ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Dariusz SPAŁEK

SKŁADOWE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO MASZYNY INDUKCYJNEJ O NIESYMETRYCZNYM WIRNIKU

Streszczenie. W artykule przedstawiono zastosowanie definicji momentu permeancyjnego działającego w środowiskach magnetycznych, będącego składową całkowitego momentu elektromagnetycznego. Dla wybranych modeli maszyn indukcyjnych o przewodzącym, ekscentrycznie osadzonym bądź niesymetrycznym wirniku określono moment permeancyjny, jak i całkowity moment elektromagnetyczny. Moment permeancyjny określa niepożądaną składową momentu elektromagnetycznego powstającą wskutek niesymetrii wirnika.

ELECTROMAGNETIC TORQUE COMPONENTS FOR INDUCTION MOTOR WITH NONSYMMETRICAL ROTOR

Summary. This paper dealts with application of the definition of a permeantive torque that is the component of the (total) electromagnetic torque. The components of this torque act in magnetic regions. For the chosen induction machines with solid, asymmetrical and eccentrically rotating rotors the permeantive and total torques have been evaluated. The permeantive torque determines the opposite component of electromagnetic torque arising due to the asymmetry of a machine rotor.

1. WSTĘP

Siły działające w polu magnetycznym wynikają z działania sił na obszary przewodzące oraz magnetyczne maszyny indukcyjnej: uzwojenia, obwody magnetyczne, przewodzący i magnetyczny wirnik itp. [6, 9, 11, 13]. Moment permeancyjny (środowiskowy), jako uzależniony od pochodnej cząstkowej reluktywności magnetycznej po kącie [10, 11, 12], powstaje w przypadku, gdy wirnik maszyny nie jest cylindryczny oraz również wtedy, gdy wiruje on ekscentrycznie. Fizykalnie zachodzi on na skutek pojawiania się niejednorodności właściwości magnetycznych (np. granica środowisk) w polu magnetycznym [2, 3, 8, 9]. Analogiczna składowa sił powstaje przy udziale pola elektrycznego [4]. W przetworniku elektromechanicznym o dominującym polu magnetycznym, np. w rozważanych silnikach indukcyjnych moment permeancyjny powstaje przy udziale pola magnetycznego. Moment permeancyjny wraz z momentem sił Lorentza stanowią moment całkowity.

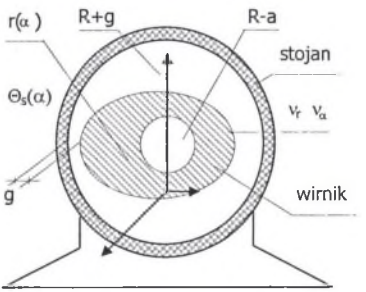
Warto zwrócić uwagę na fakt, iż moment permeancyjny i moment Lorentza współdziałają w maszynie synchronicznej [12]. Natomiast, jak zostanie pokazane w niniejszym artykule, obie składowe przeciwdziałają w maszynie indukcyjnej o niesymetrycznym wirniku.

Niesymetria ruchu, jak i ekscentryczność położenia wirnika może pojawić się jako efekt wielu przyczyn. Mogą nimi być niedoskonałości wykonania maszyny wirującej i jego mocowania. Również stopniowe wybaczanie się osi wirowania wirnika na skutek zużycia łożysk może prowadzić do niecentrycznego ułożenia osi wirowania wirnika maszyny elektrycznej. Te i inne efekty, jak np. niecylindryczny kształt wirnika, mogą prowadzić do niesymetrii wirującej maszyny, która w założeniach była projektowana jako symetryczna geometrycznie.

2. GEOMETRIA MODELOWEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO O NIESYMETRYCZNYM WIRNIKU

Wpływ opisanych wyżej przyczyn na wartość rozwijanego momentu elektromagnetycznego i jego składowych: momentu permeancyjnego i Lorentza zostanie przeanalizowany przy następujących założeniach upraszczających:

- wewnętrzna powierzchnia stojana jest cylindryczna,
- uzwojenie stojana modelowane jest jako łuska prądowa o określonym przepływie,
- wirnik maszyny jest cylindryczny, eliptyczny bądź jest ukształtowany tak, aby dana przewodność magnetyczna szczeliny powietrznej była opisana składową stałą i drugą harmoniczną kąta położenia na obwodzie maszyny (tabela 1),
- oś symetrii stojana Cs może nie pokrywać się z osią symetrii wirnika (np. może pokrywać się z jednym z ognisk Fr eliptycznego przekroju wirnika),
- oś symetrii stojana pokrywa się z osią wirowania wirnika,
- przyjmuje się dwuwymiarowy rozkład pola elektromagnetycznego.



Rys. 1. Maszyna indukcyjna o ekscentrycznym i niesymetrycznym wirniku
Fig. 1. Induction machine with eccentric and asymmetrical rotor

Analitycznie rozważone przykłady niesymetrii i ekscentryczności maszyny indukcyjnej zostały ujęte w tabeli 1. Należy zwrócić uwagę, iż prezentowane rozważania mogą się również odnosić do maszyny synchronicznej przy pracy asynchronicznej. Moment całkowity i jego składowe: moment od prądów i permeancyjny zostały obliczone dla wyróżnionych w tabeli 1 przypadków. Dla porównania wybranych przypadków pewne wymiary i parametry

maszyn zostały wybrane jako jednakowe. Są nimi następujące wielkości charakteryzujące geometrię i stan pracy maszyny:

