

Jolanta DŹWIERZYŃSKA, Bogusław JANUSZEWSKI

Politechnika Rzeszowska  
Zakład Geometrii i Grafiki Inżynierskiej

## O PEWNEJ MODYFIKACJI I UOGÓLNIENIACH WYKREŚLNEGO ODWZOROWANIA PERSPEKTYWICZNEGO PRZESTRZENI $E_3$ NA OBROTOWEJ POWIERZCHNI WALCOWEJ

**Streszczenie.** W opracowaniu przedstawiono właściwości aparatów odwzorowania oraz zasad zapisów graficznych na rozwinięciach tła panoram walcowych przy pewnych modyfikacjach typowych aparatów odwzorowań. Wprowadzone modyfikacje upraszczają zapisy wybranych relacji miarowych lub dają lepsze przybliżenia uzyskiwanych zapisów do realiów wzrokowego postrzegania panoram.

## A MODIFICATION AND GENERALIZATIONS OF THE GRAPHIC, PERSPECTIVE REPRESENTATION OF $E_3$ SPACE ON THE ROTARY CYLINDER SURFACE

**Summary.** In the paper the properties of the representation apparatuses and the rules of the graphical drawings on the development of a background of the modified cylinder panorams are presented. Introduced modifications simplify the mapping of the selected measuring relationships or enable better approximation of obtained drawings to realities of perceiving cylinder panorams.

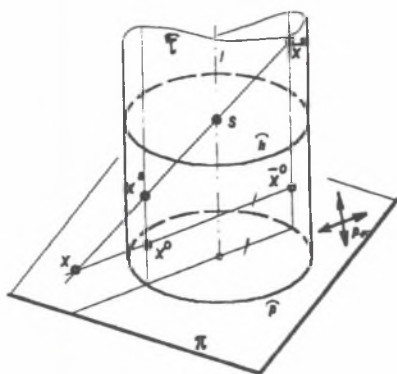
W pracy [1] zasygnalizowano różne możliwości modyfikacji aparatu odwzorowania przestrzeni  $E_3$  za pomocą perspektywy pionowej. Jedną z tych modyfikacji prowadzi do utworzenia aparatu odwzorowania tzw. perspektywy poziomej, tzn. perspektywy, w której pomocniczym rzutowaniem jest rzutowanie prostokątne na tło. Z kolei w artykule [2] omówiono zasady odwzorowania przestrzeni  $E_3$  metodą perspektywy pionowej, przy założeniu że tłem w tej perspektywie jest obrotowa powierzchnia walcowa.

Korzystając z ustaleń zawartych w [1] i [2] określono w niniejszym opracowaniu podstawowe założenia:

1<sup>o</sup> metody perspektywy poziomej, w której tłem jest obrotowa powierzchnia walcowa (rys.1),

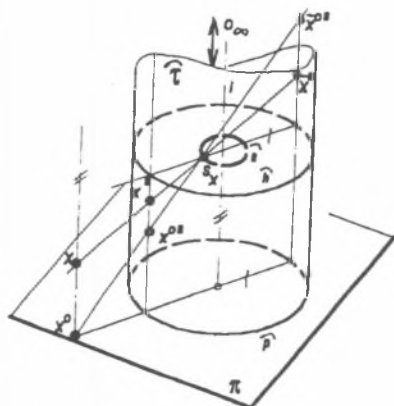
2° uogólnionej metody perspektywy pionowej, będącej odwzorowaniem na obrotową powierzchnię walcową, realizowanym z zastosowaniem głównego rzutowania w postaci prostoliniowego rzutowania wiązkoidealnego o bazie złożonej z osi  $l$  tła i okręgu  $\bar{s}$  (rys. 2),

3° uogólnionej metody perspektywy poziomej, jako odwzorowania na obrotową powierzchnię walcową, w którym oba stosowane w tym odwzorowaniu rzutowania na tła są prostoliniowe wiązkoidealne, a główne z nich mają bazę złożoną z osi  $l$  tła i okręgu  $\bar{s}$  (rys. 3).



