

Janusz GUZIK

## DWUŹRÓDŁOWY UKŁAD MOSTKOWY DO BADAŃ DIELEKTRYKÓW ZASILANY NAPIĘCIAMI O KROTNYCH CZĘSTOTLIWOŚCIACH

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono podstawowe założenia koncepcji budowy dwuźródłowych układów mostkowych przeznaczonych do badań dielektryków zasilanych napięciami  $E_X(t) = |E_X| \sin(2\pi f_X t)$  i  $E_N(t) = |E_N| \sin(2\pi f_N t)$  o jednakowych amplitudach:  $|E_X| = |E_N|$  i o krotnych częstotliwościach, tj. częstotliwościach spełniających relację:  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$ , gdzie  $k \in N$ . Wyprowadzono zależności

pozwalające na ocenę podstawowych parametrów metrologicznych omawianej klasy układów mostkowych. Przeprowadzone rozważania zilustrowano na szczegółowym przykładzie układu mostkowego, przeznaczonego do pomiarów składowych ( $R_X$ ,  $C_X$ ) i ( $C_X$ ,  $\text{tg}\delta_X$ ) badanego dielektryka.

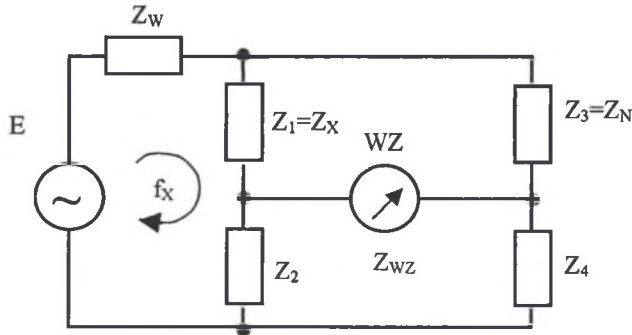
## TWO-SOURCE BRIDGE CIRCUIT SUPPLIED WITH VOLTAGES OF MULTIPLE FREQUENCIES USED FOR INVESTIGATIONS OF DIELECTRICS

**Summary.** The paper presents the basic assumptions for construction of bridge circuits supplied with voltages  $E_X(t) = |E_X| \sin(2\pi f_X t)$  and  $E_N(t) = |E_N| \sin(2\pi f_N t)$  of the same amplitudes  $|E_X| = |E_N|$  and multiple frequencies that is the frequencies for which the following relation  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$  is true, where

$k \in N$ . These circuits are used for investigations of dielectrics. The relationships allowing evaluation of the basic metrological parameters of the considered class of the bridge circuits are derived. The carried out considerations are illustrated by the example of the bridge circuit used for measurements of the components ( $R_X$ ,  $C_X$ ) and ( $C_X$ ,  $\text{tg}\delta_X$ ) of the tested dielectric.

## 1. WSTĘP

Do zmiennoprądowych badań dielektryków powszechnie stosowane są układy mostkowe [2, 6, 7, 8] o ogólnym schemacie połączeń jak na rys. 1.



Rys. 1. Schemat ideowy klasycznego układu mostkowego  
Fig. 1. Schematic diagram of classic bridge circuit

Przy pomiarach (np. składowych  $(R_X; C_X)$  lub  $(C_X; tg\delta_X)$ ) badanego dielektryka o impedancji  $Z_X = R_X + \frac{1}{j2\pi f_X C_X} = \frac{1}{j2\pi C_X} (1 + tg\delta_X)$  - równanie równowagi mostka opisane jest w ogólnym przypadku za pomocą następującej zależności [6, 7]:

$$Z_X(j2\pi f_X) = \frac{Z_2(j2\pi f_X)}{Z_4(j2\pi f_X)} Z_N(j2\pi f_X). \quad (1)$$

Szczegółowe równania równowagi mostka wg rys. 1 zależą przy tym od struktur poszczególnych impedancji  $Z_2(j2\pi \cdot f_X)$ ,  $Z_4(j2\pi \cdot f_X)$  i  $Z_N(j2\pi f_X)$  gałęzi mostka i są tym samym różne dla różnych konstrukcji układów mostkowych [6].

Warto podkreślić, że pomiary składowych  $(R_X; C_X)$  lub  $(C_X; tg\delta_X)$  badanego dielektryka o impedancji  $Z_X$  dokonywane są przeważnie przy jednej wartości częstotliwości  $f_X$ , np.  $f_X = 50\text{Hz}$  [8], co może okazać się niewystarczające dla ujawnienia pewnych ich właściwości. Z tego też względu wydaje się celowe opracowanie koncepcji budowy odpowiedniego szerokopasmowego układu mostkowego.

