

Roman ŻURKOWSKI  
Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej  
Politechnika Śląska

## NIEPEWNOŚĆ ŁAŃCUCHA ALGORYTMÓW WYZNACZANA ZA POMOCĄ REDUKCYJNEJ ARYTMETYKI INTERWAŁOWEJ

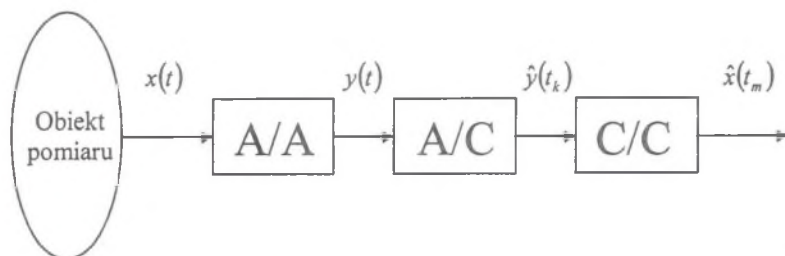
**Streszczenie.** Przetwarzanie próbkujące stanowi jedną z metod pozyskiwania danych pomiarowych dla wielkości zmiennych w czasie. W torze przetwarzania próbkującego, oprócz układów analogowych i przetwornika analogowo-cyfrowego, występuje przetwarzanie programowe. W artykule przedstawiono sposób wyznaczania niepewności za pomocą redukcyjnej arytmetyki interwałowej, w przypadku gdy przetwarzanie programowe realizuje łańcuch algorytmów. Zilustrowano to przykładem dla algorytmu korekcji dynamicznej i wygładzania danych.

## ALGORITHM CHAIN UNCERTAINTY CALCULATED BY MEANS OF REDUCTIVE INTERVAL ARITHMETIC

**Summary.** Sampling conversion is one of methods allowing obtainment of measurement data for changing in time variables. In a measuring chain with sampling conversion there are analog and analog-to-digital converters and there is also programmed conversion. The paper presents the way of calculating uncertainty by means of reductive interval arithmetic when program conversion is performed by the chain of sampling conversion. It is illustrated with an example for dynamic correction algorithm and data smoothing algorithm.

## 1. WPROWADZENIE

We współczesnej technice pomiarowej podstawowym narzędziem pozyskiwania ciągów danych pomiarowych dla wielkości zmiennych w czasie są przetworniki próbkujące [2]. W przetworniku próbkującym można wyróżnić trzy główne ogniwa przetwarzania przedstawione na rys.1. Zmienna w czasie wielkość charakteryzująca obiekt pomiaru  $x(t)$  jest przetwarzana na napięcie przez tor przetwarzania analogowego, oznaczonego ogólnie symbolem A/A. Wartości napięcia  $y(t)$  są mierzone za pomocą przetwornika A/C, na którego wyjściu pojawiają się wyniki cyfrowe  $\hat{y}(t_k)$ . Wyniki te są następnie przetwarzane programowo w bloku C/C w taki sposób, aby dane wyjściowe stanowiły wystarczająco dokładne oceny wartości chwilowych wielkości mierzonej  $\hat{x}(t_m)$ .



Rys.1. Ogólna struktura przetwornika próbkującego  
Fig.1. General structure of sampling converter

W niniejszej pracy prezentowane jest zagadnienie wyznaczania niepewności wyniku wyjściowego, gdy przetwarzanie programowe realizowane jest przez łańcuch algorytmów. W takim przypadku, ze względu na występowanie wielu niepewności cząstkowych, istotny jest problem uzyskania prostych zależności między nimi a niepewnością wypadkową. W pracy opisano zastosowanie do tego celu redukcyjnej arytmetyki interwałowej [1]. Rozważania zilustrowano przykładem łańcuchowego połączenia algorytmu korekcji dynamicznej i algorytmu wygładzania danych. Skupiono się jedynie na wyprowadzaniu odpowiednich zależności dla łańcuchowego połączenia algorytmów, wykorzystując w tym celu zaprezentowane w pracach [3] i [4] parametry analizowanych algorytmów.