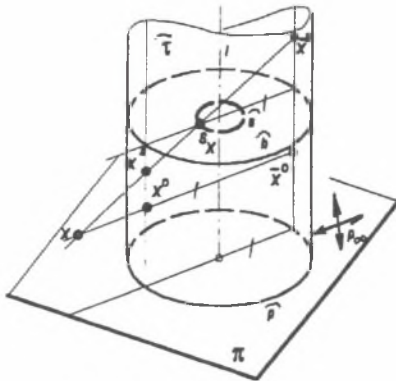
$R_S$  – rzutowanie zasadnicze,  
 aparat rzutowania zasadniczego:  
 rzutnia  $\bar{\tau}$ , środek rzutowania  $S$   
 $X \in E_3 \Rightarrow R_S(X) = X^S \cup \bar{x}^S$ ,  
 gdzie  $X^S$  – rzut zasadniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^S$  – rzut zasadniczy oboczny  
 $R_O$  – rzutowanie pomocnicze,  
 aparat rzutowania pomocniczego:  
 rzutnia  $\bar{\tau}$ , środek - baza rzutowania ( $l \cup p_x$ )  
 $X \in E_3 \Rightarrow R_O(X) = X^O \cup \bar{x}^O$ ,  
 gdzie  $X^O$  – rzut pomocniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^O$  – rzut pomocniczy oboczny

Rys. 1. Aparat odwzorowania perspektywy poziomej  
 Fig. 1. Representation apparatus of horizontal perspective



$R_S$  – rzutowanie zasadnicze,  
 aparat rzutowania zasadniczego:  
 rzutnia  $\bar{\tau}$ , środek-baza rzutowania ( $l \cup \bar{s}$ )  
 $X \in E_3 \Rightarrow R_S(X) = X^S \cup \bar{x}^S$ ,  
 gdzie  $X^S$  – rzut zasadniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^S$  – rzut zasadniczy oboczny  
 $R_O$  – rzutowanie pomocnicze,  
 aparat rzutowania pomocniczego:  
 rzutnia  $\pi$ , środek rzutowania  $O_x$   
 $X \in E_3 \Rightarrow R_O(X) = X^O, R_S(X^O) = X^{OS} \cup \bar{x}^{OS}$ ,  
 gdzie  $X^{OS}$  – wtórny rzut pomocniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^{OS}$  – wtórny rzut pomocniczy oboczny

Rys. 2. Aparat odwzorowania uogólnionej perspektywy pionowej  
 Fig. 2. Representation apparatus of generalized vertical perspective