Przykładowo, dla klasycznego, idealnego mostka jak na rys. 1 i zmianach częstotliwości  $f_X \in [f_{X_{\min}}; f_{X_{\max}}]$  źródła napięcia  $E_X$  zasilającego mostek - równanie równowagi (1) spełnione jest w sposób dokładny; natomiast dla rzeczywistego mostka - obowiązuje wzór:

$$Z'_X(j2\pi f_X) = \frac{Z'_2(j2\pi f_X)}{Z'_4(j2\pi f_X)} Z'_N(j2\pi f_X), \quad (2)$$

przy czym błąd  $\delta_{Z_X}$  pomiaru impedancji  $Z_X$  (lub jej składowych  $(R_X; C_X)$  lub  $(C_X; tg\delta_X)$ ) będąc zdefiniowany w sposób następujący [4]:

$$\delta_{Z_X} = \frac{Z'_X - Z_X}{Z_X} = \frac{Z_2(1 + \delta_{Z_2})}{Z_4(1 + \delta_{Z_4})} Z_N(1 + \delta_{Z_N}) = \delta_{Z_2} + \delta_{Z_4} + \delta_{Z_N}, \quad (3)$$

uwarunkowany jest istnieniem błędów częstotliwościowych  $\delta_{Z_2} = \delta_{Z_2}(f_X)$ ,  $\delta_{Z_4} = \delta_{Z_4}(f_X)$  i  $\delta_{Z_N} = \delta_{Z_N}(f_X)$  elementów składowych  $Z_2; Z_4; Z_N$  ogólnego układu mostkowego wg rys.1.

Dobór granicznych wartości częstotliwości  $f_{X\min}$  i  $f_{X\max}$  źródła napięcia zasilającego  $E_X$  układ mostkowy może być uzależniony wtedy od spełnienia nierówności (4) zapisanej np. w postaci:

$$0 \leq |\delta_{Z_X}(f_X)| \leq 0,1 \quad |\pm \delta_{Z_X}| \quad \text{dla } f_X \in [f_{X\min}; f_{X\max}], \quad (4)$$

gdzie:

$\pm \delta_{Z_X}$  - niepewność pomiaru (ogólnie) impedancji  $Z_X$  badanego dielektryka. Z tego też względu zagadnienie budowy układu mostkowego przeznaczonego do szerokopasmowych badań dielektryków związane jest nieodłącznie z minimalizacją błędu częstotliwościowego wyznaczenia wartości impedancji  $Z_X$  [4]:

$$\text{Min}|\delta_{Z_X}| = \text{Min}|\delta_{Z_2}(f) + \delta_{Z_4}(f) + \delta_{Z_N}(f)| \Big|_{f=f_X}, \quad (5)$$

- co w ogólnym przypadku jest trudne.

Minimalizacja błędu częstotliwościowego  $\delta_{Z_X}$  mogłaby ulec znacznemu uproszczeniu w sytuacji, gdyby gałęzie mostka  $\{Z_X; Z_2\}$  i  $\{Z_4; Z_N\}$  zasilane były (odpowiednio) napięciami  $E_X$  i  $E_N$  o jednakowych amplitudach:  $|E_X| = |E_N|$ , lecz o różnych częstotliwościach, tj.  $f_X \neq f_N$  [1,4]. Wówczas to równanie równowagi (2) przyjmuje postać:

$$Z'_X(j2\pi f_X) = \frac{Z'_2(j2\pi f_X)}{Z'_4(j2\pi f_N)} Z'_N(j2\pi f_N), \quad (6)$$

przez co minimalizację błędu częstotliwościowego opisanego wzorem (5) można sprowadzić do minimalizacji wyrażenia o następującej postaci [1, 4]:

$$\text{Min}|\delta_{Z_X}| = \text{Min}|\delta_{Z_2}(f)| \Big|_{f=f_X}, \quad (7)$$

przy czym:

$$\delta_{z_x}(f) = 0 \quad - \text{dla } f = f_x = f_N,$$

$$\delta_{z_2}(f) \neq 0 \quad - \text{dla } f = f_x \neq f_N,$$

$$\delta_{z_2}(f) = 0, \delta_{z_4}(f) = 0, \delta_{z_N}(f) = 0 \quad - \text{dla } f = f_x = f_N.$$

W dalszym ciągu celem pracy będzie omówienie powyższej oryginalnej koncepcji minimalizacji błędów częstotliwościowych  $\text{Min}|\delta_{z_x}|$  zastosowanej do układu dwuzródłowego mostka zasilanego napięciami  $E_X(t) = |E_X| \sin(2\pi f_X t)$  i  $E_N(t) = |E_N| \sin(2\pi f_N t)$  o jednakowych amplitudach:  $|E_X| = |E_N|$  i o krotnych częstotliwościach  $f_X, f_N$ , tj. częstotliwościach spełniających relację:  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$ , gdzie  $k \in N$ .

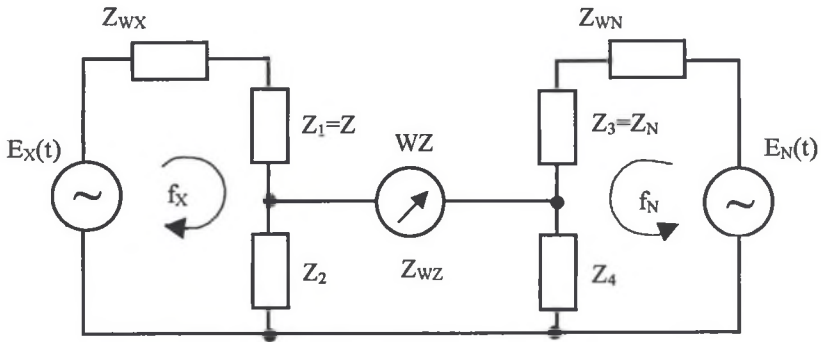
Wybór krotnych wartości  $(k)^{\pm 1}$  stosunku częstotliwości  $\frac{f_X}{f_N}$  został podyktowany tutaj

dwoma względami:

- znacznym uproszczeniem szczegółowych postaci równania równowagi (6),
- faktem, że różnica sygnałów podlegających porównaniu w obwodzie wskaźnika zera WZ np. postaci:  $u_X(t) - u_X(t) = |U_X| \sin(2\pi f_X t + \varphi_X) - |U_N| \sin(2\pi f_N t + \varphi_N)$  jest wówczas sygnałem okresowym [5]. Oznacza to możliwość adaptacji znanych i stosowanych rozwiązań układowych wskaźników zera WZ [6,7]. Wtedy to detekcja stanu równowagi:  $u_X(t) - u_X(t) = 0$  sprowadza się do detekcji stanu równości pewnych miar sygnałów:  $F\{u_X(t)\} - F\{u_X(t)\} = 0$ , gdzie  $F\{\dots\}$  - jest operacją matematyczną uwarunkowaną przyjętym typem wskaźnika zera WZ. Przykładowo, dla wskaźnika zera WZ typu amplitudowego, obowiązuje równość [1]:  $u_X(t) - u_X(t) = 0 \Leftrightarrow |U_X| = |U_N|$ .

## 2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DWUZRÓDŁOWEGO MOSTKA ZASILANEGO NAPIĘCIAMI O KROTNYCH CZĘSTOTLIWOŚCIACH

Przedmiotem dalszej analizy będzie dwuzródłowy mostek, przedstawiony na rys.2, zasilany napięciami  $E_X(t) = |E_X| \sin(2\pi f_X t)$  i  $E_N(t) = |E_N| \sin(2\pi f_N t)$  o jednakowych amplitudach:  $|E_X| = |E_N| = |E|$  i o krotnych częstotliwościach  $f_X, f_N$ , tj. częstotliwościach spełniających relację:  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$ , gdzie  $k \in N$ .



Rys.2. Schemat ideowy analizowanego dwuźródłowego mostka  
Fig.2. Schematic diagram of the analysed two-source bridge

Równanie przetwarzania takiego mostka można opisać zależnością:

$$\underbrace{I_{WZ}}_{f_X \cdot f_N} = \underbrace{I'_{WZ}}_{f_X} + \underbrace{I''_{WZ}}_{f_N} \quad \text{lub} \quad \underbrace{U_{WZ}}_{f_X \cdot f_N} = \underbrace{I_{WZ} Z_{WZ}}_{f_X \cdot f_N} = \underbrace{U'_{WZ}}_{f_X} + \underbrace{U''_{WZ}}_{f_N}, \quad (8)$$

gdzie:

$\underbrace{I'_{WZ}}_{f_X}$ ,  $\underbrace{I''_{WZ}}_{f_N}$ ,  $\underbrace{U'_{WZ}}_{f_X}$ ,  $\underbrace{U''_{WZ}}_{f_N}$  - oznaczają (odpowiednio) składowe prądu (napięcia) występujące

w obwodzie wskaźnika zera WZ wyznaczone dla częstotliwości  $f_X$  i  $f_N$ ,

$\underbrace{Z_{WZ}}_{f_X \cdot f_N}$  - impedancja wskaźnika zera WZ wyznaczona dla częstotliwości  $f_X$  i  $f_N$ .

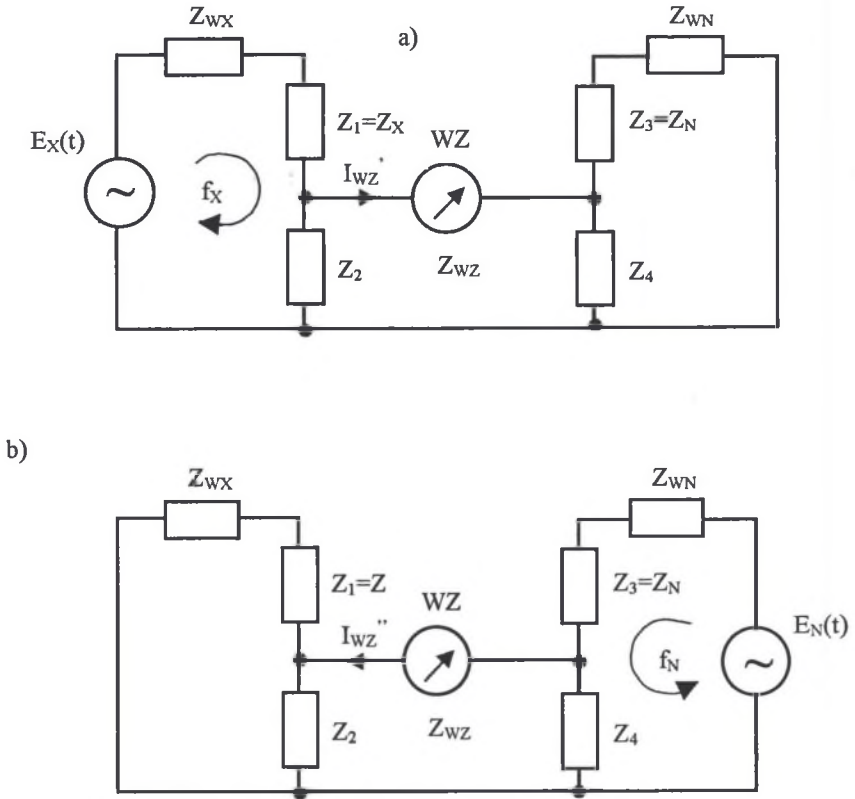
Stosując metodę superpozycji, tj. wykorzystując w obliczeniach podukłady mostka - odpowiednio dla  $E_N(t) = 0$  (rys.3a) i  $E_X(t) = 0$  (rys.3b), opisuje się równanie przetwarzania mostka (8) za pomocą następującej zależności [1]:

$$I_{WZ} = \frac{E_X Z_2}{\underbrace{(Z_{WX} + Z_X)Z_2 + (Z_{WX} + Z_X + Z_2) \left( Z_{WZ} + \frac{(Z_{WN} + Z_N)Z_4}{Z_{WN} + Z_N + Z_4} \right)}_{f_X}} \quad (9a)$$

$$- \frac{E_N Z_4}{\underbrace{(Z_{WN} + Z_N)Z_4 + (Z_{WN} + Z_N + Z_4) \left( Z_{WZ} + \frac{(Z_{WX} + Z_X)Z_2}{Z_{WN} + Z_N + Z_4} \right)}_{f_N}}$$

lub

$$U_{WZ} = \underbrace{I_{WZ} Z_{WZ}}_{f_X \cdot f_N}, \quad (9b)$$



Rys.3. a) Schemat ideowy analizowanego dwuzródłowego mostka dla  $E_N(t) = 0$ , b) Schemat ideowy analizowanego dwuzródłowego mostka dla  $E_X(t) = 0$

Fig.3. a) Schematic diagram of analysed two-source bridge for  $E_N(t) = 0$ , b) Schematic diagram of the analysed two-source bridge for  $E_X(t) = 0$

W przypadku zastosowania analizowanego układu mostkowego do badań dielektryków oczywiste stają się relacje:

$$\underbrace{Z_{WX} + Z_X}_{f_X} \approx Z_X, \underbrace{Z_{WX} + Z_X + Z_2}_{f_X} \approx Z_X + Z_2, \underbrace{Z_{WN} + Z_N}_{f_X} \approx Z_N, \\ \underbrace{Z_{WN} + Z_N + Z_4}_{f_X} \approx Z_N + Z_4, \underbrace{Z_{WN} + Z_N}_{f_N} \approx Z_N, \underbrace{Z_{WN} + Z_N + Z_4}_{f_N} \approx Z_N + Z_4, \\ \underbrace{Z_{WX} + Z_X}_{f_N} \approx Z_X, \underbrace{Z_{WX} + Z_X + Z_4}_{f_N} \approx Z_X + Z_4$$

i wówczas równanie przetwarzania (9) upraszcza się do postaci:

$$I_{WZ} = \frac{E_X Z_2}{\underbrace{Z_X Z_2 + (Z_X + Z_2) \frac{Z_N Z_4}{Z_N + Z_4}}_{f_X}} - \frac{E_N Z_4}{\underbrace{Z_N Z_4 + (Z_N + Z_4) \frac{Z_X Z_2}{Z_X + Z_2}}_{f_N}}, \quad (10a)$$

lub

$$U_{WZ} = \underbrace{I_{WZ} Z_{WZ}}_{f_X \cdot f_N}. \quad (10b)$$

Równanie równowagi analizowanego mostka  $I_{WZ} = 0$  ( $U_{WZ} = 0$ ) dla  $|E_X| = |E_N| = |E|$  prowadzi do następującej zależności:

$$\frac{Z_2}{\underbrace{Z_X Z_2 + (Z_X + Z_2) \left( Z_{WZ} + \frac{Z_N Z_4}{Z_N + Z_4} \right)}_{f_X}} = \frac{Z_4}{\underbrace{Z_N Z_4 + (Z_N + Z_4) \left( Z_{WZ} + \frac{Z_X Z_2}{Z_X + Z_2} \right)}_{f_N}}, \quad (11a)$$

lub

$$U_{WZ} = \underbrace{I_{WZ} Z_{WZ}}_{f_X \cdot f_N}. \quad (11b)$$

Można pokazać [1], że korzystniej jest rozpatrywać analizowany układ mostkowy dla przypadku zastosowania napięciowego wskaźnika zera WZ, co prowadzi do równania równowagi  $U_{WZ} = 0$  postaci:

$$\frac{Z_2 Z_{WZ}}{\underbrace{Z_X Z_2 + (Z_X + Z_2) \left( Z_{WZ} + \frac{Z_N Z_4}{Z_N + Z_4} \right)}_{f_X}} = \frac{Z_4 Z_{WZ}}{\underbrace{Z_N Z_4 + (Z_N + Z_4) \left( Z_{WZ} + \frac{Z_X Z_2}{Z_X + Z_2} \right)}_{f_N}}, \quad (12a)$$

które przy spełnieniu warunku  $\underbrace{|Z_{WZ}| \rightarrow \infty}_{f_X \cdot f_N}$  można zapisać jako:

$$\frac{Z_2}{\underbrace{Z_X + Z_2}_{f_X}} = \frac{Z_4}{\underbrace{Z_N + Z_4}_{f_N}}, \quad (13a)$$