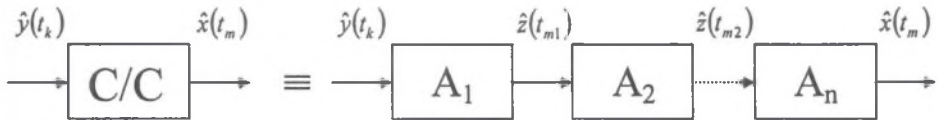
## 2. ALGORYTM ZASTĘPCZY DLA ŁAŃCUCHA ALGORYTMÓW

Załóżmy, że łańcuch składa się z  $n$  jednopunktowych algorytmów liniowych, jak to przedstawiono na rys. 2. Każdy z nich na podstawie  $K_x$  wartości wejściowych wyprowadza

jedną wartość na wyjściu. Z faktu łańcuchowego połączenia algorytmów wynika, że do realizacji wszystkich algorytmów potrzeba:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n \quad (1)$$

próbek sygnału wejściowego.  $K_1, K_2 \dots K_n$  – określają ilość wartości wejściowych każdego z algorytmów w łańcuchu.



Rys.2. Łańcuch algorytmów  
Fig.2. Chain of algorithms

Działanie każdego z algorytmów w łańcuchu można opisać w postaci macierzy, której rozmiar zależy od ilości przetwarzanych przez niego wartości wejściowych. Celowe wydaje się więc założenie, że dla łańcucha algorytmów można zapisać taką macierz, której współczynniki określą zależności pomiędzy danymi na wejściu łańcucha a wartością wyjściową. Zasada obliczania współczynników algorytmu zastępczego przedstawiona zostanie w przykładzie.

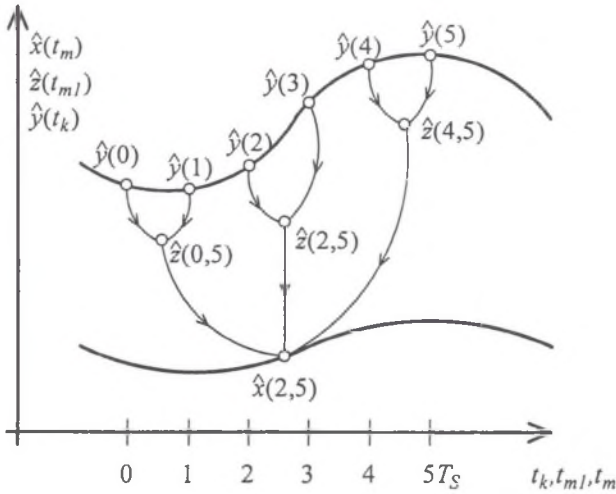
**Przykład 1.** Rozpatrywany jest przetwornik pomiarowy składający się ze wzmacniacza pomiarowego, układu próbkująco - pamiętającego (P/P), przetwornika analogowo - cyfrowego (A/C), algorytmu korekcji błędów dynamicznych  $A_1$  (opisanego w pracy [4]) oraz algorytmu wygładzania danych  $A_2$  (przedstawionego w pracy [3]). Schemat blokowy rozpatrywanego przetwornika przedstawiono na rys.3.



Rys.3. Schemat przetwornika próbkującego  
Fig.3. Sampling converter diagram

Zakres napięcia wejściowego wzmacniacza wynosi  $\pm 1$  V, a jego wzmocnienie  $k_u = 1$ . Założono, że ma on właściwości liniowego przetwornika 1 rzędu o częstotliwości granicznej  $f_p = 100$  kHz. Zastosowany 10-bitowy przetwornik A/C ma zakres napięcia wejściowego  $\pm 1$  V. Założono, że mierzone napięcie zmienia się sinusoidalnie z częstotliwością  $f = 10$  kHz i po przejściu przez wzmacniacz jest próbkowane z częstotliwością  $f_d = 2$  MHz. W przetworniku

zastosowano 3-elementowy nierekurencyjny algorytm wygładzania danych. Na rys.4. przedstawiono ilustrację działania łańcucha algorytmów występujących w przetworniku.