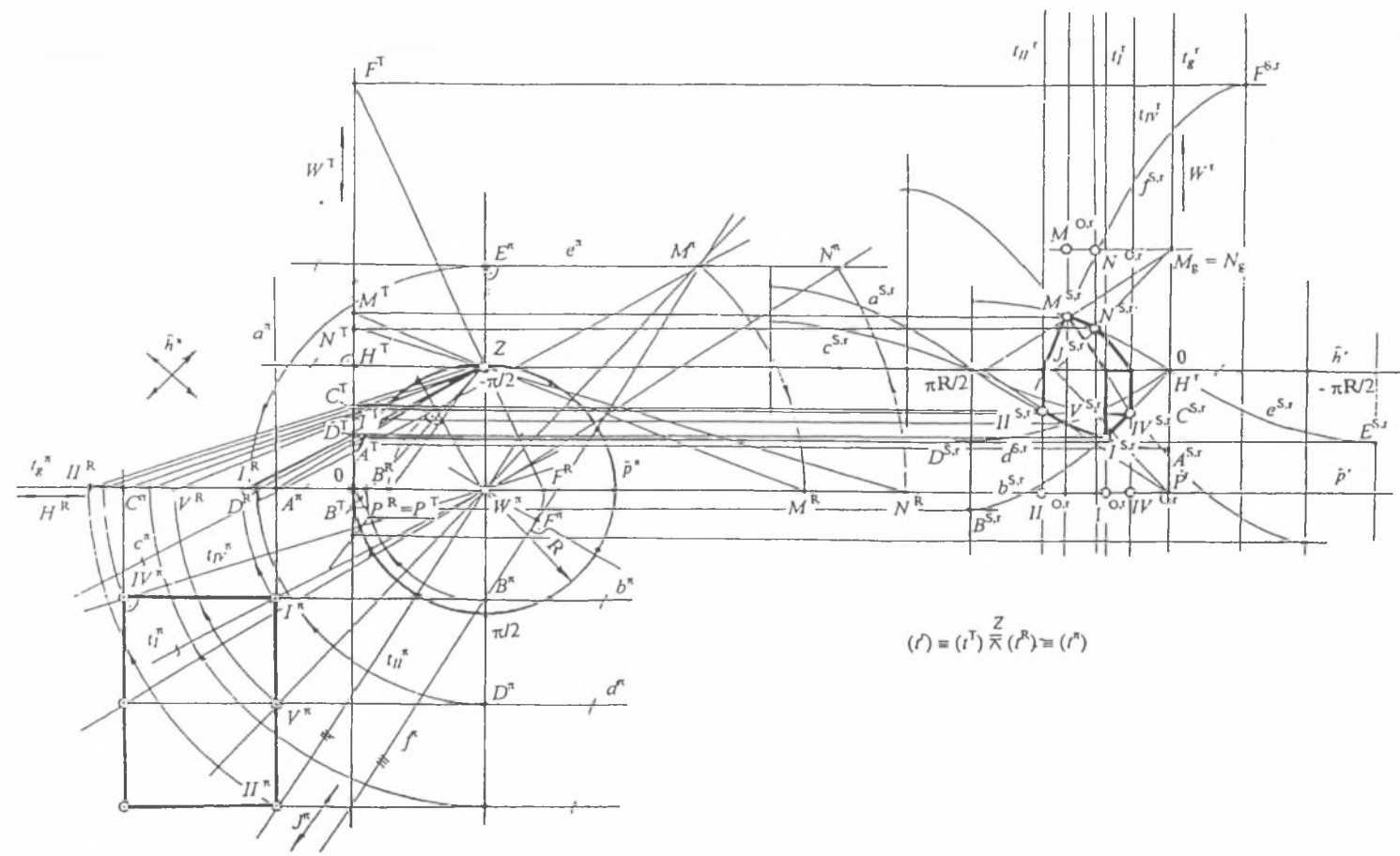
$R_S$  – rzutowanie zasadnicze,  
 aparat rzutowania zasadniczego:  
 rzutnia  $\bar{\tau}$ , środek-baza rzutowania ( $l \cup \bar{s}$ )  
 $X \in E_3 \Rightarrow R_S(X) = X^S \cup \bar{x}^S$ ,  
 gdzie  $X^S$  – rzut zasadniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^S$  – rzut zasadniczy oboczny  
 $R_O$  – rzutowanie pomocnicze,  
 aparat rzutowania pomocniczego:  
 rzutnia  $\bar{\tau}$ , środek -baza rzutowania ( $l \cup p_w$ )  
 $X \in E_3 \Rightarrow R_O(X) = X^O \cup \bar{x}^O$ ,  
 gdzie  $X^O$  – rzut pomocniczy główny,  
 zaś  $\bar{x}^O$  – rzut pomocniczy oboczny

Rys. 3. Aparat odwzorowania uogólnionej perspektywy poziomej  
 Fig. 3. Representation apparatus of generalized horizontal perspective

Odwzorowania sygnalizowane pod 2° i 3° dają możliwość lepszego przybliżenia uzyskanych za ich pomocą obrazów do realiów postrzegania panoram walcowych. Efekty graficzne wszystkich omawianych odwzorowań kreśli się bezpośrednio na rozwinięciu tła przy wykorzystaniu pomocniczego przekształcenia  $\Pi$  zaproponowanego w [3]. Przekształcenie  $\Pi$  jest tutaj rzutowaniem ze środka  $S$  (lub  $S_X \in \bar{s}$ ) na podstawie  $\pi$  zbiorów punktów leżących w tworzących tła i zawierających rzuty główne i pomocnicze poszczególnych punktów odwzorowywanych figur. Przykład efektywnego zastosowania tego rodzaju przekształcenia podano na rysunku 4, na którym wykreślono na rozwinięciu tła perspektywę poziomą bryły płaskościennej, przy założeniu że tło jest obrotową powierzchnią walcową  $\bar{\tau}$  o osi przechodzącej przez środek  $S$  rzutowania głównego.