- amplituda przepływu stojana θ_s,
- wewnętrzny promień obudowy stojana $R_g = R+g$,
- zewnętrzny promień ferromagnetycznej części wirnika $R_a = R-a$,
- reluktywności anizotropowej zewnętrznej warstwy wirnika ν_r, ν_α,
- przewodność anizotropowej warstwy wirnika γ,
- najmniejsza grubość szczeliny powietrznej wynosi g, która oznacza, iż największy promień opisujący powierzchnię zewnętrzną wirnika $r(\alpha)$ jest równy:

$$r_{max} = R,$$

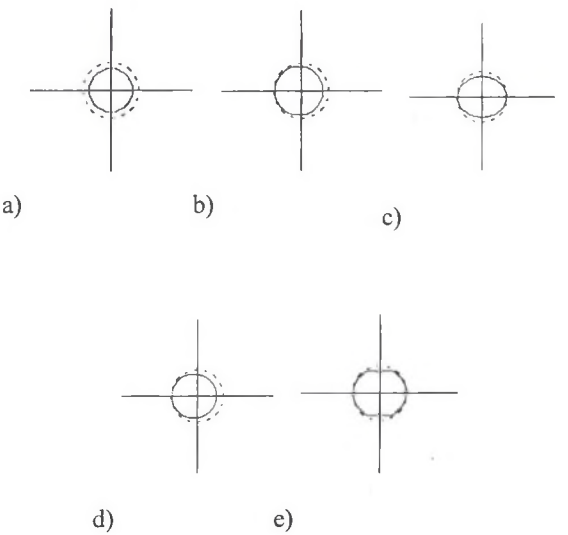
- największa grubość szczeliny powietrznej wynosi 3·g, co prowadzi z kolei do najmniejszego promienia $r(\alpha)$ opisującego powierzchnię zewnętrzną wirnika:

$$r_{min} = R_g - 3g = R - 2g,$$

- współczynniki d, eo, e, a2 (tabela 1) zostały tak dobrane, aby funkcja opisująca powierzchnię zewnętrzną wirnika $r(\alpha) \in [R, R - 2g]$ dla $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Dla porównania założono, iż w maszynie asynchronicznej o cylindrycznym wirniku promień wirnika wynosi:

$$r(\alpha) = (r_{min} + r_{max})/2 = R - g.$$



Rys. 2. Przykładowe kształty i ułożenie wirnika wewnątrz obudowy stojana (linia przerywana): a) wirnik cylindryczny - przypadek 1c, b) ekscentrycznie ułożony cylindryczny wirnik - przypadek 2c, c) wirnik eliptyczny - przypadek 1e, d) ekscentrycznie położony eliptyczny wirnik - przypadek 2e, e) wirnik wyprofilowany tak, aby szczelina powietrzna miała przewodność magnetyczną o składowej stałej i drugiej harmonicznej przestrzennej - przypadek 1h

Fig. 2. Exemplary rotors inside a stator frame (the dashed circle): a) circular rotor - the case 1c, b) eccentrically displaced circular rotor - the case 2c, c) elliptical rotor - the case 1e, d) eccentrically displaced elliptical rotor - the case 2e, e) 'second harmonic permeance - shaped' rotor - the case 1h

Tabela 1

Przykłady niesymetrii i ekscentryczności ułożenia wirnika

	1. pokrywające się osie symetrii stojana i wirnika	2. przemieszczone osie symetrii stojana i wirnika
Wirnik cylindryczny	przypadek 1c: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = R = const$,	przypadek 2c: $C_s \neq C_r$, $r(\alpha) = R'\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \varphi} - R'd\cos\varphi$,
wirnik eliptyczny	przypadek 1e: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = \frac{R\sqrt{1-e_o^2}}{\sqrt{1-e_o^2\cos^2\varphi}}$,	przypadek 2e: $C_s \neq C_r$, $C_s \equiv F_r$, $r(\alpha) = \frac{R(1-e)}{1+e\cos\varphi}$,
wirnik wyprofilowany wg drugiej harmonicznej $\lambda = (\nu_0 g)^{-1}$ $g = g(\alpha) = R_g - r(\alpha)$	przypadek 1h: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = R_g - \frac{g(1+a_2)}{1+a_2\cos(\varphi)}$, $R_g = R + g$,	

W tabeli 1. oznaczono $\varphi = \Omega_m t - p\alpha + \Delta\gamma$, gdzie p – liczba par biegunów, $\Delta\gamma$ - kąt przesunięcia amplitudy przepływu stojana względem ustalonego punktu wirnika.

3. ANALIZA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Analiza dwuwymiarowa rozkładu pola elektromagnetycznego jest prowadzona przy wykorzystaniu metody uzmienniania stałych [1, 5, 6, 10, 13]. Mianowicie, w przypadku 1c amplitudy składowych indukcji magnetycznej nie zależą od kąta α. Wynika to z cylindrycznego ukształtowania powierzchni wirnika i jego symetrycznego umocowania. W innych wyróżnionych przypadkach, na skutek niesymetrii wirnika, pole magnetyczne w maszynie nie jest kołowe. Tę deformację pola magnetycznego - przy niedużej niesymetrii wirnika - można uwzględnić, dopuszczając zmienność amplitud składowych pola magnetycznego. Dokładność otrzymywanych rozwiązań jest sprawdzana poprzez potwierdzenie spełnienia warunków brzegowych dla odpowiednich składowych wektorów pola magnetycznego, jak i ocenę zupełności rozkładu momentu elektromagnetycznego na dwie wyróżnione składowe.

Zakładając, iż wymuszono przepływ stojana o rozkładzie przestrzennym w postaci szeregu ($h = 6c+1$, $c = 0, \pm1, ...$; $\Delta\alpha_h$ ustala się przy zadaniu $\Delta\gamma$):

$$\Theta(t,\alpha) = \sum_{c=0,\pm1,\pm2,...} \theta_h \sin(2\pi f t - ph\alpha + \Delta\alpha_h), \tag{1}$$

oraz uwzględniając założoną uprzednio strukturę maszyny można natężenie pola magnetycznego w obszarze wirnika i szczeliny powietrznej maszyny wyrazić następująco:

$$\vec{H} = \nu_r \vec{B}_r + \nu_\alpha \vec{B}_\alpha = \vec{i}_r \frac{\nu_r}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \vec{i}_\alpha \nu_\alpha \frac{\partial A_z}{\partial r}, \tag{2}$$

gdzie ν_r, ν_α są reluktywnościami w kierunku radialnym i stycznym.

