

Maria BOJARSKA
Janusz GUZIK

OCENA WARTOŚCI STOSUNKU SYGNAŁ – SZUM W RÓWNONAPIĘCIOWYM KOMPARATORZE ADMITANCJI DIELEKTRYKÓW PRZY PRZETWARZANIU SKRAJNIE MAŁYCH PRĄDÓW INFRANISKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI ($10^{-3} - 10$) Hz

Streszczenie. W artykule przeprowadzono ocenę wartości stosunku sygnał-szum SNR (ang. Signal-to-Noise Ratio) w wybranych punktach schematu aktywnego równonapięciowego komparatora admitancji dielektryków. Przeanalizowano wpływ wybranych parametrów związanych z układami konwerterów prąd-napięcie o transmittancjach H_X i H_N ogólnego schematu ideowego komparatora na wartość stosunku sygnał-szum oraz wskazano sposoby jego maksymalizacji.

ESTIMATION OF SIGNAL -TO- NOISE RATIO FOR DIELECTRIC ADMITTANCE EQUIVOLTAGE COMPARATOR AT SMALL CURRENTS OF INFRA-LOW FREQUENCIES ($10^{-3} - 10$) Hz

Summary. The paper presents evaluation of the value of the signal-to-noise ratio (SNR) for the input circuit of a null indicator of an active, equivoltage comparator of dielectric admittance. The influence of selected parameters of the converter current-voltage circuits (i/u) with transmittances H_X i H_N as well as of the null indicator WZ of the comparator general schematic diagram on the SNR value is analyzed. The ways of maximization of the SNR value are shown as well.

1. WSTĘP

Pomiary składowych admitancji Y_X dielektryków (w celu określenia np. względnej przenikalności elektrycznej ϵ_r lub współczynnika strat dielektrycznych $\text{tg}\delta$) w nietypowym zakresie infraniskich częstotliwości ($10^{-3} - 10$) Hz mogą ujawnić pewne ich właściwości, niewykrywalne dotąd w innych zakresach częstotliwości [5, 7], co ma znaczenie przy opracowaniu nowych metod diagnostycznych izolacji elektrycznej.

Do tego celu między innymi są stosowane układy aktywnych równonapięciowych komparatorów admitancji z kompensacją napięć U_X i U_N o schemacie ideowym przedstawionym na rys. 1.

Równanie przetwarzania i komparacji dla tego układu opisują zależności [5]:

$$\Delta U = U_X - U_N = I_X H_X - I_N H_N = E_g Y_X H_X - E_g Y_N H_N \quad (1a)$$

$$Y_X = \frac{H_N}{H_X} Y_N, \quad (1b)$$

gdzie:

E_g - źródło napięcia zasilającego układ komparatora,

ΔU - sygnał wyjściowy komparatora,

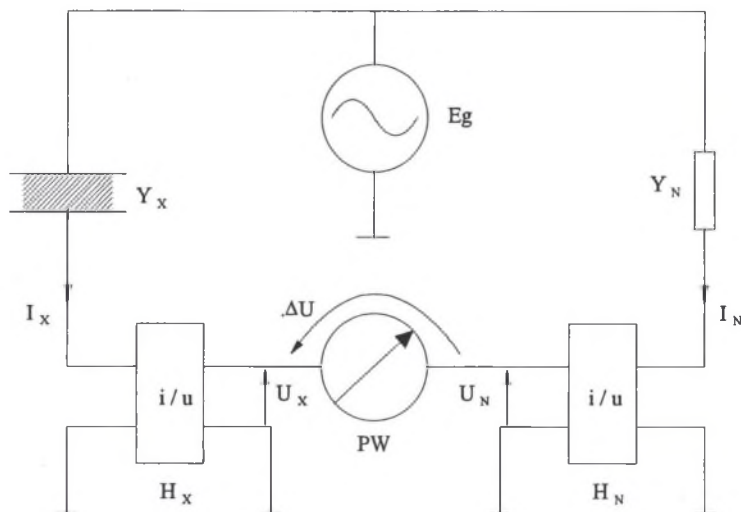
$\{I_X, I_N\}$ - prądy płynące przez komparowane admitancje:

$$Y_X = G_X + j2\pi C_X \quad \text{i} \quad Y_N = G_N + j2\pi C_N,$$

$\{U_X, U_N\}$ - (odpowiednio) sygnały wyjściowe zastosowanych konwerterów prąd-napięcie

