowe. Kryterium podziału stanowi sposób, w jaki błędy te zmieniają się wewnątrz tzw. okna pomiarowego, będącego odcinkiem czasu o szerokości KT_s , i wycinającego z przebiegu $y(t)$ fragment poddawany próbkowaniu i następnie kwantowaniu. I tak błąd, którego związki kolejnych wartości dają się opisywać deterministycznie, a wartość błędu wyjściowego zależy od zmian tych wartości, nazywany jest błędem dynamicznym. Gdy zmiany błędu wewnątrz okna są deterministyczne i na tyle małe, że nie wpływają istotnie na wartość błędu wyjściowego, to nazywany jest on błędem statycznym. Jeżeli związki między wartościami błędu opisywane są probabilistycznie, to nazywany jest on błędem losowym.

Każdy algorytm prócz przenoszenia błędów z wejścia na wyjście w sposób opisany równaniem (5) wprowadza błędy własne, które również dzielone są na wyodrębnione trzy kategorie. Jednolitość opisu przetwarzania analogowego i programowego wymaga także zastosowania tego podziału w odniesieniu do błędów elementów analogowych oraz próbkujących i kwantujących. Mimo różnic w powstawaniu i propagacji błędów w elementach fizycznych i działaniach numerycznych tego rodzaju jednolitość opisu jest możliwa. Sposób, w który można ją uzyskać, opisano w pracach [1, 4].

Zgodnie z przedstawionymi uwagami błąd cząstkowy pojedynczej wartości wejściowej algorytmu w chwili k można przedstawić jako sumę

$$\delta_y(k) = \delta_s(k) + \delta_D(k) + \delta_R(k), \quad (6)$$

w której $\delta_s(k)$ jest błędem statycznym, $\delta_D(k)$ dynamicznym, a $\delta_R(k)$ losowym. W związku z tym po wprowadzeniu wyrażenia (6) do równania (5) i rozdzieleniu go na trzy składowe otrzymuje się następujące zależności. Pierwsza

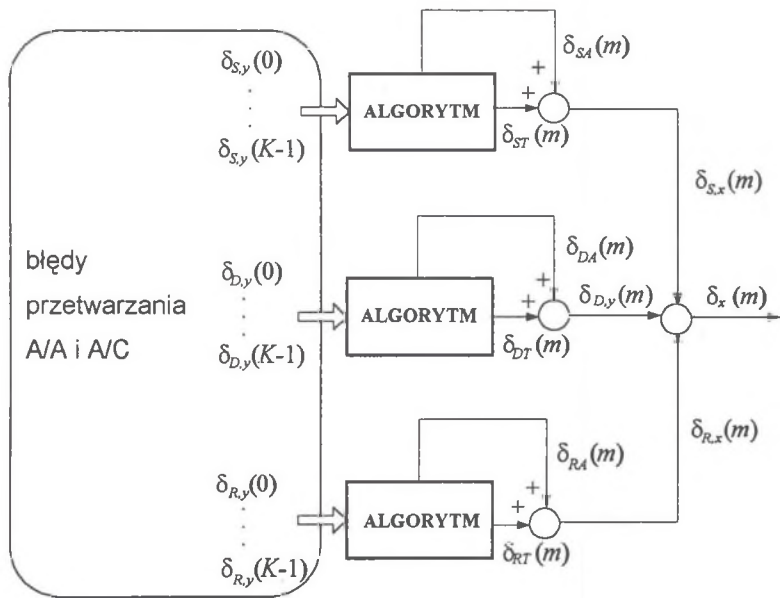
$$\delta_{sT}(m) = a_0 \delta_{s,y}(0) + a_1 \delta_{s,y}(1) + \dots + a_{K-1} \delta_{s,y}(K-1) \quad (7)$$

opisuje propagację błędu statycznego z wejścia na wyjście algorytmu, przy czym $\delta_{s,y}(0), \delta_{s,y}(1), \dots, \delta_{s,y}(K-1)$ jest ciągiem wartości wprowadzanych przez wejściowe źródło błędu statycznego podczas jednorazowej realizacji algorytmu, a $\delta_{ST}(m)$ jest błędem na jego wyjściu. Podobne zależności zachodzą dla błędu dynamicznego

$$\delta_{DT}(m) = a_0 \delta_{D,y}(0) + a_1 \delta_{D,y}(1) + \dots + a_{K-1} \delta_{D,y}(K-1) \quad (8)$$

oraz losowego

$$\delta_{RT}(m) = a_0 \delta_{R,y}(0) + a_1 \delta_{R,y}(1) + \dots + a_{K-1} \delta_{R,y}(K-1) \quad (9)$$