Pomijając prąd przesunięcia - z uwagi na dostatecznie niską częstotliwość prądu stojana - można zapisać:

$$\mathrm{rot}(\vec{H}) = \gamma \vec{E}_z = -\gamma \dot{\vec{A}}_z. \tag{3}$$

Równania (2) oraz (3) prowadzą do równania różniczkowego względem zespolonego potencjału wektorowego w postaci:

$$\frac{\nu_\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}\right) + \frac{\nu_r}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \alpha^2} = i\gamma\omega_r \mathbf{A}, \tag{4}$$

gdzie: $\omega_r = 2\pi f_r$ jest pulsacją indukowanych prądów w wirniku.

Równanie (4), po dokonaniu separacji zmiennych, prowadzi do poniższych rozwiązań w obszarze wirnika [3]:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_r = \frac{p}{r}(a_a I_{pB}(\beta r) + b_a K_{pB}(\beta r))\exp(-i\alpha_a - i\frac{\pi}{2}) \\ \mathbf{B}_\alpha = -\beta(a_a I'_{pB}(\beta r) + b_a K'_{pB}(\beta r))\exp(-i\alpha_a) \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $\alpha_a = p\alpha + \alpha_{oa}$. Analogicznie, równanie (4) w obszarze szczeliny powietrznej ma rozwiązanie:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_r = \frac{p}{r}\{a_\delta r^p + b_\delta r^{-p}\}\exp(-i\alpha_\delta - i\frac{\pi}{2}) \\ \mathbf{B}_\alpha = -p\{a_\delta r^{p-1} - b_\delta r^{-p-1}\}\exp(-i\alpha_\delta) \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $\alpha_\delta = p\alpha + \alpha_{o\delta}$.

4. SKŁADOWE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Znajomość rozkładu pola elektromagnetycznego w obszarze szczeliny i wirnika maszyny pozwala na określenie momentu elektromagnetycznego oraz jego dwóch składowych. I tak, moment całkowity i moment elektromagnetyczny wynosi [1, 2, 3, 6, 9]:

$$T_e = \nu_o R_g \int_{\partial V} B_\alpha B_r dS, \tag{7}$$

gdzie R_g jest promieniem powierzchni, po której dokonuje się całkowanie tensora naprężeń Maxwella usytuowanej w szczelinie powietrznej maszyny.

Składową momentu elektromagnetycznego pochodzącą od sił Lorentza opisuje całka objętościowa [1, 3, 9]:

$$T_{eCu} = \int_V r j_z B_r dV, \tag{8}$$

zaś moment środowiskowy jest równy [1, 2, 3, 10, 11, 12]:

$$T_{e,Fe} = \tfrac{1}{2}\int_V \left(B_r^2 \frac{\partial \nu_r}{\partial \alpha} + B_\alpha^2 \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \alpha}\right) dV. \tag{9}$$

Przestrzenny rozkład reluktywności magnetycznej w pobliżu granicy środowisk, szczelina powietrzna - wirnik, jest opisany poprzez funkcję skoku jednostkowego Heaviside'a:

$$\nu_r(r,\alpha,z) = \nu_r + (\nu_{r\delta} - \nu_r)1\{\Delta r, z\}, \tag{10}$$

gdzie $r(\alpha)$ opisuje kształt zewnętrznej powierzchni wirnika, $\Delta r = r - r(\alpha)$, $\nu_r(r,\alpha,z)$ jest funkcją reluktywności magnetycznej (indeks r oznacza składową promieniową), $\nu_{r\delta}$ jest reluktywnością w kierunku radialnym szczeliny powietrznej.

Analogiczna zależność odnosi się do reluktywności magnetycznej w kierunku stycznym (zamiast indeksu r pojawia się indeks α). Pochodna cząstkowa reluktywności magnetycznej po kącie α wynosi:

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial \nu_r}{\partial \Delta r}\frac{\partial\{r - r_o(\alpha)\}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \nu_r}{\partial \Delta r}\frac{dr_o(\alpha)}{d\alpha}. \tag{11}$$

Analogicznie można przedstawić pochodną reluktywności w kierunku stycznym.

Całka objętościowa w równaniu (9) może być przedstawiona jako iloczyn dwóch całek: po powierzchni zewnętrznej wirnika $\int_S (\cdot)dS$ oraz całki w kierunku radialnym $\int_R (\cdot)dr$, a zatem:

$$T_{e,Fe} = -\tfrac{1}{2}\int_S\int_R (B_r^2 \frac{\partial \nu_r}{\partial \Delta r}\frac{\partial r_o(\alpha)}{\partial \alpha} + B_\alpha^2 \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \Delta r}\frac{\partial r_o(\alpha)}{\partial \alpha})dr\,dS. \tag{12}$$

Moment permeancyjny - po wykonaniu całkowania w kierunku radialnym - można wyrazić następująco:

$$T_{e,Fe} = -\tfrac{1}{2}\int_S \left\{ \int_{(\nu r,\nu\alpha)}^{(\nu r\delta,\nu\alpha\delta)} (B_r^2 d\nu_r + B_\alpha^2 d\nu_\alpha) \right\} \frac{dr_o}{d\alpha} dS. \tag{13}$$

Wyrażenie pod całką liniową, ujęte w nawias zwykły, stanowi różniczkę zupełną względem dwóch zmiennych, którymi są reluktywności magnetyczne w odpowiednich osiach:

$$dF(\nu_r, \nu_\alpha) = B_r^2 d\nu_r + B_\alpha^2 d\nu_\alpha. \tag{14}$$

Wartość całki (13) zostanie określona przy wykorzystaniu faktu zupełności różniczki (14). Mianowicie, różniczka jest zupełna w obszarze jednospójnym wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial B_r^2}{\partial \nu_\alpha} = \frac{\partial B_\alpha^2}{\partial \nu_r}. \tag{15}$$

Warunek ten jest spełniony – dodatek 2. Można zatem moment permeancyjny przedstawić (dodatek 2) w postaci całki:

$$T_{e,Fe} = -\tfrac{1}{2}1\int_0^{2\pi} (|\mathbf{I}_1(\alpha)| + |\mathbf{I}_2(\alpha)|)\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} r(\alpha)d\alpha, \tag{16}$$

w której składniki $\mathbf{I}_1(\alpha)$, $\mathbf{I}_2(\alpha)$ zawierają zespolone wartości składowych indukcji magnetycznych adekwatnie do zależności (D.2.8), (D.2.9). Wynika to stąd, iż obie całki są kwadratami wzajemnie ortogonalnych funkcji proporcjonalnych do składowych indukcji pola magnetycznego.