Rys.4. Ilustracja działania łańcucha algorytmów  
Fig.4. Illustration of algorithms chain operation

Współczynniki macierzy algorytmu zastępczego uzyskuje się w takim przypadku w wyniku przemnożenia macierzy algorytmu wygładzania danych (drugiego w łańcuchu) przez macierz złożoną z podmacierzy opisujących algorytm korekcji dynamicznej. Działanie takie można zapisać w postaci następującego równania macierzowego:

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie na podstawie pracy [3] działanie algorytmu filtracji można opisać następującą macierzą:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

natomiast z danych zawartych w pracy [4] macierz algorytmu korekcji dynamicznej ma postać:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2,7 & 0 \\ 0 & 3,7 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Zgodnie z zależnością (1) algorytm zastępczy przetwarza:

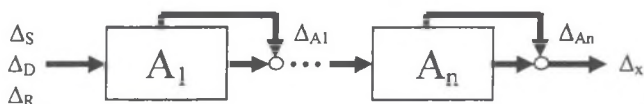
$$K = 3 \cdot 2 = 6 \quad (5)$$

próbek sygnału wejściowego, stąd rozmiar macierzy współczynników algorytmu zastępczego to 6 na 6. Po podstawieniu wartości do równania (2) uzyskamy ostatecznie następującą postać macierzy algorytmu zastępczego:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} -0,675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,925 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,925 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

### 3. MODEL NIEPEWNOŚCI

Zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w pracy [1] niepewność wyznacza się na podstawie znajomości modelu propagacji niepewności. Tego rodzaju model przedstawiono na rys.5. Na wejście łańcucha algorytmów wprowadzane są niepewności: statyczna ( $\Delta_S$ ), dynamiczna ( $\Delta_D$ ) i losowa ( $\Delta_R$ ). Dodatkowo każdy z algorytmów wprowadza własną niepewność ( $\Delta_A$ ).



Rys.5. Model niepewności łańcucha algorytmów  
Fig.5. Uncertainty model of algorithms chain

Wykorzystując redukcyjną arytmetykę interwałową, niepewność wypadkową oblicza się z zależności:

$$\Delta_x = \sqrt{\mathbf{u}_x^T \mathbf{A}_{tr}^T \mathbf{R}_n \mathbf{A}_{tr} \mathbf{u}_x}, \quad (7)$$

gdzie

$\mathbf{u}_x = [\mathbf{u}_S \ \mathbf{u}_D \ \mathbf{u}_R \ \mathbf{u}_A]^T = [\Delta_{S1} \ \dots \ \Delta_{Sn} \ \Delta_{D1} \ \dots \ \Delta_{Dn} \ \Delta_{R1} \ \dots \ \Delta_{Rn} \ \Delta_{A1} \ \dots \ \Delta_{An}]^T$  jest wektorem interwałów, czyli niepewności cząstkowych odpowiednio statycznych, dynamicznych i losowych oraz niepewności własnych algorytmu.  $\mathbf{R}_n$  jest macierzą koherencji, która opisuje związki między wektorami interwałów, w tym przypadku są to związki między zbiorami wartości błędów. Macierz  $\mathbf{A}_{tr}$  zawiera współczynniki, przez które mnożone są niepewności cząstkowe przenoszone z wejścia na wyjście algorytmu.

Dla analizowanego przykładu macierz  $\mathbf{A}_{tr}$  otrzymuje się następująco:

$$\mathbf{A}_{tr} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{A}_Z$  – macierz algorytmu zastępczego,  $\mathbf{A}_2$  – macierz algorytmu filtracji, natomiast  $\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa.

Ostatecznie macierz  $\mathbf{A}_{tr}$  ma postać:

$$\mathbf{A}_{tr} = \begin{bmatrix} -0,675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,925 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,925 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dla przyjętych w pracach [3] i [4] założeń upraszczających wektor niepewności cząstkowych dla analizowanego przykładu składa się jedynie z trzech rodzajów niepewności i ma postać:

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} \Delta_R(0) \\ \Delta_R(1) \\ \Delta_R(2) \\ \Delta_R(3) \\ \Delta_R(4) \\ \Delta_R(5) \\ \Delta_D(0,5) \\ \Delta_D(2,5) \\ \Delta_D(4,5) \\ \Delta_A(2,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,927 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,927 \\ 0,828 \\ 0,828 \\ 0,828 \\ 0,997 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}. \quad (10)$$