(i/u) o transmitancjach $H_X = H_X(f) = |H_X(f)|e^{j\phi_X(f)}$

i $H_N = H_N(f) = |H_N(f)|e^{j\phi_N(f)}$.



Rys. 1. Schemat ideowy komparatora admitancji dielektryków z kompensacją napięć U_X i U_N
 Fig. 1. Schematic diagram of dielectric admittance comparator circuit with compensation of voltages U_X and U_N

Pomiary (składowych) admitancji $Y_X = Y_X(2\pi f)$ wykonywane w założonym zakresie infraniskich częstotliwości $10^{-3} \text{ Hz} = f_{\min} \leq f \leq f_{\max} = 10 \text{ Hz}$ wymagają uwzględnienia wielu czynników mających wpływ na ograniczenie dokładności pomiaru, w tym szczególnie szumów własnych układu komparatora [4, 5, 6].

Szумы są sygnałami stochastycznymi, do oceny których stosuje się wiele różnych miar [1, 2, 6]; jedną z nich jest stosunek sygnał-szum SNR (ang. Signal-to-Noise Ratio) [4, 6].

W obwodzie wyjściowym wskaźnika zera WZ komparatora, którego schemat ideowy przedstawiony jest na rys.1, stosunek sygnał-szum SNR można zdefiniować następująco:

$$SNR_{WZ} = \frac{d| \Delta U | \cdot | H_{WZ}(f) |}{\sqrt{e_{WZ}^2}} = \frac{| \Delta U | \cdot | H_{WZ}(f) |}{\sqrt{e_{\Delta U}^2} \cdot | H_{WZ}(f) |} = \frac{| \Delta U |}{\sqrt{e_{\Delta U}^2}}, \quad (2)$$

gdzie:

$\Delta|U| = |U_X - U_N| = |Eg| \cdot |Y_X H_X - Y_N H_N|$ - skuteczna wartość sygnału wyjściowego komparatora,

$\sqrt{e_{WZ}^2}, \sqrt{e_{\Delta U}^2}$ - skuteczne wartości równoważnych napięć szumów w obwodach: wyjściowym i wejściowym wskaźnika zera WZ,

$H_{WZ} = H_{WZ}(f) = |H_{WZ}(f)|e^{j\phi_{WZ}(f)}$ - transmitancja zastosowanego wskaźnika zera WZ.

Celem pracy jest wskazanie możliwości maksymalizacji wartości stosunku sygnał-szum SNR_{WZ} opisanego wzorem (2) w założonym zakresie częstotliwości $10^{-3} \text{ Hz} = f_{\min} \leq f \leq f_{\max} = 10 \text{ Hz}$, praktycznie sprowadzającej się do minimalizacji wartości skutecznej $\sqrt{e_{\Delta U}^2}$ (lub średniokwadratowej $e_{\Delta U}^2$) równoważnego napięcia szumów w obwodzie wejściowym wskaźnika zera WZ:

$$\text{Max}\{SNR_{WZ}\} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \text{Min}\left\{\sqrt{e_{\Delta U}^2}\right\} \Leftrightarrow \text{Min}\left\{e_{\Delta U}^2\right\}. \quad (3)$$