Po podstawieniu obliczonych składowych indukcji pola magnetycznego z (5), (6) do relacji (7) otrzymuje się następującą zależność na całkowity moment elektromagnetyczny:

$$T_e = -\tfrac{1}{2} \nu_o l R_g p^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}[D(\alpha, R_g)\, \overline{D'}(\alpha, R_g)] d\alpha \,. \tag{17}$$

Natomiast moment sił Lorentza wynosi:

$$T_{e,Cu} = \tfrac{1}{2} l p \gamma \omega_r \int_0^{2\pi} \int_{Ra}^{r(\alpha)} |Z(\alpha, \beta r)|^2 \, r dr d\alpha \,. \tag{18}$$

Na podstawie powyższych zależności można określić wartości momentów sił dla dowolnego kształtu wirnika maszyny przy uwzględnieniu jego niesymetrii oraz ekscentryczności. W tabelach 2, 3 przedstawiono rezultaty obliczeń dla wybranych niesymetrii maszyn indukcyjnych (tabela 1). Określono również straty mocy w wirniku wirującej maszyny wynikające z przepływu prądów indukowanych:

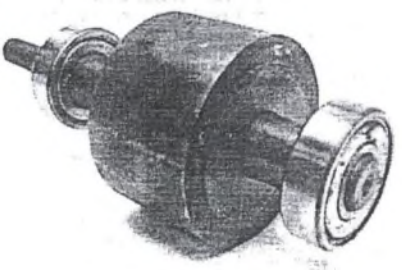
$$P_{Cu} = \int_V jE dV = -i\omega_r \int_V jA dV \,. \tag{19}$$

Porównanie relacji (19) z relacją (18) prowadzi do następującej zależności:

$$P_{Cu} = \frac{\omega_r}{p} T_{e,Cu} = \frac{\omega_r}{p} (T_e - T_{e,Fe}) \,, \tag{20}$$

gdyż po prawej stronie występują wielkości wyrażone poprzez całki powierzchniowe.

Przykładowe obliczenia prowadzono dla silnika indukcyjnego o litym wirniku, których budowę omówiono szczegółowo w pracy [7], a przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wirnik analizowanego silnika indukcyjnego – z pracy [7]
Fig. 3. Rotor of the analyzed induction motor – presented in [7]

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 4. oraz graficznie zobrazowano na rys.6. Obliczenia przeprowadzono przy wykorzystaniu programu Mathcad. Dodatkowo, na rysunku 7 przedstawiono zmienność składowych indukcji pola magnetycznego dla maszyny indukcyjnej 1e względem kąta położenia na obwodzie wirnika. Składowe te pozostają stałe względem kąta α, w przypadku gdy wirnik maszyny jest cylindryczny (przypadek 1c).

Na rys. 8. przedstawiono zmienność składowej stycznej pseudotensora $\sigma_{\alpha r}$. Na rysunku 9 pokazano charakterystykę mechaniczną silnika indukcyjnego w przypadku 2c (wirnik cylindryczny przesunięty). Na wykresie widoczna składowa permeancyjna (ujemna składowa momentu elektromagnetycznego) przeciwdziała składowej Lorentza.

Tabela 2

Całkowity moment maszyny indukcyjnej

T_e [Nm]	wirnik anizotropowy $\nu_r < \nu_\alpha$ T_{eI}	izotropowy wirnik $\nu_r = \nu_\alpha$ T_{eII}	wirnik anizotropowy $\nu_r > \nu_\alpha$ T_{eIII}
1c $r(\alpha) = R-g$	10.62	8.91	8.68
2c $d = 0.0204$	10.55	8.88	8.66
1e $e_o = 0.28$	9.29	9.29	7.61
2e $e = 0.0204$	10.53	8.86	8.65
1h $a_2 = 0.3334$	12.79	10.73	10.53

Tabela 3

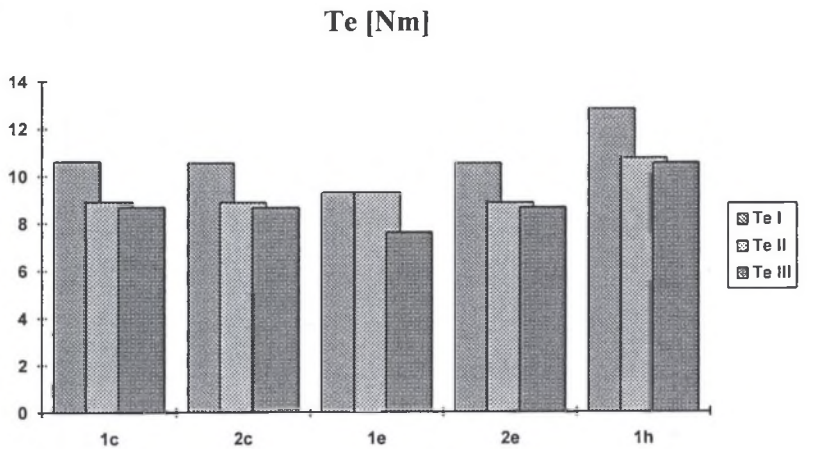
Moment permeancyjny (w procentach)

$\frac{T_{e,Fe}}{T_e}$ [%]	wirnik anizotropowy $\nu_r < \nu_\alpha$ $(T_{e,Fe}/T_e)_I$	wirnik izotropowy $\nu_r = \nu_\alpha$ $(T_{e,Fe}/T_e)_{II}$	wirnik anizotropowy $\nu_r > \nu_\alpha$ $(T_{e,Fe}/T_e)_{III}$
1c	0,0	0,0	0,0
2c	- 4,6	- 3,8	- 3,9
1e	- 18,8	- 18,8	- 15,9
2e	- 4,6	- 3,8	- 4,0
1h	- 5,2	- 4,4	- 4,5