Rys.2. Model błędów algorytmu

Fig.2. Error model of the algorithm

Biorąc pod uwagę podział błędów cząstkowych na wymienione trzy kategorie oraz uwzględniając błędy własne algorytmu, błąd na jego wyjściu można zapisać w postaci wyrażenia

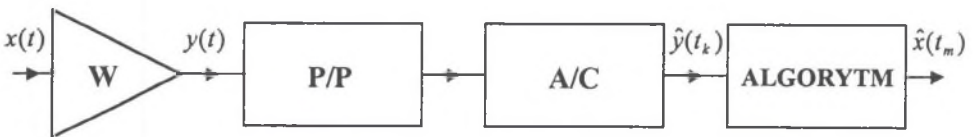
$$\delta_x(m) = \delta_{ST}(m) + \delta_{DT}(m) + \delta_{RT}(m) + \delta_{SA}(m) + \delta_{DA}(m) + \delta_{RA}(m), \quad (10)$$

gdzie symbole S, D, R w indeksie dolnym oznaczają odpowiednio błędy statyczne, dynamiczne i losowe, T oznacza błędy przeniesione, natomiast A błędy własne algorytmu. Równanie (10) wraz z równaniami (7), (8) i (9) stanowi model błędów algorytmu opisujący

związki między wartościami błędów na jego wyjściu i wejściu. Model ten graficznie można przedstawić w sposób pokazany na rys.2.

Model błędów wykorzystywany jest przede wszystkim do analizy metrologicznych właściwości algorytmu, pozwala bowiem wyznaczać zbiory wartości poszczególnych rodzajów błędów i określać związki między tymi zbiorami na wejściu i wyjściu algorytmu oraz określać udział różnych błędów w błędzie wypadkowym. Model ten może także stanowić podstawę do budowy modelu błędów przetwornika próbkującego. Wynika to z faktu, że źródła błędów wejściowych algorytmu stanowią wypadkowe odpowiednich rodzajów błędów wszystkich elementów toru poprzedzających algorytm. W razie potrzeby źródła te można dekomponować do postaci umożliwiającej analizę propagacji pojedynczego, dającego się wyodrębnić błędów przez wszystkie ogniwa przetwornika próbkującego. Problematykę budowy tego rodzaju modelu błędów ilustruje przykład.

Przykład 1. Przyjmijmy, że przetwornik próbkujący zbudowany jest ze wzmacniacza pomiarowego oznaczonego symbolem **A**, układu próbkująco-pamiętającego **P/P**, przetwornika **A/C** oraz algorytmu, jak to pokazano na rys.3. Wzmacniacz ma współczynnik wzmocnienia równy $k_u = 1$, przy czym jego zakres napięciowy wynosi od -1 do $+1$ V. Właściwości dynamiczne wzmacniacza opisuje zwyczajne, liniowe równanie różniczkowe 1 rzędu, a jego częstotliwość graniczna wynosi $f_p = 100$ kHz. Zastosowano 10-bitowy, binarny przetwornik **A/C** o zakresie wejściowym ± 1 V.



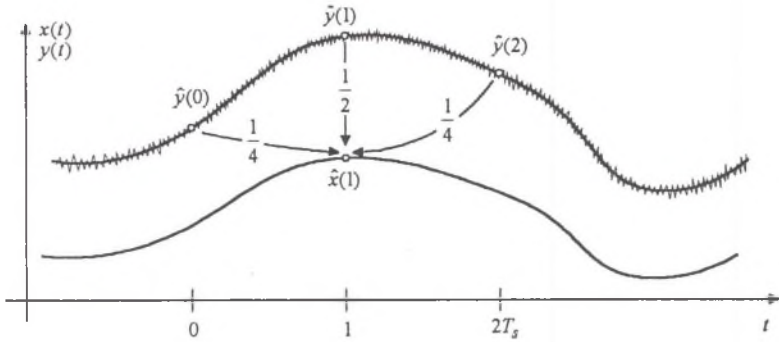
Rys.3. Schemat przykładowego przetwornika próbkującego

Fig.3. Block-diagram of the exemplary sampling converter

W przetworniku zastosowano nierekurencyjny algorytm wygładzania o postaci:

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{4} \hat{y}(0) + \frac{1}{2} \hat{y}(1) + \frac{1}{4} \hat{y}(2), \quad (11)$$

którego działania ilustruje rys.4. Polega ono na sumowaniu 3 kolejnych wartości chwilowych napięcia wyjściowego wzmacniacza przemnożonych przez odpowiednie wagi z interpretacją uzyskanego wyniku jako odnoszącego się do punktu leżącego pośrodku, czyli dla $m = 1$.