lub

$$\underbrace{Z_X}_{f_X} = \frac{\underbrace{Z_2}_{f_X}}{\underbrace{Z_4}_{f_N}} \underbrace{Z_N}_{f_N}, \quad (13b)$$

a wtedy błąd częstotliwościowy pomiaru impedancji  $Z_X$  jest równy [1, 4]:

$$\delta_{Z_X}(f_X) = \delta_{Z_2}(f_X).$$

### Przykład

Dla mostka [1] o wartościach impedancji (por. rys.2):

$$\begin{aligned} \underbrace{Z_X}_{f_X} &= R_X + \frac{1}{j2\pi f_X C_X} = \frac{1}{j2\pi f_X C_X} (1 + tg\delta_X), \\ \underbrace{Z_N}_{f_N} &= R_N + \frac{1}{j2\pi f_N C_N} = \frac{1}{j2\pi f_N C_N} (1 + tg\delta_N), \\ \underbrace{Z_2}_{f_X} &= R_2, \quad \underbrace{Z_4}_{f_N} = R_4, \end{aligned} \quad (14)$$

równania równowagi (13b) składowych  $(R_X; C_X)$  lub  $(C_X; tg\delta_X)$  opisują następujące zależności:

- dla pomiaru składowych  $(R_X; C_X)$ :

$$\frac{R_X}{f_X} = \frac{\underbrace{R_2}_{f_X}}{\underbrace{R_4}_{f_N}} \frac{R_N}{f_N} \quad (15a)$$

i

$$\frac{C_X}{f_X} = \frac{\underbrace{R_4}_{f_N}}{\underbrace{R_2}_{f_X}} \cdot \frac{f_N}{f_X} \frac{C_N}{f_N} \quad (15b)$$

- dla pomiaru składowych  $(C_X; tg\delta_X)$ :

$$\frac{C_X}{f_X} = \frac{\underbrace{R_4}_{f_N}}{\underbrace{R_2}_{f_X}} \cdot \frac{f_N}{f_X} \frac{C_N}{f_N} \quad (16a)$$

i

$$\frac{tg\delta_X}{f_X} = 2\pi f_N \frac{R_N C_N}{f_N} \quad (16b)$$

Wówczas błędy częstotliwościowe  $\delta_{R_X}(f_X)$  i  $\delta_{C_X}(f_X)$  pomiaru składowych  $(R_X; C_X)$  są obie równe i wynoszą:

$$\delta_{R_X}(f_X) = \delta_{C_X}(f_X) = \delta_{R_2}(f_X), \quad (17)$$



natomiast przy pomiarze składowych  $(C_X; tg\delta_X)$ :

$$\delta_{C_X}(f_X) = \delta_{R_2}(f_X) \quad (18a)$$

i

$$\delta_{tg\delta_X}(f_X) = 0. \quad (18b)$$

Szczególnie warte jest odnotowanie obowiązywania zależności (18b). Oznacza ona, że zastosowanie analizowanego przykładu mostka do pomiaru współczynnika strat dielektrycznych  $tg\delta_x$  przy dowolnej częstotliwości  $f_x$  umożliwiłoby pomiar  $tg\delta_x$  z zerowym błędem częstotliwościowym  $\delta_{tg\delta_x}(f_X) = 0$  i z niepewnością  $\pm \delta_{tg\delta_x}(f_X)$  równą wprost niepewności  $\pm \delta_{tg\delta_N}(f_N)$  zastosowanego wzorca impedancji  $Z_N$  (por. wzór (16b)):

$$\pm \delta_{tg\delta_x}(f_X) = \pm \delta_{tg\delta_N}(f_N).$$

### 3. OCENA PRZYDATNOŚCI ANALIZOWANEGO UKŁADU MOSTKOWEGO DO SZEROKOPASMOWYCH BADAŃ DIELEKTRYKÓW

Przydatność analizowanego układu mostkowego do szerokopasmowych badań dielektryków można ocenić analizując jego podstawowe parametry metrologiczne, tj.:

- 1) czułość,
- 2) zbieżność,
- 3) niepewność pomiaru składowych  $(R_X; C_X)$  lub  $(C_X; tg\delta_X)$  impedancji  $Z_X$  badanego dielektryka.

Dodatkowymi warunkami określanymi czasem dla układów mostkowych (lub ogólniej, komparacyjnych [2]) są tzw. warunki bezpośredniego odczytu [2, 3], których spełnienie pozwala na zapis równania równowagi (13b) np. w postaci:  $Z_X = sta \mu a \cdot Z_i$ , gdzie:  $i = 2, 4$  lub  $N$ . W dalszym ciągu w pracy pominięto analizę warunków bezpośredniego odczytu, gdyż w [2, 3] wykazano, że spełnienie warunków bezpośredniego odczytu - równoznaczne z odpowiednim doбором par  $(p, q)$  elementów nastawnych mostka (tu: zgrupowane wyłącznie w gałęziach  $Z_N, Z_4$  mostka, tj.  $(p, q) \in \{Re Z_N, Im Z_N, Re Z_4, Im Z_4\}$ ) - prowadzi do takiego samego doboru par  $(p, q)$  elementów nastawnych, jak przy analizie zbieżności mostka.