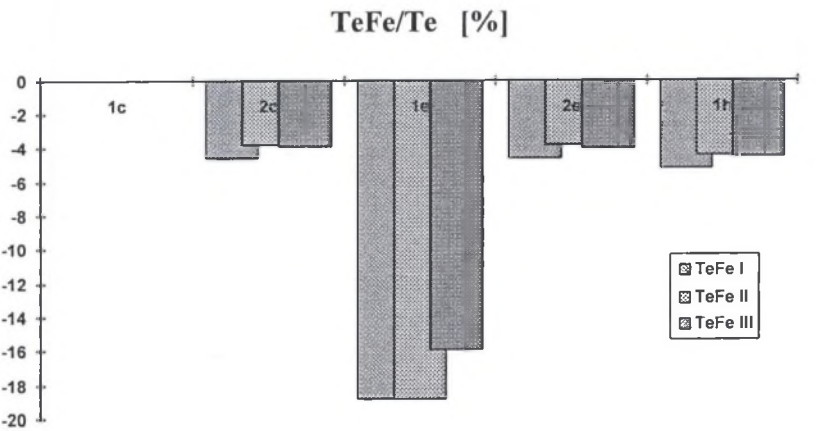
Tabela 4

Straty mocy w wirniku maszyny

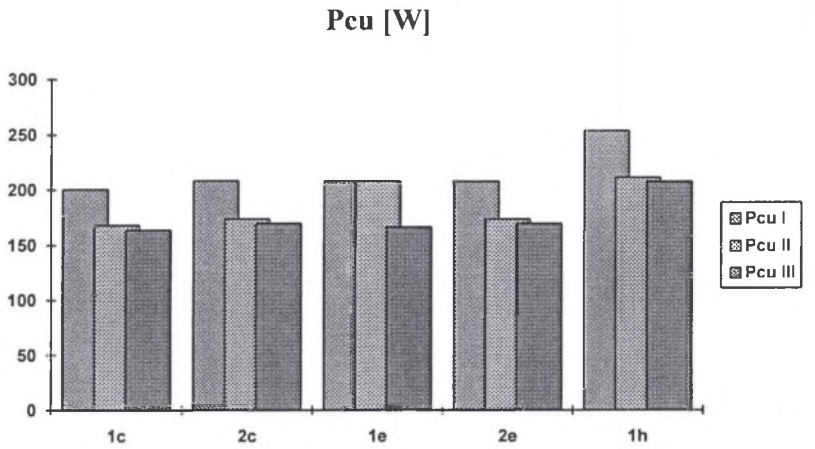
P_{cu} [W]	wirnik anizotropowy $\nu_r < \nu_\alpha$	wirnik izotropowy $\nu_r = \nu_\alpha$	wirnik anizotropowy $\nu_r > \nu_\alpha$
1c	200.2	167.9	163.6
2c	208.1	173.7	169.6
1e	208.0	208.0	166.3
2e	207.6	173.4	169.6
1h	253.6	211.2	207.4



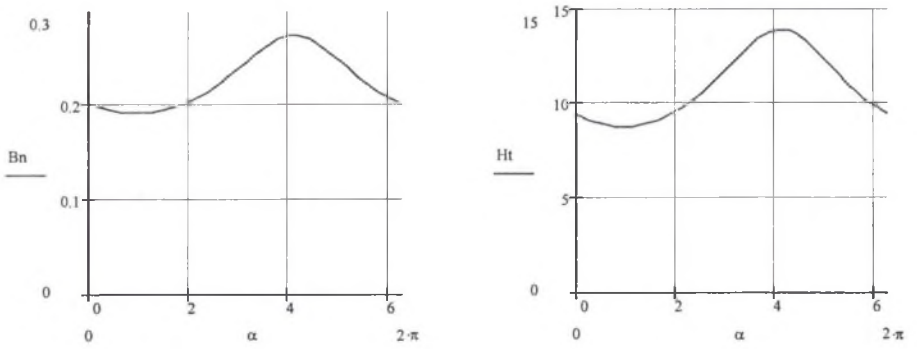
Rys. 4. Wartości momentu całkowitego - porównanie
Fig. 4. The total electromagnetic torque - the comparison



Rys. 5. Porównanie wartości momentu permeancyjnego
Fig. 5. The permeantive torque - the comparison

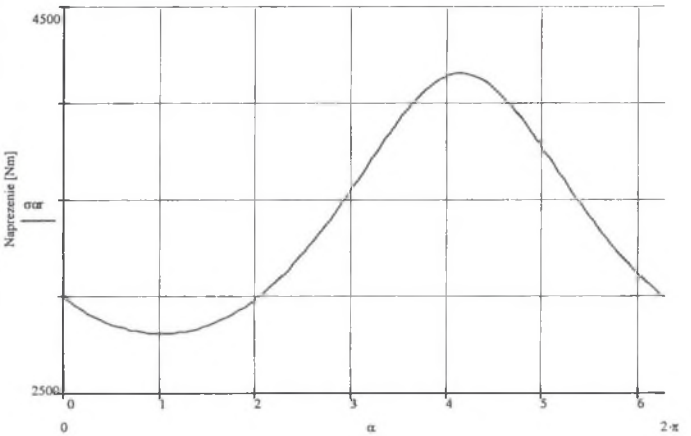


Rys. 6. Porównanie wartości strat mocy
Fig. 6. The eddy-current losses - the comparison