Rys.4. Ilustracja działania przykładowego algorytmu wygładzania danych
Fig.4. Activity of the exemplary data smoothing algorithm

Założmy, że napięcie mierzone zmienia się sinusoidalnie z częstotliwością $f = 100 \text{ Hz}$, a napięcie wyjściowe wzmacniacza próbkowane jest z częstotliwością $f_s = 10 \text{ kHz}$. Przyjmijmy dodatkowo, że w wyniku analizy procesu przetwarzania stwierdzono, że dominują 3 źródła błędów: błąd dynamiczny wzmacniacza, błąd kwantowania i błąd dynamiczny algorytmu. Zatem budowę modelu błędów przykładowego przetwornika należy rozpocząć od wyznaczenia opisu tych błędów.

Transmitancję widmową wzmacniacza opisuje wyrażenie

$$S(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{k_u}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}} = \frac{k_u}{1 + jf^o}, \quad (12)$$

gdzie $k_u = 1$, ω – pulsacja, ω_p – pulsacja graniczna, przy czym oznaczono: $\frac{\omega}{\omega_p} = \frac{2\pi f}{2\pi f_p} = f^o$.

Przyjmując, że $x(t) = X_m \sin(\omega t)$, przy czym amplituda $X_m = 1 \text{ V}$, błąd dynamiczny wzmacniacza przyjmuje postać [4]

$$\delta(j\omega) = Y(j\omega) - Y_{\text{ideal}}(j\omega) = \left(\frac{k_u}{1 + jf^o} - k_u \right) X_m = \frac{-jf^o}{1 + jf^o}. \quad (13)$$

W równaniu (13) symbolem $Y_{\text{ideal}}(j\omega)$ oznaczono widmową postać transmitancji wzmacniacza idealnego dynamicznie, czyli takiego, którego transmitancja jest stała i równa współczynnikowi wzmocnienia w całym paśmie częstotliwości. Czasowy przebieg błędu dynamicznego opisuje wyrażenie:

$$\delta(t) = E_m \sin(\omega t + \phi), \quad (14)$$

gdzie amplituda błędu

$$E_m = |\delta(j\omega)| \cong 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}, \quad (15)$$

a jego przesunięcie fazowe

$$\phi = -\arctan\left(\frac{1}{f^0}\right) \cong -\frac{\pi}{2} \text{ rad}. \quad (16)$$

Błąd kwantowania bipolarnego, binarnego przetwornika A/C o zakresie $-1, \dots, +1 \text{ V}$ ma rozkład jednostajny [4] w granicach od $-\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$, przy czym dla przetwornika 10-bitowego

$$h = \frac{1 - (-1)}{2^{10}} = 1,952 \cdot 10^{-3} \text{ V}. \quad (17)$$

Błąd dynamiczny własny algorytmu wyznacza się w podobny sposób jak dla przetwornika analogowego [1, 4]. Transmitancja algorytmu (1) ma ogólną postać:

$$S_A(j\omega) = \frac{\hat{X}(j\omega)}{\hat{Y}(j\omega)} = [a_0 + a_1 e^{j\omega T_s} + \dots + a_{K-1} e^{j\omega T_s (K-1)}] e^{-j\omega T_s m}. \quad (18)$$

Wprowadzając do wyrażenia (18) wartości współczynników i uwzględniając, że $K=2$ oraz $m=1$, otrzymuje się transmitancję przykładowego algorytmu

$$S_A(j\omega) = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{j\omega T_s} + \frac{1}{4} e^{j\omega 2T_s} \right] e^{-j\omega T_s} = \frac{1}{2} \cos \omega T_s + \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Algorytm idealny dynamicznie charakteryzuje się niezależnością od pulsacji. Jego opis uzyskuje się [1, 4] sprowadzając do zera pulsację w wyrażeniu (18). Zachodzi

$$S_A = S_A(j\omega)_{\omega \rightarrow 0} = a_0 + a_1 + \dots + a_{K-1}. \quad (20)$$

Wyrażenie (20) opisuje zarazem tzw. czułość statyczną algorytmu, czyli określa, z jakim współczynnikiem przenoszone są z wejścia na wyjście wartości chwilowe odpowiednio wolnozmiennych przebiegów. Dla przykładowego algorytmu otrzymuje się:

$$S_A = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1. \quad (21)$$

Wyrażenie opisujące dynamiczny błąd algorytmu ma zatem postać:

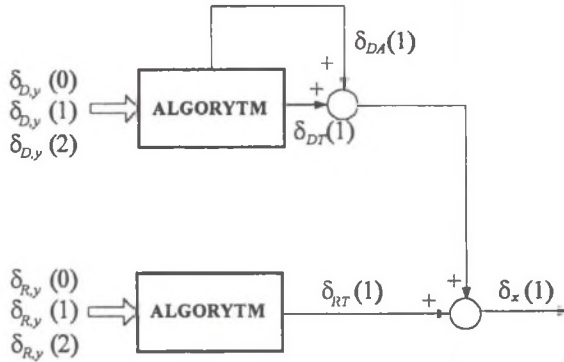
$$\delta_{DA}(j\omega) = [S_A(j\omega) - S_A] \hat{Y}(j\omega) = \frac{1}{2} \cos \omega T_s + \frac{1}{2} - 1, \quad (22)$$

przy czym przyjęto, że dla celów wyznaczania błędu $\hat{Y}(j\omega) \cong X(j\omega) = 1$. Po wprowadzeniu wartości liczbowych do równania (22) otrzymuje się wartość amplitudy dynamicznego błędu własnego algorytmu

$$E_{mA} \cong 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ V} \quad (23)$$

oraz wartość jego przesunięcia fazowego w stosunku do napięcia wejściowego

$$\phi_A = 0. \quad (24)$$



Rys.5. Model błędu przykładowego przetwornika próbkującego dla wyodrębnionych źródeł błędu: błędu dynamicznego $\delta_{D,y}$ wprowadzanego przez wzmacniacz pomiarowy, błędu kwantowania $\delta_{R,y}$ oraz dynamicznego błędu własnego algorytmu δ_{DA}

Fig.5. Model of the exemplary sampling converter for extracted error sources: dynamic error $\delta_{D,y}$ introduced by the instrumentation amplifier, quantization error $\delta_{R,y}$ and dynamic own error δ_{DA}

Model błędu przykładowego przetwornika próbkującego przedstawia rys.5. Biorąc pod uwagę postać algorytmu oraz liczbę i rodzaj wyodrębnionych źródeł błędu model ten opisany jest trzema równaniami. Propagację dynamicznego błędu wzmacniacza z wejścia na wyjście algorytmu określa równanie

$$\delta_{DT}(1) = \frac{1}{4}\delta_{D,y}(0) + \frac{1}{2}\delta_{D,y}(1) + \frac{1}{4}\delta_{D,y}(2), \quad (25)$$

gdzie $\delta_{D,y}(0)$, $\delta_{D,y}(1)$, $\delta_{D,y}(2)$ są trzema kolejnymi wartościami błędu sinusoidalnie zmiennego, leżącymi w odległości okresu próbkowania T_s symetrycznie wokół punktu środkowego (patrz rys.4). Zatem

$$\delta_{D,y}(0) = E_{mD} \sin [2\pi f(t - T_s)], \quad (26)$$

$$\delta_{D,y}(1) = E_{mD} \sin [2\pi f t], \quad (27)$$

$$\delta_{D,y}(2) = E_{mD} \sin [2\pi f(t + T_s)]. \quad (28)$$

Propagację błędu kwantowania opisuje równanie

$$\delta_{RT}(1) = \frac{1}{4}\delta_{R,y}(0) + \frac{1}{2}\delta_{R,y}(1) + \frac{1}{4}\delta_{R,y}(2), \quad (29)$$

gdzie $\delta_{R,y}(0)$, $\delta_{R,y}(1)$, $\delta_{R,y}(2)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym w przedziale $\left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right] = [-0,976, +0,976] \cdot 10^{-3}$ zgodnie z wyrażeniem (17).

Zgodnie z wyrażeniem (22) dynamiczny błąd własny algorytmu ma przebieg sinusoidalny, będący w fazie z wielkością wejściową algorytmu. Jest on jednorazowo wprowadzany na wyjście przy każdej realizacji algorytmu i ma postać:

$$\delta_{DA}(1) = E_{mA} \sin(2\pi f). \quad (30)$$

Wszystkie wymienione błędy sumują się, zatem wypadkowy błąd na wyjściu przykładowego algorytmu ma postać:

$$\delta_x(1) = \delta_{DT}(1) + \delta_{RT}(1) + \delta_{DA}(1). \quad (31)$$

3. MODEL NIEPEWNOŚCI PRZETWORNIKA PRÓBKUJĄCEGO

Z przedstawionych rozważań wynika, że błąd na wyjściu algorytmu, a zarazem na wyjściu przetwornika próbkującego można zapisać jako sumę błędów cząstkowych, których liczba zależy od liczby wyodrębnionych źródeł błędów w części analogowo-cyfrowej, liczby wyrazów algorytmu oraz liczby błędów własnych algorytmu. Niezależnie od rodzaju ich źródła wszystkie te błędy w procesie sumowania można traktować jako losowe. Wynika to przede wszystkim z warunków przetwarzania próbkującego – wielkość wejściowa zmienia się w czasie, a zmiany te nie są przewidywalne, w związku z czym wszystkie błędy z nią związane w relacji do pozostałych błędów mają charakter losowy.