**Ad 1.** Dla przypadku zastosowania napięciowego wskaźnika zera WZ o impedancji  $\underbrace{|Z_{WZ}| \rightarrow \infty}_{f_X \cdot f_N}$  - czułość analizowanego układu mostkowego  $|S|$  zdefiniowano w sposób następujący:

$$|S| = \underbrace{\left| \frac{\partial U_{WZ}}{\partial Z_X} \right|}_{f_x} = \underbrace{\left| \frac{EF}{(1+F)^2} \right|}_{f_x} = \underbrace{\left[ E \left[ \frac{|F|}{|F|^2 + 2|F| \cos \Theta + 1} \right] \right]}_{f_x}, \quad (19)$$

gdzie:

$$|F| = \underbrace{\left| \frac{Z_2}{Z_X} \right|}_{f_x} \quad \text{i} \quad \underbrace{\Theta}_{f_x} = \underbrace{\text{Arg} \left( \frac{Z_2}{Z_X} \right)}_{f_x} = \text{Arg}(Z_2) - \text{Arg}(Z_X).$$

Zależność (19) jest identyczna z zależnością obowiązującą dla klasycznego układu mostka [6, 7], będąc przy czym dodatkowo funkcją częstotliwości  $f_x$ . Maksymalną wartość czułości  $|S| = |S|_{\max} = \frac{1}{2} |E|$  mostka uzyskuje się wtedy dla  $|F| = 1$  i  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ .

W sytuacji, gdyby uzyskanie zadowalającej czułości  $|S| \geq |S_{\min}|$ , gdzie:  $|S_{\min}|$  - minimalna, założona wartość czułości  $|S|$  mostka, okazało się zbyt trudne dla  $f_x \in [f_{x \min}; f_{x \max}]$  - należy wtedy odpowiednio dobrać czułość  $\left| \frac{S_{WZ}}{f_x} \right|$  napięciowego wskaźnika zera WZ, gdyż wówczas  $|S| \rightarrow |S^{\ominus}| = \underbrace{|S|}_{f_x} \left| \frac{S_{WZ}}{f_x} \right|$ , lub dobrać wartość napięcia  $|E|$  zasilającego układ mostka.

### Przykład

Dla analizowanego, przykładowego mostka - czułość układu mostkowego  $|S|$  opisana wzorem (19) jest równa:

$$\begin{aligned} |S| &= |E| \frac{\underbrace{\left| \frac{R_2}{Z_X} \right|}_{f_x}}{\underbrace{\left| \frac{R_2}{Z_X} \right|^2 + 2 \left| \frac{R_2}{Z_X} \right| \cos(-\text{Arg} Z_X) + 1}_{f_x}} = \\ &= |E| \frac{2\pi f_x R_2 C_X}{\underbrace{(2\pi f_x R_2 C_X)^2 + 4\pi f_x R_2 C_X \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_X\right) + 1}_{f_x}} \approx \\ &\approx |E| \frac{2\pi f_x R_2 C_X}{\underbrace{(2\pi f_x R_2 C_X)^2 + 1}_{f_x}} < |S|_{\max}. \end{aligned} \quad (20)$$

**Ad 2.** Zbieżność mostka, określona za pomocą tzw. kąta zbieżności  $\gamma$  [2,6]:

$$\gamma = \text{Arg}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \text{Arg}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right), \quad (21)$$

gdzie:

$$\underline{H}_{f_X, f_N} = \underbrace{Z_X}_{f_X} \underbrace{Z_4}_{f_N} - \underbrace{Z_2}_{f_X} \underbrace{Z_N}_{f_N},$$

$(p, q)$  - elementy nastawne, pozwalające na sprowadzenie mostka do stanu równowagi  $U_{WZ} = 0$ .

W dalszym ciągu zakłada się [1], że elementy nastawne zgrupowane są wyłącznie w gałęziach  $Z_N, Z_4$  mostka, zasilanych napięciem  $|E_N| = |E|$  o częstotliwości  $f_N$ , tj.

$$(p, q) \in \{\text{Re } Z_N, \text{Im } Z_N, \text{Re } Z_4, \text{Im } Z_4\}$$

Wówczas można pokazać [1, 2], że przy pomiarze składowych  $(R_X; C_X)$  badanego dielektryka należy dokonać wyboru pary  $(p, q)$  elementów nastawnych w sposób następujący:  $(p, q) \in \{Z_4\} \Leftrightarrow (p, q) \in \{\text{Re } Z_4, \text{Im } Z_4\}$  lub  $(p, q) \in \{Z_N\} \Leftrightarrow (p, q) \in \{\text{Re } Z_N, \text{Im } Z_N\}$ .

Gwarantuje to uzyskanie maksymalnej zbieżności mostka  $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ , niezależnie od wartości częstotliwości  $f_N$ .