2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI DLA SZUMOWEGO SCHEMATU ZASTĘPCZEGO KOMPARATORA

Celem dalszej analizy układ komparatora admitancji dielektryków przedstawiony na rys.1 zastąpiono szumowym schematem zastępczym jak na rys.2. Odpowiednie zależności wynikające z przyjętego schematu zastępczego są następujące:

$$SNR_{WZ}^{(2)} = \frac{|\Delta U|}{\sqrt{e_{wz}^2 + i_{inX}^2 \cdot |H_X(f)|^2 + i_{inN}^2 \cdot |H_N(f)|^2}}, \quad (4a)$$

$$i_{inX}^2 = i_{HX}^2 + i_{YX}^2, \quad (4b)$$

$$i_{inN}^2 = i_{HN}^2 + i_{YN}^2. \quad (4c)$$

gdzie:

e_{wz}^2 - średniokwadratowa wartość równoważnego napięcia szumów w obwodzie wejściowym wzmacniacza wskaźnika zera WZ,

i_{HX}^2, i_{HN}^2 - średniokwadratowe wartości równoważnych prądów szumów w obwodach wejściowych wzmacniaczy konwerterów prąd-napięcie (i/u) o transmitancjach H_X i H_N ,

$i_{YX}^2 = 4kTG_X \Delta f_Z$ i $i_{YN}^2 = 4kTG_N \Delta f_Z$ - średniokwadratowe wartości prądów szumów cieplnych konduktancji:

$$G_X = \text{Re}(Y_X) = \text{Re}(G_X + j2\pi f C_X) \text{ i } G_N = \text{Re}(Y_N) = \text{Re}(G_N + j2\pi f C_N),$$

$k = 1,3803 \cdot 10^{-23} \text{ W} \cdot \text{s/K}$ - stała Boltzmanna,

T - temperatura bezwzględna, w jakiej znajdują się konduktancje G_X i G_N ,

$\Delta f_Z = f_{\min} - f_{\max} \approx f_{\max} = 10 \text{ Hz}$ - zakres częstotliwości pracy komparatora.

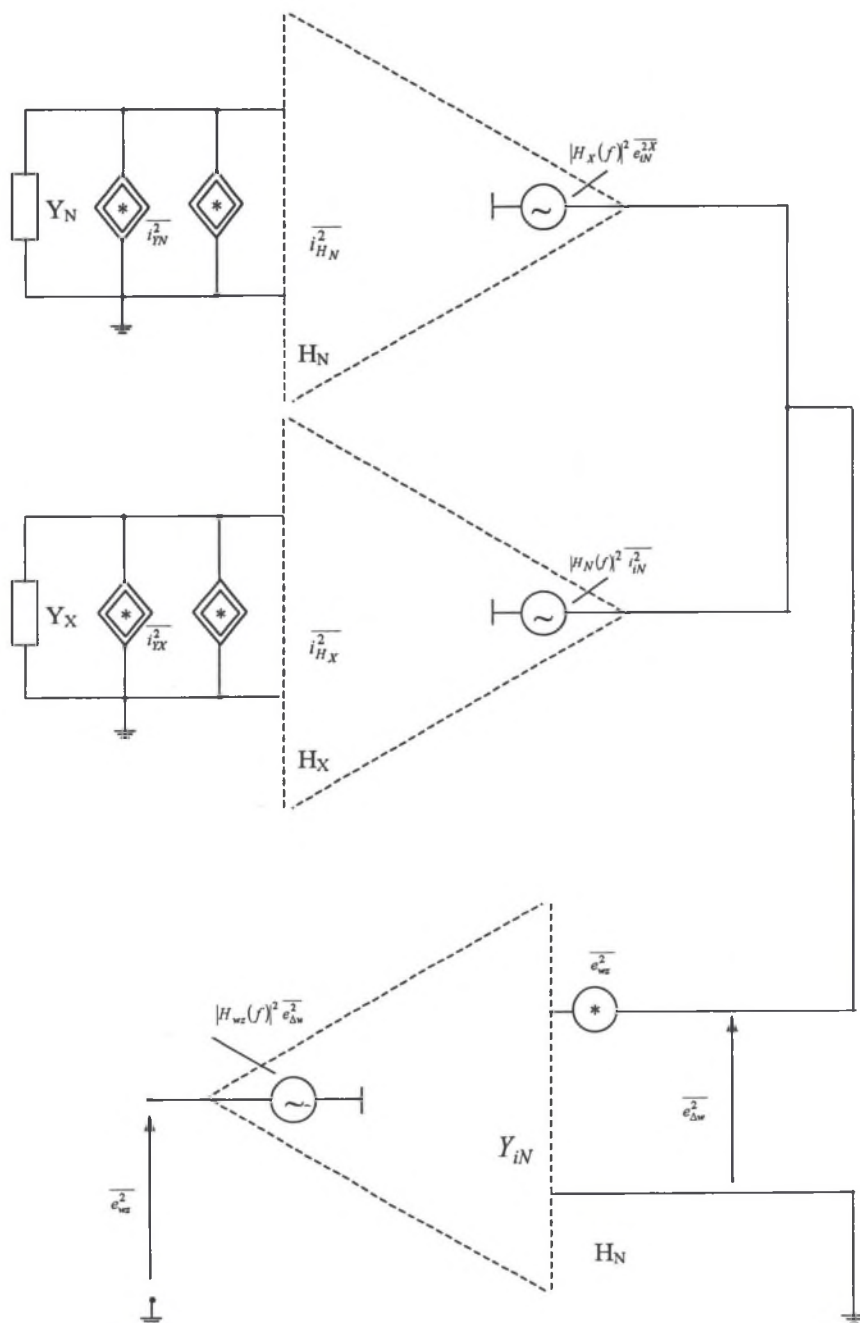
Po podstawieniu zależności (4b) i (4c) do wzoru (4a) wartość stosunku sygnał-szum SNR_{WZ} przyjmuje postać:

$$SNR_{WZ} = \frac{|\Delta U|}{\sqrt{e_{wz}^2 + \left(i_{HX}^2 + i_{YX}^2\right) \cdot |H_X(f)|^2 + \left(i_{HN}^2 + i_{YN}^2\right) \cdot |H_N(f)|^2}}. \quad (5)$$

Wówczas, zgodnie z relacją (3), można zapisać:

$$\begin{aligned} \text{Max}\{SNR_{WZ}\} = \\ \text{Min}\left\{ \underbrace{e_{wz}^2 + \left(i_{HX}^2 + i_{YX}^2\right) \cdot |H_X(f)|^2 + \left(i_{HN}^2 + i_{YN}^2\right) \cdot |H_N(f)|^2}_{\xi(f)} \right\}, \quad (6) \\ = \text{Min}\{\xi(f)\} \end{aligned}$$

co odpowiada jednoczesnej minimalizacji poszczególnych składników wielkości $\xi(f)$, występujących we wzorze (6).



Rys.2. Szumowy schemat zastępczy analizowanego komparatora admittance dielektryków
 Fig.2. Noise equivalent schematic diagram of the analysed dielectric admittance comparator

W dalszym ciągu należy podkreślić, że średniokwadratowe wartości równoważnych:

- napięć szumów $\overline{e_{wz}^2} = \overline{e_{wz}^2}(f)$ w obwodzie wejściowym wskaźnika zera WZ,
- prądów szumów $\overline{i_{H_X}^2} = \overline{i_{H_X}^2}(f)$ i $\overline{i_{H_N}^2} = \overline{i_{H_N}^2}(f)$ w obwodach wejściowych konwerterów prąd-napięcie (i/u) o transmitancjach H_X i H_N ,

są funkcjami częstotliwości f , wykazując przy tym silną tendencję rosnącą dla zmian częstotliwości $f \rightarrow f_{\min}$, co związane jest z faktem, że główną składową tych szumów są szумы typu $1/f$ [4, 6].

Z tego też względu w katalogach wzmacniaczy operacyjnych podaje się na ogół częstotliwościowe charakterystyki zmian wypadkowych, średniokwadratowych wartości równoważnych napięć szumów $\overline{e^2} = \overline{e^2}(f)$ lub prądów szumów $\overline{i^2} = \overline{i^2}(f)$ [6].