Błąd wypadkowy na wyjściu przetwornika określa dokładność przetwarzania. Powszechnie przyjmuje się, że liczbowym wyrazem dokładności jest niepewność, która w rozpatrywanej sytuacji musi być traktowana jako parametr zbioru wartości błędu wypadkowego na wyjściu przetwornika. Dla celów niniejszej pracy zastosowano definicję [2] opartą na założeniu, że znany jest zbiór wartości błędu $\{\delta\}$, składający się z liczb rzeczywistych i opisany funkcją gęstości $g(\delta)$, która przyjmuje wartości nieujemne i ograniczone, a ponadto jest symetryczna względem zera i malejąca do zera dla $\delta \rightarrow \pm\infty$. Niepewnością Δ na poziomie α nazywany jest parametr wyznaczany na zbiorze $\{\delta\}$ w taki sposób, że zachodzi

$$\frac{1}{F} \int_{-\Delta}^{+\Delta} g(\delta) d\delta = \alpha, \quad (32)$$

gdzie

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\delta) d\delta. \quad (33)$$

Dla losowej funkcji gęstości współczynnik $F = 1$. Gdy definicja jest stosowana dla innego rodzaju błędów (opisywanych za pomocą histogramu lub zależnościami deterministycznymi), wyrażenie (33) normuje wartość niepewności, dzięki czemu jest ona wyznaczana jednocznie i niezależnie od sposobu interpretacji funkcji gęstości.

Błędy generowane przez poszczególne źródła, przemnożone przez odpowiednie współczynniki, sumują się na wyjściu przetwornika próbkującego, w związku z czym ogólnie błąd wyjściowy można zapisać jako

$$\delta_x = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \dots + a_n\delta_n, \quad (34)$$

gdzie n jest liczbą błędów na wyjściu. Dla modelu przedstawionego na rys.2, w którym wyróżniono 3 rodzaje błędów wejściowych algorytmu i 3 rodzaje błędów własnych, $n = 3K + 3$, K jest liczbą wyrazów algorytmu.

Znając rozkłady błędów cząstkowych obliczanie niepewności realizowane jest w dwóch krokach. W pierwszym należy określić rozkład błędu wypadkowego $g(\delta_x)$, co polega na wyznaczaniu splotu

$$g(\delta_x) = [a_1g_1(\delta_1)] * [a_2g_2(\delta_2)] * \dots * [a_n g_n(\delta_n)]. \quad (35)$$

Drugi krok polega na obliczeniu niepewności, co można zapisać ogólnie jako działanie

$$\Delta_x = U_a \{g(\delta_x)\} \quad (36)$$

polegające na wykonywaniu operacji na rozkładzie błędu w sensie definicji (32).

Opisany sposób jest w praktyce bezużyteczny, gdyż wyznaczanie splotów wielu funkcji jest zagadnieniem bardzo złożonym. Stąd dąży się do zastąpienia działań (35) i (36) działaniami przybliżonymi, ale relatywnie prostymi. Standardowo polega to na wykonywaniu działań na wariancjach rozkładów [6]. W pracy [3] zaproponowano postępowanie polegające na pewnego rodzaju aproksymacji splotu funkcją analityczną opisującą działania na niepewnościach cząstkowych, tak aby wynik stanowił dobre przybliżenie niepewności wypadkowej (36). Procedura tego postępowania daje się także przedstawić w dwóch krokach. W pierwszym wyznacza się niepewności cząstkowe błędów na wyjściu, tak jak to opisuje zależność (36). Następnie na niepewnościach tych wykonuje się działania, które ogólnie można opisać za pomocą wyrażenia

$$\Delta_x = f_{\Delta}(a_1, a_2, \dots, a_n, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n). \quad (37)$$

Wyrażenie (37) uzyskane wg reguł redukcyjnej arytmetyki interwałowej [3] ma postać:

$$\Delta_x = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{A}_v^T \mathbf{R} \mathbf{A}_v \mathbf{u}}, \quad (38)$$

gdzie

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_S \quad \mathbf{u}_D \quad \mathbf{u}_R \quad \mathbf{u}_A]^T \quad (39)$$

jest wektorem składającym się z niepewności cząstkowych, z których każda odnosi się do pojedynczego błędu na wejściu algorytmu lub błędu własnego; T w indeksie górnym oznacza transpozycję. Niepewności te zostały zestawione w wektory zgodnie z rodzajem błędu. Oznaczono

$$\mathbf{u}_S = [\Delta_{S,y}(0) \quad \Delta_{S,y}(1) \quad \dots \quad \Delta_{S,y}(K-1)]^T, \quad (40)$$

$$\mathbf{u}_D = [\Delta_{D,y}(0) \quad \Delta_{D,y}(1) \quad \dots \quad \Delta_{D,y}(K-1)]^T, \quad (41)$$