Z kolei przy pomiarze składowych  $(C_X; tg\delta_X)$  badanego dielektryka para  $(p, q)$  elementów nastawnych powinna należeć do zbioru:

$$(p, q) \in \{Z_N, Z_4\} \Leftrightarrow (p, q) \in \{\text{Re } Z_N, \text{Im } Z_N, \text{Re } Z_4, \text{Im } Z_4\}. \text{ Optymalną wartość kąta zbieżności mostka } \gamma = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \delta_X\right) \approx \pm \frac{\pi}{2} \text{ uzyskuje się wtedy dla [1]:}$$

$$(p, q) \in \{\text{Re } Z_N, \text{Re } Z_4\}.$$

### Przykład

Dla analizowanego, przykładowego mostka i pary  $(p, q)$  - maksymalną zbieżność mostka  $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ , niezależnie od wartości częstotliwości  $f_N$ , uzyskuje się przy pomiarze składowych  $(R_X; C_X)$  badanego dielektryka dla:

$$(p, q) \in \{Z_N\} \Leftrightarrow (p, q) \in \{R_N, C_N\}.$$

Natomiast przy pomiarze składowych  $(C_X; tg\delta_X)$  badanego dielektryka optymalny dobór pary  $(p, q)$  elementów nastawnych jest następujący:

$$(p, q) \in \{Z_N, Z_4\} \Leftrightarrow (p, q) \in \{R_N, R_4\} \text{ lub } (p, q) \in \{R_4, R_N\},$$

dla którego  $\gamma = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \delta_X\right) \approx \pm \frac{\pi}{2}$ .

Ad 3. Zgodnie z równaniem równowagi mostka (13b):  $\underbrace{Z_X}_{f_X} = \frac{\underbrace{Z_2}_{f_X}}{\underbrace{Z_4}_{f_N}} \underbrace{Z_N}_{f_N}$  niepewność

$\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X}$  pomiaru impedancji  $\underbrace{Z_X}_{f_X}$  opisuje zależność w ogólnej postaci:

$$\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X} = \pm \sqrt{\left(\underbrace{\pm \delta_{Z_2}}_{f_X}\right)^2 + \underbrace{\left(\pm \delta_{Z_4}\right)^2 + \left(\pm \delta_{Z_N}\right)^2}_{f_N}}, \quad (22)$$

gdzie:

$\underbrace{\pm \delta_{Z_2}}_{f_X}, \underbrace{\pm \delta_{Z_4}}_{f_N}, \underbrace{\pm \delta_{Z_N}}_{f_N}$  - niepewności wyznaczenia (odpowiednio przy częstotliwościach:  $f_X$  lub  $f_N$ , znanych z niepewności:  $\pm \delta_{f_X}$  i  $\pm \delta_{f_N}$ ) wartości impedancji:

$$\underbrace{Z_2}_{f_X}, \underbrace{Z_4}_{f_N}, \underbrace{Z_N}_{f_N}.$$

Minimalizację niepewności  $\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X}$  pomiaru impedancji  $\underbrace{Z_X}_{f_X}$  można przy tym przeprowadzić zapewniając relację:  $\underbrace{\pm \delta_{Z_2}}_{f_X}, \underbrace{\pm \delta_{Z_4}}_{f_N} \ll \underbrace{\pm \delta_{Z_N}}_{f_N}$ , a wówczas:  $\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X} = \underbrace{\pm \delta_{Z_N}}_{f_N}$ . Ponadto podstawowe znaczenie przy ocenie niepewności  $\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X}$  pomiaru impedancji  $\underbrace{Z_X}_{f_X}$  ma wybór rodzaju wzorca  $\underbrace{Z_N}_{f_N}$  (stały lub nastawny), przy czym przy zastosowaniu nastawnego wzorca impedancji  $\underbrace{Z_N}_{f_N}$  - należy się jednak liczyć z pewnym zwiększeniem niepewności pomiaru  $\underbrace{\pm \delta_{Z_X}}_{f_X}$  z uwagi na ograniczoną dokładność wzorców nastawnych typu RC.

### Przykład

Dla analizowanego, przykładowego mostka - odpowiednie niepewności pomiaru składowych  $(\pm \delta_{R_X}, \pm \delta_{C_X})$  lub  $(\pm \delta_{C_X}, \pm \delta_{Lg\delta_X})$  przedstawiono za pomocą wzorów:

- przy pomiarze składowych ( $R_X; C_X$ ):

$$\underbrace{(\pm \delta_{R_X})^2}_{f_X} = \underbrace{(\pm \delta_{R_2})^2}_{f_X} + \underbrace{(\pm \delta_{R_4})^2 + (\pm \delta_{R_N})^2}_{f_N} \quad (23a)$$

i

$$\underbrace{(\pm \delta_{C_X})^2}_{f_X} = \underbrace{(\pm \delta_{R_2})^2}_{f_X} + \underbrace{(\pm \delta_{R_4})^2 + (\pm \delta_{C_N})^2}_{f_N} + (\pm \delta_{f_X})^2 + (\pm \delta_{f_N})^2, \quad (23b)$$

- przy pomiarze składowych ( $C_X; tg\delta_X$ ):

$$\underbrace{(\pm \delta_{C_X})^2}_{f_X} = \underbrace{(\pm \delta_{R_2})^2}_{f_X} + \underbrace{(\pm \delta_{R_4})^2 + (\pm \delta_{C_N})^2}_{f_N} + (\pm \delta_{f_X})^2 + (\pm \delta_{f_N})^2 \quad (24a)$$

i

$$\underbrace{(\pm \delta_{tg\delta_X})^2}_{f_X} = \underbrace{(\pm \delta_{f_N})^2 + (\pm \delta_{R_N})^2 + (\pm \delta_{C_N})^2}_{f_N}. \quad (24b)$$

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono nową, oryginalną koncepcję budowy dwuźródłowych układów mostkowych przeznaczonych do badań dielektryków, zasilanych napięciami  $E_X(t) = |E_X| \sin(2\pi f_X t)$  i  $E_N(t) = |E_N| \sin(2\pi f_N t)$  o jednakowych amplitudach:

$|E_X| = |E_N| = |E|$  i o krotnych częstotliwościach:  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$ , gdzie  $k \in N$ . Z przeprowa-

dzonej analizy metrologicznej omawianej klasy mostków wynika, że jest możliwe ich zastosowanie zarówno do pomiaru składowych ( $R_X; C_X$ ), jak i ( $C_X; tg\delta_X$ ) badanego dielektryka o impedancji  $Z_X$ .