Dla założonego zakresu częstotliwości $10^3 \text{ Hz} = f_{\min} \leq f \leq f_{\max} = 10 \text{ Hz}$, częstotliwościowe charakterystyki zmian $\overline{e^2} = \overline{e^2}(f)$ lub $\overline{i^2} = \overline{i^2}(f)$ praktycznie można zapisać w postaci:

$$\overline{e_{wz}^2} = \overline{e_{wz}^2}(f) = A_{wz} e^{-B_{wz}f}, \quad (7a)$$

$$\overline{i_{H_X}^2} = \overline{i_{H_X}^2}(f) = K_{H_X} e^{-L_{H_X}f}, \quad (7b)$$

$$\overline{i_{H_N}^2} = \overline{i_{H_N}^2}(f) = K_{H_N} e^{-L_{H_N}f} \quad (7c)$$

gdzie:

$A_{wz}, B_{wz}, K_{H_X}, L_{H_X}, K_{H_N}, L_{H_N}$ - są pewnymi stałymi, które można przy tym wyznaczyć w przybliżony sposób, podany w załączniku, posługując się w tym celu odpowiednimi charakterystykami zmian $\overline{e^2} = \overline{e^2}(f)$ lub $\overline{i^2} = \overline{i^2}(f)$ zastosowanych wzmacniaczy operacyjnych podawanych w katalogach (np. [3]).

3. MAKSYMALIZACJA WARTOŚCI STOSUNKU SYGNAŁ-SZUM SNR_{wz} KOMPARATORA

Podstawiając odpowiednie zależności funkcyjne (7a) - (7c) do relacji (6) otrzymuje się następujący zakres zmienności wyrażenia $\xi(f)$ podlegającego minimalizacji:

$$\xi(f_{\max}) \leq \xi(f) \leq \xi(f_{\min}), \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \xi(f_{\max}) = & A_{WZ} e^{-B_{WZ} f_{\max}} + \left(K_{H_X} e^{-L_{H_X} f_{\max}} + i \bar{Y}_X^2 \right) \cdot |H_X(f_{\max})|^2 + \\ & + \left(K_{H_N} e^{-L_{H_N} f_{\max}} + i \bar{Y}_N^2 \right) \cdot |H_N(f_{\max})|^2 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \xi(f_{\min}) = & A_{WZ} e^{-B_{WZ} f_{\min}} + \left(K_{H_X} e^{-L_{H_X} f_{\min}} + i \bar{Y}_X^2 \right) \cdot |H_X(f_{\min})|^2 + \\ & + \left(K_{H_N} e^{-L_{H_N} f_{\min}} + i \bar{Y}_N^2 \right) \cdot |H_N(f_{\min})|^2 \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\bar{Y}_X^2 = 4kT G_X \Delta f_Z = 4kT G_X (f_{\max} - f_{\min}) \approx 4kT G_X f_{\max} \quad , \quad (8c)$$

$$\bar{Y}_N^2 = 4kT G_N \Delta f_Z = 4kT G_N (f_{\max} - f_{\min}) \approx 4kT G_N f_{\max} \quad , \quad (8d)$$

$$G_X = \operatorname{Re}(Y_X) = \operatorname{Re}(G_X + j 2\pi f C_X) \quad \text{i} \quad G_N = \operatorname{Re}(Y_N) = \operatorname{Re}(G_N + j 2\pi f C_N).$$

Z analizy wyrażenia (8) wynika, że maksymalizację wartości stosunku sygnał-szum SNR_{WZ} komparatora można sprowadzić do minimalizacji wyrażenia $\xi(f_{\min})$.