$$\mathbf{u}_R = [\Delta_{R,y}(0) \quad \Delta_{R,y}(1) \quad \dots \quad \Delta_{R,y}(K-1)]^T, \quad (42)$$

$$\mathbf{u}_A = [\Delta_{SA} \quad \Delta_{DA} \quad \Delta_{RA}]^T, \quad (43)$$

gdzie symbole S, D, R użyte w indeksie dolnym wektorów oznaczają odpowiednio niepewność statyczną, dynamiczną i losową, natomiast A oznacza niepewność własną algorytmu. Macierz \mathbf{A}_v zawiera współczynniki, przez które są mnożone poszczególne niepewności w trakcie przenoszenia z wejścia na wyjście algorytmu. Ma ona postać

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{K-1} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

czyli jest macierzą diagonalną zawierającą współczynniki algorytmu na przekątnej głównej, \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o wymiarach 3×3 . Macierz \mathbf{R} , nazywana macierzą koherencji, wyraża związki zachodzące między błędami w procesie ich składania. Współczynniki tej macierzy zależą od kształtu rozkładów błędów i korelacji między nimi [2, 5].

Wyrażenie (38) wiąże niepewność na wyjściu z niepewnościami charakteryzującymi poszczególne źródła błędu przetwornika próbkującego, a tym samym stanowi model niepewności przetwornika. Sposób wyznaczania niepewności przy użyciu tego modelu ilustruje przykład.

Przykład 2. Załóżmy, że oblicza się niepewność przetwornika próbkującego opisanego w przykładzie 1. W tym celu należy najpierw określić składowe wektora niepewności oraz wartości współczynników macierzy występujących w równaniu (38). Wektor niepewności przyjmuje postać:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{D,y}(0) \\ \Delta_{D,y}(1) \\ \Delta_{D,y}(2) \\ \Delta_{R,y}(0) \\ \Delta_{R,y}(1) \\ \Delta_{R,y}(2) \\ \Delta_{DA}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,997 \\ 0,997 \\ 0,997 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,997 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad (45)$$

przy czym wartości jego elementów obliczono następująco. Źródło błędu dynamicznego generuje 3-krotnie błąd sinusoidalny o amplitudzie $E_{mD} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ V. Niepewność tego błędu wyznaczona zgodnie z definicją (38) wynosi [3] $\Delta_{D,y} = 0,997E_{mD} = 0,997 \cdot 10^{-3}$ V. Błąd dynamiczny własny algorytmu generowany jest jeden raz na każdą realizację algorytmu, a jego niepewność przyjmuje wartość $\Delta_{DA} = 0,997E_{mA} = 0,997 \cdot 10^{-3}$ V. Błąd kwantowania ma rozkład jednostajny w przedziale $[-0,976, +0,976] \cdot 10^{-3}$ V. Jego niepewność obliczona zgodnie z definicją wynosi [3] $\Delta_{R,x} = 0,927 \cdot 10^{-3}$ V.

Macierz koherencji wymienionych niepewności ma postać:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{DD} & \mathbf{R}_{DR} & \mathbf{R}_{DA} \\ \mathbf{R}_{RD} & \mathbf{R}_{RR} & \mathbf{R}_{RA} \\ \mathbf{R}_{AD} & \mathbf{R}_{AR} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,998 & 0,992 & 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0 \\ 0,998 & 1 & 0,998 & 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0 \\ 0,992 & 0,998 & 1 & 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0 \\ \hline 0,198 & 0,198 & 0,198 & 1 & 0,192 & 0,192 & 0,198 \\ 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0,192 & 1 & 0,192 & 0,198 \\ 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0,192 & 0,192 & 1 & 0,198 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,198 & 0,198 & 0,198 & 1 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

Podmacierz \mathbf{R}_{DD} określa związki 3 błędów dynamicznych generowanych z tego samego źródła. Jak to pokazano w pracy [3] współczynniki koherencji błędów sinusoidalnych są równe cosinusowi przesunięcia fazowego między nimi. W rozpatrywanej sytuacji przesunięcie to jest równe odległości chwil próbkowania. Zatem zachodzi

$$\mathbf{R}_{DD} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega T_s) & \cos(2\omega T_s) \\ \cos(\omega T_s) & 1 & \cos(\omega T_s) \\ \cos(2\omega T_s) & \cos(\omega T_s) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,998 & 0,992 \\ 0,998 & 1 & 0,998 \\ 0,992 & 0,998 & 1 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

przy czym $\omega = 2\pi f$, $f = 100$ Hz, $T_s = 10^{-4}$ s. Natomiast podmacierz