Ponadto z analizy równań równowagi mostka dla prądowego lub napięciowego wskaźnika zera WZ (por. wzory (11a) lub (12a)) wynika, że zaproponowany dwuźródłowy układ mostkowy posiada równanie równowagi w dającej się wykorzystać prostej postaci tylko dla napięciowego wskaźnika zera WZ, o impedancji  $\underbrace{|Z_{WZ}|}_{f_X \cdot f_N} \rightarrow \infty$ .

W ogólnym przypadku błąd częstotliwościowy  $\delta_{Z_X}(f_X)$  pomiaru impedancji  $Z_X$  omawianej klasy mostków jest równy wprost wartości błędu częstotliwościowego impedancji  $Z_2$ ,

tj.  $\delta_{z_x}(f_x) = \delta_{z_2}(f_x)$ , natomiast ich zastosowanie do pomiaru współczynnika strat dielektrycznych  $tg\delta_x$  przy dowolnej częstotliwości  $f_x$  umożliwia pomiar  $tg\delta_x$  z zerowym błędem częstotliwościowym  $\delta_{ig\delta_x}(f_x) = 0$  i z niepewnością  $\pm\delta_{ig\delta_x}(f_x) = \pm\delta_{ig\delta_N}(f_N)$  równą wprost niepewności  $\pm\delta_{ig\delta_N}(f_N)$  zastosowanego wzorca impedancji  $Z_N$ , co jest korzystne pod wieloma względami. W pozostałym zakresie analizowana klasa dwuzródłowych mostków posiada podstawowe parametry metrologiczne (czułość, zbieżność, niepewność) porównywalne w stosunku do klasycznych układów mostkowych [1, 6, 7].

## LITERATURA

1. Gładysz T.: Analiza właściwości metrologicznych wybranych układów mostkowych, Praca dyplomowa magisterska, Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej, Politechnika Śląska, Gliwice 2000.
2. Guzik J.: Szerokopasmowe układy pomiarowe do badania dielektryków, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1996.
3. Guzik J.: Warunki bezpośredniego odczytu w układzie aktywnego równonapięciowego komparatora przeznaczonego do szerokopasmowych badań dielektryków, ZN Pol. Śl., ser. Elektryka, z. 158, Gliwice 1997.
4. Guzik J.: Błąd częstotliwościowy aktywnych równonapięciowych komparatorów admitancji przeznaczonych do szerokopasmowych badań dielektryków i możliwości jego minimalizacji, ZN Pol. Śl., ser. Elektryka, z. 178, Gliwice 2001.
5. Kaliski S.: Drgania i fale, PWN, Warszawa 1966.
6. Karandziejew K.B.: Pomiarы elektryczne metodami mostkowymi i kompensacyjnymi, PWN, Warszawa 1969.
7. Sydenham P.H.: Podręcznik metrologii. Podstawy praktyczne, t.2, Warszawa 1990.
8. Wodziński J.: Wysokonapięciowa technika prób i pomiarów, PWN, Warszawa 1997.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Leszek KIEŁTYKA

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 października 2002 r.

## Abstract

The paper presents the basic assumptions for construction of two-source circuits supplied with sinusoidal voltages  $E_X(t) = |E_X| \sin(2 \cdot \pi \cdot f_X t)$  and  $E_N(t) = |E_N| \sin(2 \cdot \pi \cdot f_N t)$  of

the same amplitudes  $|E_X| = |E_N|$  and multiple frequencies that is the frequencies for which the following relation  $\frac{f_X}{f_N} = (k)^{\pm 1}$  is true, where  $k \in N$ . Their schematic diagram is shown in Fig.2. These circuits are used for investigations of dielectrics. The selection of multiple frequencies  $f_X$  and  $f_N$  allows the significant simplification of the bridge balance equations (compare Eqs.(6) and (13b)) and makes it easy to choose a voltage null indicator WZ (see Fig.2.). For that class of bridge circuits the frequency error  $\delta_{Z_X}(f_X)$  of the impedance  $Z_X$  measurement is equal to the frequency error of the impedance  $Z_2$  (see Fig.2.), that is  $\delta_{Z_X}(f_X) = \delta_{Z_2}(f_X)$ . The feature distinguishing that class of bridges is, moreover, the zero value of the frequency error when measuring the dielectric loss factor  $tg\delta_X$  that is  $\delta_{tg\delta_X}(f_X) = 0$ . It is advantageous for application to wide-band investigations of dielectrics. The other basic metrological parameters (i.e. sensitivity, convergence and measurement uncertainty) are similar to those of classic bridge circuits of the general schematic diagram shown in Fig.1.