Pozostaje wyznaczenie współczynników macierzy koherencji  $\mathbf{R}_n$ , której ogólną postać dla analizowanego przykładu przedstawia następujące równanie:

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RR} & \mathbf{R}_{RD} & \mathbf{R}_{RA} \\ \mathbf{R}_{DR} & \mathbf{R}_{DD} & \mathbf{R}_{DA} \\ \mathbf{R}_{AR} & \mathbf{R}_{AD} & \mathbf{R}_{AA} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

gdzie podmacierze koherencji odnoszą się do:  $\mathbf{R}_{RR}$  – źródła błędu losowego,  $\mathbf{R}_{DD}$  – źródła błędu dynamicznego,  $\mathbf{R}_{AA}$  – źródła błędu własnego algorytmu,  $\mathbf{R}_{RD} = \mathbf{R}_{DR}$  – współzależności

pomiędzy błędem dynamicznym i losowym,  $\mathbf{R}_{RA} = \mathbf{R}_{AR}$  – współzależności pomiędzy błędem losowym i błędem własnym algorytmu,  $\mathbf{R}_{DA} = \mathbf{R}_{AD}$  – współzależności pomiędzy błędem dynamicznym i błędem własnym algorytmu.

Podmacierz  $\mathbf{R}_{DD}$  zgodnie z pracą [3] przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{R}_{DD} = \begin{bmatrix} 1 & 0,998 & 0,992 \\ 0,998 & 1 & 0,998 \\ 0,992 & 0,998 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Podmacierz  $\mathbf{R}_{AA}$  zawiera tylko jeden współczynnik równy 1, gdyż niepewność własna algorytmu jest przenoszona wprost na jego wyjście.

Z uwagi na to, że zagadnienie obliczania wartości współczynników macierzy koherencji jest złożone i prace nad ich wyznaczaniem wciąż trwają, kolejne podmacierze wyznaczone zostały przy pewnych założeniach upraszczających. Podmacierz  $\mathbf{R}_{RD}$  zawiera same 1, co oznacza silną dodatnią korelację pomiędzy błędem losowym a błędem dynamicznym. Z kolei podmacierz  $\mathbf{R}_{RA}$  zawiera wyłącznie  $(-1)$ , co oznacza silną ujemną korelację pomiędzy błędem losowym a błędem własnym algorytmu. Podmacierz  $\mathbf{R}_{DA}$  zawiera same zera ze względu na znikomą zależność pomiędzy błędem dynamicznym a błędem własnym algorytmu.

Współczynniki ostatniej podmacierzy, czyli  $\mathbf{R}_{RR}$  zostały wyznaczone na podstawie symulacji. Polegała ona na obliczeniu niepewności wypadkowej w programie symulującym wszystkie elementy przetwornika próbującego z przykładu 1. W wyniku działania programu otrzymano:

$$\Delta_x = \sqrt{\mathbf{u}_x^T \mathbf{A}_r^T \mathbf{R}_n \mathbf{A}_r \mathbf{u}_x} = 3,49 \cdot 10^{-3}. \quad (13)$$

Stąd po podstawieniu otrzymano następującą postać macierzy koherencji  $\mathbf{R}_n$ :

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,998 & 0,992 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,998 & 1 & 0,998 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,992 & 0,998 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Podmacierz  $\mathbf{R}_{RR}$  przyjmuje więc ostatecznie postać:

$$\mathbf{R}_{RR} = \begin{bmatrix} 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 \\ -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 \\ -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 & -0,161 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 & -0,161 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 & -0,161 \\ -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & -0,161 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

#### 4. MODEL PROPAGACJI

W celu uproszczenia obliczeń można na podstawie macierzy  $\mathbf{R}_n$  i  $\mathbf{A}_t$  stworzyć macierz propagacji  $\mathbf{P}$ . Rozmiar macierzy jest zależny od ilości źródeł błędu, a nie od ilości współczynników algorytmów. Zależności (10) i (11) opisują 3 źródła błędu, a zatem macierz koherencji  $\mathbf{R}_n$  (14) można podzielić na  $3 \cdot 3 = 9$  podmacierzy w sposób zaznaczony liniami przerywanymi. Po „zwinięciu” podmacierzy zgodnie z rozważaniami zawartymi w pracy [1] uzyskujemy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,585 & 1 & -1 \\ 1 & 0,998 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Wartość niepewności w takim przypadku oblicza się z zależności

$$\Delta_x = \sqrt{\mathbf{u}_p^T \mathbf{P} \mathbf{u}_p}, \quad (17)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \Delta_R \\ \Delta_D \\ \Delta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,927 \\ 0,828 \\ 0,997 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}. \quad (18)$$

