

Jarosław Z. MIRSKI

Katedra Architektury i Ochrony Budowli Zabytkowych  
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

## TRZY WARIANTY STRUKTUR SFERYCZNYCH - OTRZYMANE METODĄ STEREOGRAFICZNĄ

**Streszczenie.** Na wzór topologicznego kształtowania klasycznych kratownic, których węzły leżą na płaszczyznach, metodą rzutu stereograficznego utworzono w trzech alternatywach siatki jedno- i dwuwarstwowe, sferycznych struktur prętowych. Dla automatycznego obliczania współrzędnych prostokątnych węzłów podano wzór ogólny. Dla poszczególnych wariantów struktur prętowych sformułowano też wzory dla automatycznego obliczania liczby grup prętów różnych pod względem długości.

## THREE ALTERNATIVE DESIGNS OF SPHERICAL STRUCTURES OBTAINED BY APPLYING THE STEREOGRAPHICAL METHOD

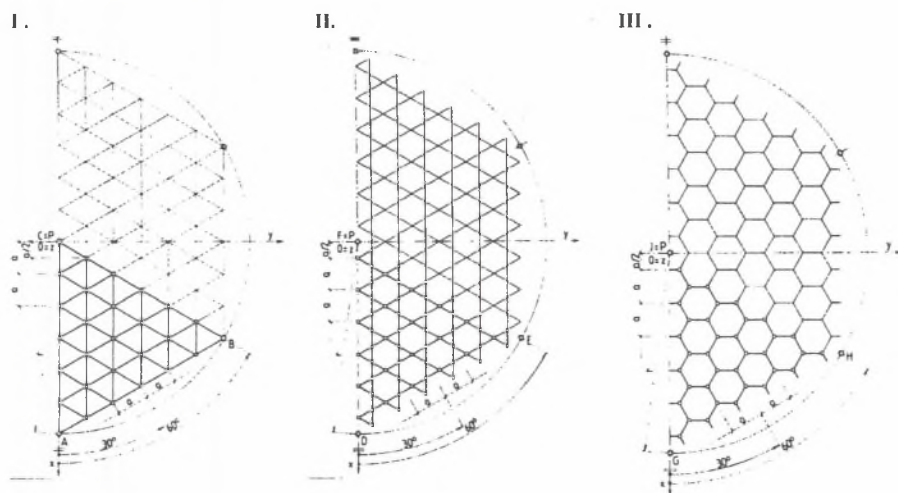
**Summary.** Like in the topological forming of classic trusses with joints lying on planes, the stereographic projection method was used to prepare three alternative designs of one- and two-layer spherical bar structures. Each of them was matched with a formula to enable automatic calculations of spherical co-ordinates. The Trusses were characterised according to the number of groups of various bars.

### 1. WSTĘP

Uwzględniając fakt, że zapotrzebowanie na energię cieplną w budynku zależy od jego kształtu, infiltracji i nasłonecznienia, piśmiennictwo z dziedziny ciepłownictwa i fizyki budowli [np.1,2] wyróżnia tu bryły zwarte, zbliżone do kuli i niskie walce. Forma budynku o rzucie sześciokąta foremnego, przypominająca element geometryczny w budowie plastra pszczoł, również zapewnia energooszczędność, a także materiałoszczędność. W pracy proponuje się

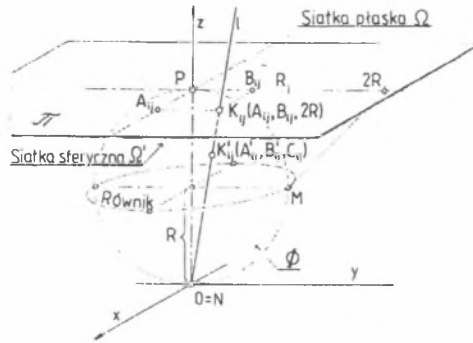
przekrycia takich budynków sferycznymi strukturami prętowymi, montowanymi z sześciu powtarzalnych prefabrykatów. Pojęcie *struktury* zdefiniowano w pracy [3].

Na podstawie analizy różnych wielokątów (oczek) przedstawionych w pracach [4,5,6], nadających się do wypełnienia sześciokątów foremnych tworzących parkietaże foremne [7], wybrano trzy (rys.1). Tylko o wybranych oczkach siatki tych parkietaży nadają się do skonstruowania trzech wariantów regularnych, prętowych *struktur sferycznych* (kopuł) dwuwarstwowych.