Już pobieżna obserwacja konstrukcji wykreślanych na rysunku 4 prowadzi do wniosku, że klasyczny zapis graficzny efektów omawianych w niniejszym opracowaniu odwzorowań jest bardzo pracochłonny. Stąd praktyczną realizację tych zapisów otrzymuje się przy odpowiednim wspomaganium komputerowym. Przykładowo, na rysunku 5 pokazano opis procedury obliczeniowej (rys.5a) opartej na programie MathCAD 5.0, prowadzącej do graficznego zapisu w uogólnionej perspektywie pionowej (rys.2) obrazów punktów rozmieszczonych w określonych odległościach poziomych i pionowych, oraz obrazów wyznaczanych przez te punkty odcinków prostych: poziomej  $d$  i ogólnej  $e$  (rys.5).

Analogiczną procedurę daje się ustalić dla odwzorowania realizowanego za pomocą uogólnionej perspektywy poziomej (rys.3).



Figs. 4. Przykład zapisu w rozwinięciu tła będącego obrotową powierzchnią walcową tzw. perspektywy poziomej bryły płaskościennnej  
 Fig. 4. The example of the graphical drawing on the development of a background being rotary cylinder surface so called the horizontal perspective of the solid

a)  
Opis procedury

Dane:

$R := 10, r := 5, z_s = 15$  - dane charakteryzujące aparat rzutowania

$t_a := 5, t_b := 15, z_{osa} := 1, z_{osb} := 6, z_{sa} := 1, z_{sb} := 6$  - współrzędne punktów  $A$  i  $B$  w rozwinięciu

$a := 11, b := 4$  - miary wektorów  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  wzdłuż osi  $z$ .

1. Obliczenie współrzędnych promieniowych i kątowych punktów  $A$  i  $B$

$$r_a := \frac{z_{osa}}{z_s - z_{osa}} \cdot (R - r) + R$$

$$r_b := \frac{z_{osb}}{z_s - z_{osb}} \cdot (R - r) + R$$

$$\phi_a := \frac{t_a}{R \cdot 180} \cdot \pi$$

$$\phi_b := \frac{t_b}{R \cdot 180} \cdot \pi$$

2. Określenie współrzędnych promieniowej, kątowej i pionowej w funkcji długości łuku  $l$  dla dowolnego punktu  $X$  należącego do prostej  $CD$

$$\delta := \operatorname{atan} \left( \frac{r_a \cdot \cos(\phi_a) - r_b \cdot \cos(\phi_b)}{r_b \cdot \sin(\phi_b) - r_a \cdot \sin(\phi_a)} \right)$$

$$r_d := r_a \cdot \cos(\phi_a - \delta)$$

$$\phi_X(t) := \frac{t}{R \cdot 180} \cdot \pi$$

$$r_X(t) := \frac{r_d}{\cos(\phi_X(t) - \delta)}$$

$$z_d := b \quad z_c := a$$

$$z_X(t) = z_c + (z_d - z_c) \cdot \frac{\sqrt{r_a^2 + r_X(t)^2 - 2r_a \cdot r_X(t) \cdot \cos(\phi_X(t) - \phi_a)}}{\sqrt{r_a^2 + r_b^2 - 2r_a \cdot r_b \cdot \cos(\phi_b - \phi_a)}}$$