$$\mathbf{R}_{RR} = \begin{bmatrix} 1 & 0,192 & 0,192 \\ 0,192 & 1 & 0,192 \\ 0,192 & 0,192 & 1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Jej współczynniki koherencji określają związki zachodzące w trakcie sumowania 3 błędów kwantowania o rozkładach jednostajnych [3]. Natomiast współczynniki podmacierzy \mathbf{R}_{DR} i \mathbf{R}_{RD} opisują współzależność 3 błędów o rozkładzie jednostajnym w procesie sumowania z jednym błędem sinusoidalnym. Macierze te są jednakowe i w opisywanej sytuacji mają postać:

$$\mathbf{R}_{DR} = \mathbf{R}_{RD} = \begin{bmatrix} 0,198 & 0,198 & 0,198 \\ 0,198 & 0,198 & 0,198 \\ 0,198 & 0,198 & 0,198 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Takie same wartości mają współczynniki macierzy \mathbf{R}_{AR} i \mathbf{R}_{RA} . Zachodzi

$$\mathbf{R}_{AR} = \mathbf{R}_{RA}^T = [0,198 \ 0,198 \ 0,198]. \quad (50)$$

Podmacierze \mathbf{R}_{AR} i \mathbf{R}_{RA} opisują związki między błędami sinusoidalnymi. Z zależności (16) i (24) wynika, że przesunięcie fazowe między błędem dynamicznym wzmacniacza a dynamicznym błędem własnym algorytmu wynosi $-\pi/2$. Zatem współczynnik koherencji wynosi w takim przypadku $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, a podmacierze koherencji mają postać:

$$\mathbf{R}_{AD} = \mathbf{R}_{DA}^T = [0 \ 0 \ 0]. \quad (51)$$

Biorąc pod uwagę, że macierz \mathbf{A} jest macierzą diagonalną, zawierającą na przekątnej głównej współczynniki algorytmu, zgodnie z równaniem (44) zachodzi:

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Wykonując teraz działania zgodnie z wyrażeniem (38) otrzymuje się

$$\Delta_x = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ V}. \quad (53)$$

Poprawność modelu niepewności może być zweryfikowana poprzez badania symulacyjne procesu przetwarzania zachodzącego w przykładowym przetworniku próbkującym przedstawionym na rys.3. Załóżmy, że wszystkie parametry eksperymentu pozostają bez zmian, jedyna różnica (za to bardzo istotna) polega na tym, że działania wykonywane są nie na błędach, lecz na sygnałach pomiarowych. Biorąc pod uwagę, że przebieg wejściowy ma postać $x(t) = X_m \sin(\omega t)$, gdzie $X_m = 1 \text{ V}$, częstotliwość

$f = 100$ Hz, a transmitancja wzmacniacza ma postać (12), napięcie na jego wyjściu opisuje wyrażenie

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f^\circ)^2}} \sin[2\pi ft - \arctan(f^\circ)], \quad (54)$$

gdzie $f^\circ = \frac{f}{f_p} = \frac{100}{10^5} = 10^{-3}$. Napięcie to jest próbkowane w trzech punktach t , $t + T_s$ i

$t + 2T_s$ (patrz rys.4), gdzie T_s jest okresem próbkowania i $T_s = 10^{-4}$ s. Otrzymane trzy próbki: $y(0) = y(0 \cdot T_s)$, $y(1) = y(1 \cdot T_s)$ oraz $y(2) = y(2 \cdot T_s)$ poddawane są kwantowaniu zgodnie z zależnością

$$\hat{y}(kT_s) = \text{INT}[y(kT_s)2^{10-1} + 0,5] \frac{1}{2^{10-1}}, \quad (55)$$

gdzie $k = 0, 1, 2$, a INT oznacza część całkowitą z argumentu. Następnie wyniki kwantowania przetwarzane są przez algorytm zgodnie z wyrażeniem

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{4} \hat{y}(0) + \frac{1}{2} \hat{y}(1) + \frac{1}{4} \hat{y}(2), \quad (56)$$

dzięki czemu uzyskuje się wartość wielkości wyjściowej algorytmu w chwili $t + T_s$.