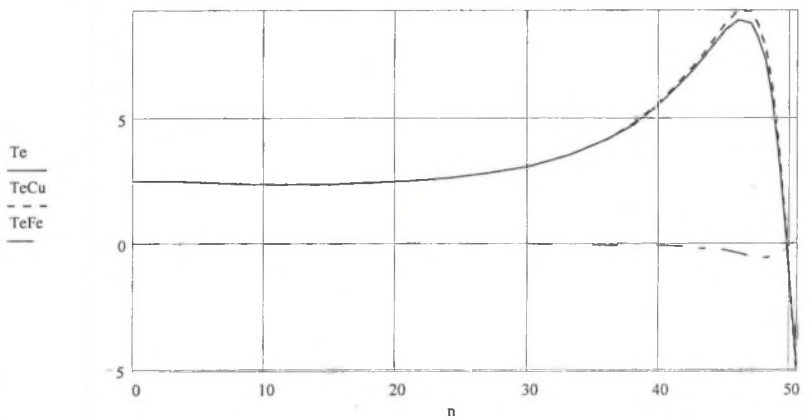


a) b)

Rys. 7. Amplitudy a) składowej normalnej indukcji [T], b) składowej stycznej natężenia pola magnetycznego [kA/m] do powierzchni wirnika w funkcji kąta α [rad]
Fig. 7. The magnitude of a) the normal magnetic flux density [T], b) the tangential magnetic field strength [kA/m] versus position angle α [rad]



Rys. 8. Zmienność tensora naprężeń $\sigma_{\alpha r}$ w szczelinie powietrznej maszyny o ekscentrycznym wirniku względem kąta położenia na obwodzie wirnika (w jednostkach układu SI)
Fig. 8. The tensor radial component $\sigma_{\alpha r}$ versus position angle in the air-gap (SI units)



Rys. 9. Moment elektromagnetyczny i jego składniki: moment Lorentza i moment permeancyjny [Nm] w funkcji prędkości obrotowej n [obr/s] w przypadku 2c
Fig. 9. The total electromagnetic torque and its components: the currents torque and permeantive torque [Nm] versus speed n [rps] for the case 2c

5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone obliczenia analityczne pozwalają na ocenę wartości niepożądanego momentu permeancyjnego maszyny indukcyjnej powstającego wskutek niecylindrycznego ukształtowania wirnika bądź jego ekscentryczności. Porównanie otrzymanych rezultatów - dla

różnych przypadków niesymetrii (przypadki 1e, 2e, 1c, 2c, 1h) - pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków:

1) Moment permeancyjny maszyny indukcyjnej o przewodzącym, litym wirniku przeciwdziała momentowi od sił Lorentza. Jakkolwiek, fakt ten nie musi prowadzić do zmniejszenia całkowitego momentu maszyny (przypadek 1h), to zawsze prowadzi do wzrostu strat mocy w wirniku maszyny (tabela 4., rys.6). Należy podkreślić, iż w maszynie synchronicznej [12] moment permeancyjny współdziała z momentem sił Lorentza.
2) Prezentowana metoda określania momentu elektromagnetycznego i jego składowych wymaga przeprowadzania całkowania tylko po brzegu obszaru obejmującego wirnik maszyny o wirniku jednorodnym. Mianowicie, obliczane wartości momentu permeancyjnego (wyrażające się poprzez całkę powierzchniową (16)) prowadzą do wartości momentu sił Lorentza $T_{e,Cu} = T_e - T_{e,Fe}$, który tylko celem potwierdzenia poprawności obliczeń był obliczany przy wykorzystaniu całki objętościowej (18).
3) Bazując na otrzymanych wynikach obliczeń, można stwierdzić, iż największy moment permeancyjny pojawia się w przypadku, gdy wirnik jest eliptyczny i centralnie ułożony (1e).
4) Anizotropia właściwości magnetycznych - przy danej niesymetrii wirnika - prowadzi do wzrostu momentu permeancyjnego, gdy $\nu_r < \nu_\alpha$.
5) Przedstawiona metoda analizy może zostać dołączona do listy metod prowadzących do określania niepożądanego składnika momentu sił maszyny indukcyjnej.
6) Moment permeancyjny pozwala na wyznaczenie strat mocy w litym wirniku maszyny indukcyjnej poprzez całki powierzchniowe wartości odpowiednich składowych pola magnetycznego po brzegu obszaru obejmującego wirnik.

LITERATURA

1. Coulomb J.L.: A methodology for determination of global electromechanical quantities from a finite elements analysis and its application to the evaluation of magnetics forces, torques and stiffness. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 19, No.6, pp.2514-2519, 1983.
2. Demenko A.: Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.32, No.3, pp.1553-1556, 1996.
3. Demenko A.: Symulacja dynamicznych stanów pracy maszyn elektrycznych w ujęciu polowym. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
4. Di Barba P., Savini A., Wiak S.: 2-D Numerical simulation of electrostatic micromotor torque. 2-nd International Conference on Computation in Electromagnetics, Nottingham, UK, 1994.
5. Gradsztejn I.S., Ryżyk I.M.: Tablicy integrałow, sum, rjadow i proizwjedjenij. Moskwa 1962.
6. Hammond AS., Sykulski J.K.: Engineering Electromagnetism Physical Processes and Computation. Oxford Science Publications, 1993.
7. Janta T.: Dielektromagnetyki Fe-Cu i możliwość ich zastosowanie na magnetowód wirnika silnika indukcyjnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Ślaskiej Elektryka 176, ss. 145-152, XXXVII SME, Gliwice-Ustroń 2001.
8. Ratnajeevan S., Hoole H.: Finite elements, electromagnetics and design. Elsevier 1995.

9. Ren Z., Besbes M., Boukhtache S.: Calculation of local force in magnetized materials. Proceedings of International Workshop on Electric and Magnetic fields from Numerical Models to Industrial Applications, 1992, pp. 641-646.
10. Spałek D.: Evaluation of permeantive component of electromagnetic torque in electrical machine. 8th ISTET'95 International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Proc. pp.140-143, Thessaloniki Greece, 1995.
11. Spałek D.: Moment reluktancyjny a permeancyjny - definicje oraz różnice. ZN Pol.Śl., Elektryka, nr 149, Gliwice 1996, ss.137-149.
12. Spałek D.: Electromagnetic torque components in synchronous salient-pole machine. COMPEL - The International Journal for Computation & Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, Voł. 16, Issue 3, pp.129-143, MCB UK, 1997.
13. Zakrzewski K.: Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących. Zeszyty Naukowe Elektryka nr 38, Łódź 1972.