Rys. 1. Przyjęte trzy warianty siatek płaskich  $\Omega$  rozpiętych na sześciokącie foremnym  
Fig. 2. Three alternative designs of flat nets  $\Omega$  spread over a regular hexagon

Projektowanie każdego przekrycia strukturalnego na wstępie wiąże się z opracowaniem jego topologii i geometrii. Przez topologię rozumie się tu wzajemny, ściśle określony układ węzłów (siatki / kratownicy) i sposób, w jaki są między sobą połączone, tworząc konstrukcję stateczną. Geometria sprowadza się do jednoznacznego ustalenia współrzędnych, określenia długości prętów w poszczególnych grupach oraz wyznaczenia kątów nachylenia prętów – dla produkcji prefabrykowanych węzłów.



Rys. 2. Zasada rzutu stereograficznego siatki płaskiej na sferę  
 Fig. 2. Principle of the stereographical projection of a flat net onto a sphere

## 2. STRUKTURY JEDNOWARSTWOWE

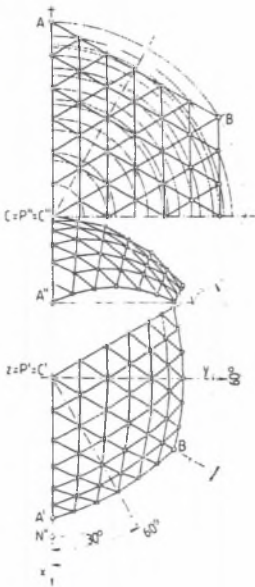
Stosujemy metodę rzutowania stereograficznego [8,9]. Punkty każdej siatki  $\Omega_i$  (z rysunku 1), leżące na płaszczyźnie  $\pi$  (rys.2), rzutujemy na sferę  $\Phi$  w kierunku punktu incydencji  $N$ . Odwzorowanie  $K_i \rightarrow K'_i$  przekształca więc zbiór punktów  $\Omega$  na płaszczyźnie  $\pi$  w zbiór punktów  $\Omega'$  na sferze  $\Phi$  (rys.3). Łącząc punkty w ten sam sposób jak na płaszczyźnie, otrzymano siatki sferyczne wielościanów otwartych (wpisanych w sferę), przedstawione w pracy [10] (definiując tam wielościany otwarte).

Określona topologia struktur umożliwia zautomatyzowanie obliczeń ich parametrów geometrycznych. Na podstawie rysunków 1 i 2 w przyjętym układzie kartezjańskim  $[x, y, z]$  współrzędne prostokątne punktów  $K_{ij}(A_{ij}, B_{ij}, 2R)$  siatek płaskich  $\Omega$  wyznaczmy ze wzorów:

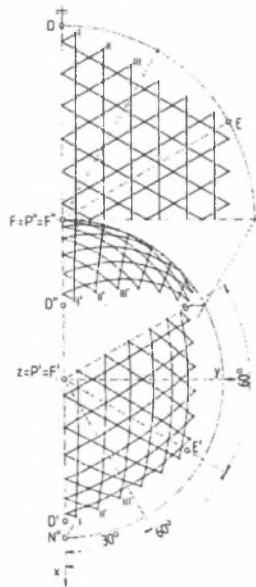
► dla siatki I (rys.4a):

$$K_{ij} = \left[ i \frac{a}{2}, a \frac{\sqrt{3}}{2} j, 2R \right] \quad - \quad \text{gdy} \quad (i+j) \equiv 0 \pmod{2}; \quad (1)$$

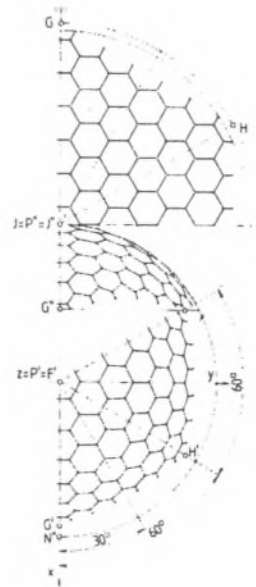
I.



II.



III.