3. Wyznaczenie wzorów funkcji określających zapis prostej  $AB$  i  $CD$  w rozwinięciu tła

$$z_{sx}(t) := (z_s - z_X(t)) \cdot \frac{r_X(t) - R}{r_X(t) - r} + z_X(t)$$

$$z_{osx}(t) := z_s \cdot \frac{r_X(t) - R}{r_X(t) - r}$$

$$t = 5, 5.01.. 15$$

4. Obliczenie odległości w poziomie punktów  $A$  i  $B$

$$d_{AB} = d_b - d_a$$

zatem

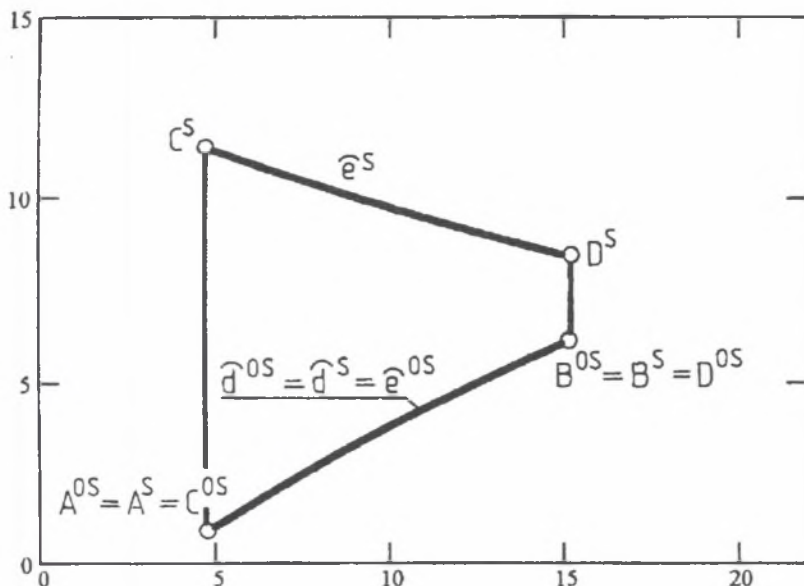
$$d_{AB} := \frac{\sin(\phi_b) \cdot r_b - \sin(\phi_a) \cdot r_a}{\cos(\delta)} \quad d_{AB} = 2.983$$

5. Obliczenie  $s$ -tych współrzędnych w rozwinięciu punktów  $C$  i  $D$

$$z_{sc} = z_{sx}(5) \quad z_{sx}(5) = 11.267 \quad z_{sd} = z_{sx}(15) \quad z_{sx}(15) = 8.4.$$

b)

## Efekt działania



Rys. 5. Opis procedury prowadzącej do wykreślenia na rozwinięciu panoramy walcowej obrazów prostych i przykład efektu działania tej procedury

Fig. 5. The description and the result of the procedure, which leads to drawing the straight images on the development of the cylinder panorama

## Literatura

1. Januszewski B., Dźwierzyńska J.: Odwzorowanie częściowo złożeniowe z trójwymiarowej przestrzeni rzutowej na płaszczyznę .... ZN Politechniki Rzeszowskiej „Budownictwo i Inżynieria Środowiska”.
2. Dźwierzyńska J.: O pewnym odwzorowaniu na powierzchni walcowej obrotowej. Seminarium „Geometria i Grafika”, Wisła 2000.
3. Polański S.: O niektórych własnościach rozwinięć powierzchni wiązkowych obrotowych. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Rzeszowskiej. Rozprawy nr 13.

## Abstract

In [1] different possibilities of transforming representation apparatus of  $E_3$  space by means of vertical perspective has been indicated. One of these modifications has led to forming the representation apparatus of so-called vertical perspective. Next in [2] the rules of  $E_3$  space representation in vertical perspective method are discussed, assuming that rotary cylinder space is a background in this perspective.

In the present paper the fundamental principles :

1° of **the horizontal perspective method**, where the rotary cylinder surface is taken as a background (fig. 1),

2° of **the generalized vertical perspective method** which is a representation on rotary cylinder surface, where main projection is a straight-line hyper-bundle projection with the base composed from  $l$  axis of background and  $\bar{s}$  circle (fig. 2),

3° of **the generalized the horizontal perspective method** which is a representation on rotary cylinder surface, where both of used here projections are straight-line and hyper-bundle and main of them has a base composed from  $l$  axis of background and  $\bar{s}$  circle (fig. 3) are presented.

Representations indicated in 2° and 3° enable better approximation of drawings obtained by means of them to realities of perceiving cylinder panoramas. Graphical effects of all of the discussed representations are drawn directly on the development of the background availing of auxiliary transformation, which has been suggested in [3]. Classical constructions of graphical effects of discussed representations are very laborious. So practical realization of these mappings is proposed with computer aiding supported of MathCAD 5.0 program.