Dodatek 1. Wyznaczenie stałych występujących w równaniach (5) i (6)

Wartości stałych pojawiających się w rozwiązaniach określa się formułując warunki brzegowe dla granicy:

- uzwojenia stojana ułożonego na ferromagnetycznym stojanie i szczeliny powietrznej ($r = R + g = R_g$):

$$\nu_o B_{\delta\alpha} = -\frac{1}{R_g}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} \quad \rightarrow \quad a_\delta R_g^p - b_\delta R_g^{-p} = \Theta / \nu_o . \tag{D.1.1}$$

- szczeliny powietrznej i przewodzącej warstwy wirnika ($r = R$):

$$\mathbf{B}_{\delta n} = \mathbf{B}_{an} = \mathbf{B}_n \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{\delta r}\cos(\delta) - \mathbf{B}_{\delta\alpha}\sin(\delta) = \mathbf{B}_{ar}\cos(\delta) - \mathbf{B}_{a\alpha}\sin(\delta) \tag{D.1.2}$$

$$\mathbf{H}_{\delta n} = \mathbf{H}_{an} = \mathbf{H}_t \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{H}_t = \nu_o \mathbf{B}_{\delta r}\sin(\delta) + \nu_o \mathbf{B}_{\delta\alpha}\cos(\delta) = \nu_r \mathbf{B}_{ar}\sin(\delta) + \nu_\alpha \mathbf{B}_{a\alpha}\cos(\delta) \tag{D.1.3}$$

- warstwy przewodzącej wirnika i ferromagnetycznego rdzenia wirnika: ($r = R - a = R_a < r(\alpha)$ dla $\alpha \in [0, 2\pi]$)

$$\nu_{\alpha\alpha}\mathbf{B}_{a\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad a_a I'_{pB}(\beta R_a) + b_a K'_{pB}(\beta R_a) = 0 \tag{D.1.4}$$

Powyższe równania (D.1.1) – (D.1.4) określają stałe pojawiające się w rozwiązaniach (5) i (6):

$$a_a(\alpha) = \Theta\nu_o^{-1}\{U(\alpha)R_g^p - W(\alpha)R_g^{-p}\}^{-1}, \qquad S = -\frac{I'_{pB}(\beta R_a)}{K'_{pB}(\beta R_a)}, \qquad \delta(\alpha) = \arctan\left(\frac{dr(\alpha)}{r(\alpha)}\right)$$

$$a_\delta = a_a U(\alpha), \qquad b_\delta = a_a W(\alpha), \qquad b_a = -a_a S,$$

$$U(\alpha)=\frac{\mathbf{B}_{na}Dd(\delta(\alpha),r(\alpha))-\mathbf{H}_{ta}Bb(\delta(\alpha),r(\alpha))}{A(\delta(\alpha),r(\alpha))Dd(\delta(\alpha),r(\alpha))-Bb(\delta(\alpha),r(\alpha))C(\delta(\alpha),r(\alpha))},$$

$$W(\alpha)=\frac{\mathbf{H}_{ta}A(\delta(\alpha),r(\alpha))-\mathbf{B}_{na}C(\delta(\alpha),r(\alpha))}{A(\delta(\alpha),r(\alpha))Dd(\delta(\alpha),r(\alpha))-Bb(\delta(\alpha),r(\alpha))C(\delta(\alpha),r(\alpha))},$$

$$A(\delta,r)=-ipr^{p-1}\cos(\delta)+pr^{p-1}\sin(\delta),\qquad Bb(\delta,r)=-ipr^{-p-1}\cos(\delta)-pr^{-p-1}\sin(\delta),$$

$$C(\delta,r)=-ip\nu_{r\delta}r^{p-1}\sin(\delta)-p\nu_{\alpha\delta}r^{p-1}\cos(\delta),\ Dd(\delta,r)=-ip\nu_{r\delta}r^{-p-1}\sin(\delta)+p\nu_{\alpha\delta}r^{-p-1}\cos(\delta),$$

$$\mathbf{B}_{na}(\alpha)=\frac{-pi}{r(\alpha)}F(r)\cos(\delta)+\beta dF(r)\sin(\delta),\ \mathbf{H}_{na}(\alpha)=-\frac{\nu_r pi}{r(\alpha)}F(r)\sin(\delta)-\nu_\alpha\beta dF(r)\cos(\delta),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono:

$$F(r)=I_{pB}(\beta r)-SK_{pB}(\beta r)\qquad dF(r)=I'_{pB}(\beta r)-SK'_{pB}(\beta r),$$

$$D(\alpha,r)=a_\delta(\alpha)r^p+b_\delta(\alpha)r^{-p},\qquad Z(\alpha,\beta r)=a_a(\alpha)I_{pB}(\beta r)+b_a(\alpha)K_{pB}(\beta r),$$

$$dD(\alpha,r)=a_\delta(\alpha)r^{p-1}-b_\delta(\alpha)r^{-p-1},\quad dZ(\alpha,\beta r)=a_a(\alpha)I'_{pB}(\beta r)+b_a(\alpha)K'_{pB}(\beta r),$$

$$\mathbf{B}_{na}=\mathbf{B}_n a_a^{-1},\qquad \mathbf{H}_{ta}=\mathbf{H}_t a_a^{-1}.$$

Dodatek 2. Obliczenie całek pomocniczych występujących w zależności (16)

Składowe indukcji pola magnetycznego jako opisane zależnościami:

$$B_r=\frac{cB_n y+sH_t}{\Delta(x,y)},\qquad B_\alpha=\frac{cH_t-sB_n x}{\Delta(x,y)},\tag{D.2.1}$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono: $c=\cos(\delta)$, $s=\sin(\delta)$, $x=\nu_r$, $y=\nu_\alpha$, $\Delta=\Delta(x,y)=s^2x+c^2y$, pozwalają zapisać warunek (15) następująco:

$$B_r\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{cB_n y+sH_t}{\Delta(x,y)}\}=B_\alpha\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{cH_t-sB_n x}{\Delta(x,y)}\}.\tag{D.2.2}$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych otrzymuje się równość:

$$(cB_n\nu_\alpha+sH_t)\{cB_n\Delta-(cB_n\nu_\alpha+sH_t)c^2\}=$$

$$=(cH_t-sB_n\nu_r)\{-sB_n\Delta-(cH_t-sB_n\nu_r)s^2\},\tag{D.2.3}$$

która jest spełniona tożsamościowo dla dowolnych wartości H_t, B_n, ν_r, ν_α.