Rys. 3. Rzuty trzech wariantów jednowarstwowych 1/3 pełnych siatek sferycznych uzyskanych konstrukcją stereograficzną z siatek płaskich jak na rys.1

Fig. 3. Projections of three alternative designs of one-layer 1/3 full spherical nets obtained from flat nets using the stereographical construction method like in fig.1

► dla siatki II (rys.4b):

$$K_{ij} = \left[ i \frac{a}{4}, a \frac{\sqrt{3}}{4} j, 2R \right] \quad - \text{gdy } i, j \in \mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z} - \text{liczby całkowite}) \quad (2)$$

oraz  $i \equiv 0 \pmod{4}$  i  $j \equiv 2 \pmod{4}$  lub

$i \equiv 1 \pmod{4}$  i  $j \equiv 1 \pmod{2}$  lub

$i \equiv 2 \pmod{4}$  i  $j \equiv 0 \pmod{4}$  lub

$i \equiv 3 \pmod{4}$  i  $j \equiv 1 \pmod{2}$ ;

► dla siatki III (rys.4c):

$$K_{ij} = \left[ i \frac{a}{2}, a \frac{\sqrt{3}}{6} j, 2R \right] \quad - \text{gdy } j \not\equiv 0 \pmod{3} \quad (3)$$

oraz  $i + j \equiv 0 \pmod{2}$ ;

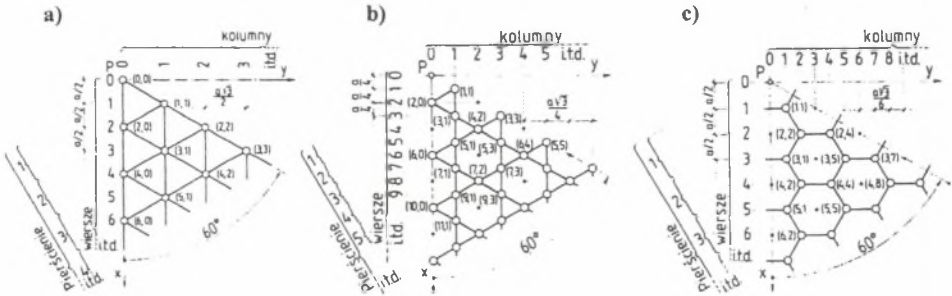
we wzorach tych:

$i$  – liczby całkowite  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , numerujące wiersze,

$j$  – liczby całkowite  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , numerujące kolumny,

$a$  – długości według rysunku 1;

$i \equiv j \pmod{m}$  –  $i$  i  $j$  przystają do siebie według modułu  $m$  (gdzie  $m$  jest liczbą naturalną),  
gdy  $i$  i  $j$  dają tę samą resztę przy dzieleniu przez  $m$  [11].



Rys. 4. Proponowany sposób opisu współrzędnych węzłów dla wariantów jednowarstwowych siatek płaskich oraz przyjęte kolejne numery pierścieni równoleżnikowych  
Fig. 4. Proposed method for the description of the co-ordinates of joints in the alternative designs of one-layer flat nets and the assumed subsequent numbers of parallel rings

Na podstawie rysunku 2 można zapisać:

- równanie prostej  $l$  przechodzącej przez początek układu współrzędnych  $0 = N$  i punkt  $K$  o współrzędnych  $(A, B, 2R)$  :

$$l: \quad x/A = y/B = z/(2R) \tag{4}$$

- równania parametryczne prostej  $l$  :

$$\left. \begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt \\ z &= 2Rt \end{aligned} \right\} \text{ dla } t \in R \text{ (} R \text{ – liczby rzeczywiste)} \tag{5}$$

- równanie sfery:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2. \tag{6}$$