W celu wyznaczenia pojedynczej wartości błędu wyjściowego należy od tak otrzymanego wyniku odjąć rzeczywistą wartość wielkości mierzonej, czyli $x(t + T_s)$. Zatem wyrażenie opisujące błąd ma postać:

$$\delta_x = \hat{x}(1) - x(t + T_s). \quad (57)$$

W celu uzyskania zbioru wartości błędu wyniku wyjściowego algorytmu opisane powyżej działania należy powtórzyć N razy, każdorazowo wybierając moment t jako liczbę losową o rozkładzie jednostajnym w zakresie równym okresowi przebiegu wejściowego, czyli w przedziale $[0, 1] \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^{-2}$. Przyjmując $N = 100000$ wyznaczono histogram błędu, na podstawie którego zgodnie z definicją (32) obliczono niepewność wyniku wyjściowego algorytmu. Uzyskano wartość

$$\Delta_x = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ V}. \quad (58)$$

4. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

Istotą przedstawionej metody wyznaczania niepewności jest zastąpienie złożonych działań związanych z wyznaczaniem splotów funkcji gęstości prawdopodobieństwa prostymi zależnościami macierzowymi. Zależności te dają wyniki przybliżone, czyli są swojego rodzaju aproksymacjami splotów funkcji gęstości w ich zastosowaniu do wyznaczania

niepewności. Jak pokazują to wyniki analiz zawarte w pracy [2], niedokładność aproksymacji jest rzędu kilku procent, co w przypadku oceny niepewności wyniku pomiaru jest w pełni do zaakceptowania.

Istotną zaletą równania aproksymacyjnego jest jego macierzowa forma, która pozwala na zastosowanie komputera w procesie wyznaczania niepewności. W tym celu niezbędna jest znajomość a priori opisów źródeł błędu oraz tzw. macierzy koherencji określającej związki między błędami w trakcie splatania opisujących je funkcji gęstości. Macierze te mogą być jednorazowo wyznaczone dla typowych rozkładów błędów i wykorzystywane w podobny sposób, jak to się robi przykładowo dla rozkładu Studenta.

Zalety opisanej metody ujawniają się szczególnie w sytuacji, gdy występuje wiele źródeł błędu, a algorytm zastosowany w przetworniku próbkującym składa się z dużej liczby wyrazów (jak przykładowo algorytm DFT). Macierzowe równanie niepewności może być przekształcone do stosunkowo prostej postaci równania propagacji, którego wymiar nie zależy od liczby wyrazów, a jedynie od liczby źródeł błędu [3]. Równanie to może również służyć do analizy wpływu poszczególnych źródeł na niepewność wypadkową.

LITERATURA

1. Jakubiec J.: Model niepewności jako podstawa oceny dokładności algorytmów przetwarzania pomiarowego. Uncertainty Model as a Base of Accuracy Evaluation of Measuring Processing Algorithms. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka z. 169, Gliwice 2000, str.7-36
2. Jakubiec J. Metrologiczne właściwości redukcyjnej arytmetyki interwałowej w zastosowaniu do wyznaczania wyniku pomiaru. Mat. konf. nt. „Podstawowe Problemy Metrologii PPM'01”, Gliwice-Ustroń, 2001, s. 57 – 72.
3. Jakubiec J.: Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych. Application of Reductive Interval Arithmetic to Uncertainty Evaluation of Measurement Data Processing Algorithms. Monografia. Wydawnictwo Pol. Śl., Gliwice 2002
4. Jakubiec J., Roj J.: Pomiarowe przetwarzanie próbkujące. Podręcznik Akademicki, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2000
5. Konopka K.: Wpływ korelacji między błędami na współczynnik koherencji w ocenie niepewności za pomocą redukcyjnej arytmetyki interwałowej. Mat. XXXIII Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów. MKM'2001, Łódź, 2001, s. 335 - 343
6. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO/IEC/OIML/BIPM, 1992,1995. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. GUM 1999.

Recenzent: Dr hab. inż. Adam Kowalczyk, prof. Politechniki Rzeszowskiej
Wpłynęło do Redakcji dnia 1 grudnia 2001

Abstract

Sampling processing performed by a sampling converter shown in Fig.1 consists of three main parts. The element denoted as A/A realizes analog processing (i.e. conditioning) of the input quantity $x(t)$ to the voltage $y(t)$, t is time. The voltage $y(t)$ is sampled and then quantized by the element described as A/D. The sequence $\{\hat{y}(t_k), k = 0, 1, \dots, K - 1\}$ of digital data obtained from this element is processed accordingly with an algorithm C/C the aim of which is to reconstruct an instantaneous value $x(t_m)$ of the input quantity $x(t)$ at the moment t_m . Thus, the single number $\hat{x}(t_m)$ obtained at the output of the sampling converter is evaluation of the value $x(t_m)$.

The resultant error of the evaluation $\hat{x}(t_m)$ is a sum of many different partial errors, so determination of its uncertainty is, in general, a sophisticated task. The paper presents a method based on application of reductive interval arithmetic [3] to making calculations on uncertainties interpreted as parameters of error value sets described by probability density functions. The relationship connecting the final and the partial uncertainties is of the matrix form (38), where \mathbf{R} is the coherence matrix composed of the elements which determine relations between the errors while they are being convoluted. The theoretical considerations have been illustrated by uncertainty calculation for an exemplary sampling converter shown in Fig.3.