#### 5. UWAGI KOŃCOWE

Zagadnienie wyznaczania współczynników koherencji w przypadku gdy występuje korelacja pomiędzy błędami jest złożone i w chwili obecnej nie jest znana autorowi metoda analitycznego ich wyznaczania. Prace nad tym zagadnieniem trwają, a ich fragment został



zaprezentowany w pracy [5]. Z tego powodu przedstawiona postać macierzy koherencji została uzyskana w sposób symulacyjny. Nie zmienia to jednak zaprezentowanego w tej pracy sposobu wykorzystania redukcyjnej arytmetyki interwałowej do wyznaczania niepewności dla łańcucha algorytmów. Dalsze badania mają na celu umożliwienie opisu zachodzących zależności pomiędzy różnymi źródłami błędów w sposób analityczny.

Wraz ze wzrostem ilości algorytmów w łańcuchu bardzo szybko rośnie ilość koniecznych obliczeń. W rozpatrywanym przykładzie rozmiary macierzy zostały ograniczone dzięki założeniom upraszczającym (zgodnie z pracami [3] i [4]). Gdyby ich nie poczynić, macierz koherencji miałaby 30 wierszy i 30 kolumn. Zastosowanie modelu propagacji ogranicza rozmiary macierzy, przez co upraszcza obliczenia.

## LITERATURA

1. Jakubiec J.: Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych. Application of Reductive Interval Arithmetic to Uncertainty Evaluation of Measurement Data Processing Algorithms. Monografia. Wydawnictwo Pol. Śl., Gliwice 2002.
2. Jakubiec J., Roj J.: Pomiarowe przetwarzanie próbkujące. Podręcznik Akademicki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000.
3. Jakubiec J.: Wyznaczanie niepewności przetwarzania próbkującego za pomocą redukcyjnej arytmetyki interwałowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej s. Elektryka z. 181, Gliwice 2002.
4. Konopka K.: Niepewność korekcji dynamicznej wyznaczana przy użyciu redukcyjnej arytmetyki interwałowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej s. Elektryka z. 181, Gliwice 2002.
5. Konopka K.: Wpływ korelacji między błędami na współczynnik koherencji w ocenie niepewności za pomocą redukcyjnej arytmetyki interwałowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej z.98, s. 335-344, Łódź 2001

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Janusz Gajda

Wpłynęło do Redakcji dnia 1 grudnia 2001

## Abstract

Sampling conversion is one of methods for obtainment of measurement data for changing in time variables. In general structure of a sampling converter shown in Fig. 1 there is the block of program conversion C/C. In general this block can realize a chain of algorithms as shown in Fig. 2. As an example a converter with two algorithms is considered. Fig. 4 illustrates how this chain of algorithms works. For the chain of algorithms a substitute algorithm is built. Equations from (2) to (3) show successive steps of this substitute algorithm construction. The purpose of the analysis is calculation of uncertainty

The paper presents the way of calculating the uncertainty by means of reductive interval arithmetic when the program conversion is performed by the chain of sampling conversion. It is illustrated with an example where dynamic correction algorithm and data smoothing algorithm are used. Fig. 4 presents the functioning of the chain of algorithms. This chain is replaced by the substitute algorithm. Equations from (2) to (6) present successive steps for building the substitute algorithm. The analysis aim is to calculate the uncertainty of the measuring result at the output of the algorithm according to the model presented in Fig. 5. The uncertainty is calculated by means of reductive interval arithmetic. Equations from (7) to (15) present successive steps of uncertainty calculations. Even in the simplest case the equations are complex. In order to simplify them a propagation model is built. The structure and use of this model is illustrated by equations (16) to (18).