Równania (5) i (6) dają:

$$t = 4R^2 / (A^2 + B^2 + 4R^2). \tag{7}$$

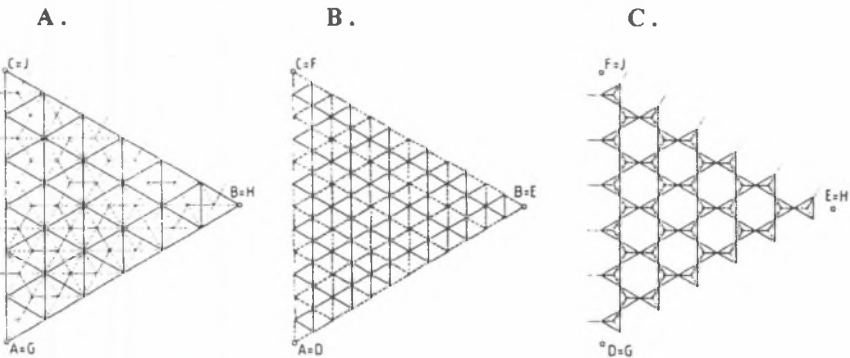
W rezultacie prosta  $l$  przebija sferę  $\Phi$  poza początkiem układu w punkcie  $K'$  o współrzędnych :

$$K_{ij} = [ 4AR^2/(A^2 + B^2 + 4R^2), 4BR^2/(A^2 + B^2 + 4R^2), 8R^3/(A^2 + B^2 + 4R^2) ] \quad (8)$$

Punktom  $K_{ij}(A_{ij}, B_{ij}, 2R)$  siatek płaskich  $\Omega$  odpowiadają punkty  $K'_{ij}$  siatki  $\Omega'$  na sferze  $\Phi$ . Do obliczenia współrzędnych prostokątnych punktów  $K'_{ij}$  na sferze, dla poszczególnych siatek należy poszczególne formuły (1), (2) i (3) podstawić do wzoru (8). Zauważmy, że równik sfery  $\Phi$  jest obrazem okręgu  $x^2 + y^2 = 4R^2, z = 2R$  leżącego na płaszczyźnie  $\pi$ . Istotnie, punkt  $K'$  leżący na równiku ma współrzędną  $z = 8R^3 / (A^2 + B^2 + 4R^2) = R$ , stąd  $A^2 + B^2 = 4R^2$ .

### 3. STRUKTURY DWUWARSTWOWE

Pomimo że jednowarstwowe struktury prętowe dwukrzywiznowe charakteryzuje sztywność przestrzenna, to jednak znacznie sztywniejsze są struktury dwuwarstwowe. Dlatego jednowarstwowe siatki sferyczne z rysunku 3 są odpowiednie do utworzenia topologii wariantów siatek struktur sferycznych dwuwarstwowych, w których warstwy, górna i dolna, będą połączone na wzór struktur płaskich z rysunku 5.



Rys. 5. Trzy warianty dwuwarstwowych siatek płaskich uzyskanych z siatek płaskich jednowarstwowych jak na rys.2, liniami przerywanymi zaznaczono pręty łączące warstwę górną i dolną

Fig. 5. Three alternative designs of two-layer flat meshes obtained from one-layer flat meshes, like in fig.2 broken lines denote the bars joining the top and bottom layers

## 4. PRĘTY RÓŻNE

Jedną z istotnych charakterystyk geometrycznych kopuł prętowych jest liczba grup prętów różnych pod względem długości. Wyznaczamy tę liczbę w zależności od poziomu  $p$  „pierścienia równoleżnikowego”. Przez „pierścienie równoleżnikowe” jednowarstwowych struktur sferycznych (rys.4) rozumie się tu część powierzchni, w której zawarte są :

a) dla siatki I (rys.4a) i siatki II (rys.4b) – pręty krzyżulcowe (o kierunkach południkowych lub zbliżonych do południkowych) oraz równoleżnikowe (o kierunkach równoleżnikowych lub zbliżonych do równoleżnikowych);

b) dla siatki III (rys.4c) – pręty krzyżulcowe (o kierunkach równoleżnikowych lub zbliżonych do równoleżnikowych) oraz południkowe lub zbliżone do kierunków południkowych. Dla tych założeń sformułowano wzory pozwalające automatycznie wyznaczyć liczby grup prętów różnych:

$$\bullet \quad r(p) = \begin{cases} p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (p+1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (9b)$$

$$\bullet \quad s(p) = \begin{cases} 3 \cdot p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (3 \cdot p + 1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (9c)$$