Spełnienie warunku (15) pozwala stwierdzić, iż całka (13) nie zależy od kształtu drogi, która łączy punkt początkowy (ν_r, ν_α) i końcowy $(\nu_{r\delta}, \nu_{\alpha\delta})$ drogi całkowania w całce:

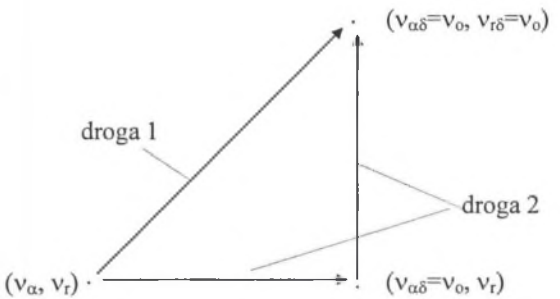
$$I=\int_{(\nu r,\nu\alpha)}^{(\nu r\delta,\nu\alpha\delta)}(B_r^2 d\nu_r+B_\alpha^2 d\nu_\alpha)=\int_{(\nu r,\nu\alpha)}^{(\nu r\delta,\nu\alpha\delta)}dF(\nu_r,\nu_\alpha).\tag{D.2.4}$$

Wartości całek składowych:

$$I_1 = \int_{(\nu_r,\nu_\alpha)}^{(\nu_{r\delta},\nu_\alpha)} B_r^2 d\nu_r , \qquad I_2 = \int_{(\nu_{r\delta},\nu_\alpha)}^{(\nu_{r\delta},\nu_{\alpha\delta})} B_\alpha^2 d\nu_\alpha . \tag{D.2.5}$$

wynoszą [3]:

$$I_1 = -\frac{(cB_n y + sH_t)^2}{s^2(s^2 x + c^2 y)}\Bigg|_{(\nu_r,\nu_\alpha)}^{(\nu_{r\delta},\nu_\alpha)} , \qquad I_2 = -\frac{(cH_t - sB_n x)^2}{c^2(s^2 x + c^2 y)}\Bigg|_{(\nu_{r\delta},\nu_\alpha)}^{(\nu_{r\delta},\nu_{\alpha\delta})} . \tag{D.2.6}$$



Rys. D.2.1. Drogi na płaszczyźnie (ν_α, ν_r) wykorzystywane do obliczenia momentu permeancyjnego
Fig. D.2.1. The paths in the (ν_α, ν_r) co-ordinate system the for the permeantive torque calculation

Droga 2, która z punktu widzenia obliczeń jest korzystniejsza od drogi 1 (rys.3), pozwala określić całkę (D2.4) następująco:

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha), \tag{D.2.7}$$

gdzie:

$$I_1(\alpha) = \{\frac{1}{\nu_r \sin^2(\delta) + \nu_\alpha \cos^2(\delta)} - \frac{1}{\nu_{r\delta} \sin^2(\delta) + \nu_\alpha \cos^2(\delta)}\}\{\nu_\alpha \operatorname{ctg}(\delta) B_n(\alpha) + H_t(\alpha)\}^2, \tag{D.2.8}$$

$$I_2(\alpha) = \{\frac{1}{\nu_{r\delta} \sin^2(\delta) + \nu_\alpha \cos^2(\delta)} - \frac{1}{\nu_{r\delta} \sin^2(\delta) + \nu_{\alpha\delta} \cos^2(\delta)}\}\{H_t(\alpha) - \nu_{r\delta} \operatorname{tg}(\delta) B_n(\alpha)\}^2. \tag{D.2.9}$$

W szczególnym przypadku, gdy maszyna asynchroniczna jest izotropowa $\nu_r=\nu_\alpha=\nu$, $\nu_{r\delta}=\nu_{\alpha\delta}=\nu_o$, to równości (D.2.8), (D.2.9) przyjmują postać:

$$I_1(\alpha) = \{\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_o \sin^2(\delta) + \nu \cos^2(\delta)}\}\{\nu \operatorname{ctg}(\delta) B_n(\alpha) + H_t(\alpha)\}^2, \tag{D.2.10}$$

$$I_2(\alpha) = \{\frac{1}{\nu_o \sin^2(\delta) + \nu \cos^2(\delta)} - \frac{1}{\nu_o}\}\{H_t(\alpha) - \nu_o \operatorname{tg}(\delta) B_n(\alpha)\}^2, \tag{D.2.11}$$

a zatem

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha) = \frac{\nu_o - \nu}{\nu_o \nu} H_t(\alpha)^2 + (\nu_o - \nu) B_n(\alpha)^2 . \tag{D.2.12}$$

Jeżeli wirnik maszyny asynchronicznej stanowi idealny pod względem magnetycznym ferromagnetyk $\nu_r = \nu_\alpha = \nu \to 0$, to:

$$I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha) = \nu_o B_n(\alpha)^2 . \tag{D.2.13}$$

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 maja 2002 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Marian Łukaniszyn, prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

This paper dealts with application of the definition of a permeantive torque acting in magnetic regions which is the component of the (total) electromagnetic torque. For the chosen induction machines with solid, asymmetical and eccentrically rotating rotors the permeantive and total torques have been evaluated. The permeantive torque determines the opposite components of electromagnetic torque arising due to asymmetry of a machine rotor. The main torque component results from Lorentz forces. Hence, this torque is called Lorentz torque. The components of the prermeantive and Lorentz torques together give the (total) electromagnetic torque.

The electromagnetic filed layout has been obtained in analytical way. Thus, the total electromagnetic torque and its components, permeantive and Lorentz torques, have been determined in the analytical namely: way as well.