► dla siatki, wariant I (rys.4a):

$$\bullet \quad k(p) = p, \quad (9a)$$

► dla siatki, wariant II (rys.4b):

$$\bullet \quad k(p) = \begin{cases} p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (p-1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (10a)$$

$$\bullet \quad r(p) = \begin{cases} p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (p+1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (10b)$$

$$\bullet \quad s(p) = \begin{cases} 3p/4, & \text{– dla } p \equiv 0 \pmod{4}, \\ 3(p-1)/4, & \text{– dla } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ (3p+2)/4, & \text{– dla } p \equiv 2 \pmod{4}, \\ (3p-1)/4, & \text{– dla } p \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases} \quad (10c)$$

► dla siatki, wariant III (rys.4c):

$$\bullet \quad k(p) = p, \quad (11a)$$

$$\bullet \quad r(p) = \begin{cases} p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (p+1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (11b)$$

$$\bullet \quad s(p) = \begin{cases} 3p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (3p+1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (11c)$$

we wzorach:  $k$  – liczba grup prętów różnych krzyżulcowych,  
 $r$  – liczba grup prętów różnych równoleżnikowych,  
 $s$  – suma wszystkich grup prętów różnych w 1/6 części,  
 $p$  – liczby naturalne  $0, 1, 2, 3, \dots$ , numerujące „pierścienie równoleżnikowe”.

Dla wariantów struktur dwuwarstwowych (rys.5) powyższe wzory (9) do (11) uzupełnimy formułami dla liczb grup różnych prętów łączących. Oznaczmy przez  $m(p)$  liczby grup różnych prętów południkowych lub „zbliżonych” do południkowych. Wtedy:

► dla prętów łączących ze struktury wariantu A (rys.4a):

$$\bullet k(p) = 2p - 1, \quad (12a)$$

$$\bullet m(p) = p, \quad (12b)$$

$$\bullet s(p) = p, \quad (12c)$$

► dla prętów łączących ze struktury wariantu B (rys.4b):

$$\bullet k(p) = \begin{cases} p/2 & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \\ (p+1)/2 & \text{– dla } p \text{ nieparzystych;} \end{cases} \quad (13a)$$

$$\bullet m(p) = p[(-1)^p + 1]/4, \quad (13b)$$

$$\bullet s(p) = \begin{cases} (p+1)/2, & \text{– dla } p \text{ nieparzystych,} \\ p, & \text{– dla } p \text{ parzystych;} \end{cases} \quad (13c)$$

► dla prętów łączących ze struktury wariantu C (rys.4b):

$$\bullet k(p) = \begin{cases} (p-1)/2, & \text{– dla } p \text{ nieparzystych,} \\ p/2, & \text{– dla } p \text{ parzystych,} \end{cases} \quad (14a)$$

$$\bullet m(p) = \begin{cases} p/4, & \text{– dla } p \equiv 0 \pmod{4}, \\ (p-1)/4, & \text{– dla } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ (p+2)/4, & \text{– dla } p \equiv 2 \pmod{4}, \\ (p+1)/4, & \text{– dla } p \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases} \quad (14b)$$

$$\bullet s(p) = \begin{cases} 3p/4, & \text{– dla } p \equiv 0 \pmod{4}, \\ 3(p-1)/4, & \text{– dla } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ 3(p+2)/4, & \text{– dla } p \equiv 2 \pmod{4}, \\ (3p+1)/4, & \text{– dla } p \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases} \quad (14c)$$

W przedstawionych przykładach wariantów dwuwarstwowych struktur prętowych sferycznych – łączną liczbę grup prętów różnych zestawiono w tabeli 1. Na podstawie tego zestawienia widoczne jest, że dwuwarstwowa struktura budowana wg wariantu A będzie miała najmniejszą liczbą prętów różnych, a wg wariantu B – największą. Nie przesądza to o ostatecznym wyborze przedstawionych topologii siatek. W przykładzie struktury A (wg rys. 5a) jest łącznie 1440 prętów, w strukturze B (wg rys. 5b) – 1824 pręty, w strukturze C (wg rys.5c) – 1716 prętów.



Tabela 1

Zestawienie grup prętów różnych dla struktur sferycznych dwuwarstwowych

Grupy prętów	Struktura A	Struktura B	Struktura C
Warstwy górnej	33	56	56
Łączących	57	63	57
Warstwy dolnej	30	33	30
Σ prętów 1/12 struktury sferycznej	120	152	143

w 1/12 struktury sferycznej liczba prętów jest równa liczbie grup prętów całej struktury

## 5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w tej pracy warianty topologii strukturalnych siatek sferycznych oraz formuły matematyczne dla zautomatyzowania obliczania współrzędnych prostokątnych węzłów mogą posłużyć do projektowania przekryć prętowych, tarczownicowo – prętowych i tarczownicowych. Przyjmując maksymalną długość prętów 3 m, w przedstawionych przykładach strukturami można przekryć powierzchnie o rozpiętości 26 m – licząc po przekątnej sześcioboku. Większe rozpiętości uzyska się nawet przy mniejszych długościach prętów – zwiększając liczbę „pierścieni równoleżnikowych”. Mankament w postaci dużej liczby grup prętów różnych będzie zmniejszony przy produkcji masowej, powtarzalnej. Kratownice mogą być produkowane na warsztacie jako prefabrykaty w 1/6 lub 1/12 całości konstrukcji przekrycia, albo mniejsze – z uwagi na gabaryty transportowe. Takie konstrukcje mogą być stosowane jako przekrycia pawilonów handlowo-usługowych, hal sportowych, widowiskowych oraz wystawowych [12]. Obiekty realizowane na bazie rzutu sześciobocznego stwarzają funkcjonalne rozwiązania użytkowe i atrakcyjne formy architektoniczne.

## Literatura

1. Nantka M.B.: Wpływ wymiarów i kształtu budynków mieszkalnych na ich potrzeby cieplne. COW nr 3/1984, s.76-80.
2. Wołoszyn M.A.: Wykorzystanie energii słonecznej w budownictwie jednorodzinym. C.O.I.B. Warszawa 1991, s.77-79.
3. Bródka J. i inni: Przekrycia strukturalne. Arkady, Warszawa 1985, s.8-9.
4. Biegus A., Kowal Z., Kubica E., Rykaluk K.: Hale unikatowe o dużych rozpiętościach. PNIB. PWr. Nr 13. Monografie nr 4. Wrocław 1974, s.24-41.

5. Bütner O., Stenker H.: Lekkie budownictwo metalowe. Arkady, Warszawa 1975; s.26-30.
6. Eberlein H.: Design, Analysis and Construction of MERO single and double layer DOMES. University of Surrey, GB. Department of Civil Engineering, Prof. Dr. Z.S. Makowski. Course on Braced Domes. Volume II. 18-19.09.1980.
7. Coxeter H.S.M.: Wstęp do geometrii dawnej i nowej. PWN, Warszawa 1967, s.79-81.
8. Hilbert D., Cohn-Vossen S.: Geometria pogładowa. PWN, Warszawa 1956, s.227-238.
9. Fuliński J., Mirski J.: Kupuła prętowa w odwzorowaniu stereograficznym. ZN AR. Mel. XXX. Nr 174 / 1988, s.233-239.
10. Mirski J.: Trzy wielościany otwarte utworzone metodą rzutu stereograficznego. VII Seminarium „Geometria i Komputer – Wisła 2001”; Politechnika Śląska, s.58-59.
11. Sierpiński W.: Arytmetyka teoretyczna. PWN, Warszawa 1969, s.138-181.
12. Biegus A., Kowal Z., Koziół E., Mądry D.: Konstrukcje metalowe w budownictwie handlowo-usługowym. PNIB. P.Wr. Nr 34. Monografie nr 15. Wrocław 1974, s.70.

Recenzent: Dr hab.inż.arch. Jerzy Mroczkowski  
Prof. Politechniki Wrocławskiej

## Abstract

Compact construction forms such as low cylinders or prisms with a regular hexagonal base and spherical roofs exhibit lower demand for thermal energy [1,2]. Selected regular polygons (meshes) were used to fill in three regular hexagons, forming parquet floors (fig.1) corresponding to projections of the building. Like in the topological forming of classic trusses with joints lying on planes, the stereographical method was applied to develop three alternative designs of spherical bar structures (fig.3). Equation (8) was formulated to enable automatic calculations of the rectangular co-ordinates of joints of bar net structures. By appropriate combination of two one-layer spherical structures, the formed nets of two-layer structures have topology similar to that in fig.5. For alternative designs of nets of bar structures, formulas were provided to enable automatic calculation of the number of groups of bars of various length:

- for one-layer structures – equations (9) to (11),
- for two-layer structures – equations (9) to (14).