W celu dalszej analizy wyrażenia $\xi(f_{\min})$ należy zauważyć, że dla założonego zakresu częstotliwości $10^{-3} \text{ Hz} = f_{\min} \leq f \leq f_{\max} = 10 \text{ Hz}$ wartość stosunku transmitancji $\frac{H_N(f)}{H_X(f)}$

przyjmuje na ogół postać: $\frac{H_N(f)}{H_X(f)} \approx \frac{|H_N(f)|}{|H_X(f)|}$, a wtedy na potrzeby dalszych rozważań

z równania porównania (1b) wynikają następujące związki:

$$G_X = \frac{|H_N(f)|}{|H_X(f)|} G_N \quad \text{i} \quad C_X = \frac{|H_N(f)|}{|H_X(f)|} C_N \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \delta_X = \operatorname{tg} \delta_N, \quad (9a)$$

oraz

$$|H_N(f)| = |H_X(f)| \cdot \frac{|Y_X|}{|Y_N|} = |H_X(f)| \frac{C_X}{C_N} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta_X(f) + 1}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta_N(f) + 1}} \approx |H_X(f)| \frac{C_X}{C_N}, \quad (9b)$$

gdzie:

$$\operatorname{tg} \delta_X(f) = \frac{G_X}{2\pi f C_X}, \quad \operatorname{tg} \delta_N(f) = \frac{G_N}{2\pi f C_N} - \text{współczynnik strat dielektrycznych badanego}$$

dielektryka i zastosowanego wzorca admittancji Y_N dla częstotliwości f .

Podstawiając wzory (9a) - (9b) do zależności (8b) po przekształceniach otrzymuje się:

$$\xi(f_{\min}) = A_{WZ} e^{-B_{WZ} f_{\min}} + \left[K_{H_X} e^{-L_{H_X} f_{\min}} + 4kT G_X f_{\max} \left(1 + \frac{C_X}{C_N} \right) + \left[K_{H_N} e^{-L_{H_N} f_{\min}} \left(\frac{C_X}{C_N} \right)^2 \right] \right] \cdot |H_X(f_{\min})|^2. \quad (10)$$

Przyjmując następnie założenie upraszczające, że konwertery prąd-napięcie (i/u) o transmitancjach H_X i H_N są pod względem szumowym „jednorodne”, tzn. zakładając równość odpowiednich współczynników: $K_{H_X} = K_{H_N} = K$ i $L_{H_X} = L_{H_N} = L$, wyrażenie (10) można zapisać w postaci:

$$\xi(f_{\min}) = A_{WZ} e^{-B_{WZ} f_{\min}} + \left\{ \left[1 + \left(\frac{C_X}{C_N} \right)^2 \right] K e^{-L f_{\min}} + 4kT G_X f_{\max} \left(1 + \frac{C_X}{C_N} \right) \right\} |H_X(f_{\min})|^2. \quad (11)$$

Minimalizację wyrażenia (11) można uzyskać w dwojaki sposób:

- (I) - nakładając odpowiednie ograniczenia na zakres pomiarowy wielkości mierzonych (G_X, C_X) ,
- (II) - zapewniając odpowiedni dobór wartości $|H_X(f_{\min})|$.

Ad I. Jak łatwo zauważyć, przy niezmienniej wartości $|H_X(f_{\min})|$, dla każdej wartości G_X wyrażenie $\xi(f_{\min})$ uzyskuje wartość minimalną dla $\frac{C_X}{C_N} \rightarrow 0$, natomiast dla $\frac{C_X}{C_N} > 0$ również wartość $\xi(f_{\min}) > 0$. Oznacza to, że niezależnie od wartości mierzonych składowych (G_X, C_X) , wyrażenie $\xi(f_{\min})$ uzyskuje wartość $\xi(f_{\min}) > 0$, a zatem minimalizacja wyrażenia (11) może co najwyżej odbywać się poprzez odpowiedni dobór wzmacniaczy operacyjnych zastosowanych do budowy konwerterów prąd-napięcie (i/u) o transmitancjach H_X i H_N , tzn. poprzez odpowiedni dobór wartości współczynników: K i L .

Ad II. Gdy postępuje się w podobny sposób, przy niezmiennych wartościach (G_X, C_X) , wyrażenie $\xi(f_{\min})$ uzyskuje wartość minimalną dla $|H_X(f_{\min})| \rightarrow 0$, a zatem minimalizacja wyrażenia (11) sprowadza się do doboru wartości $|H_X(f_{\min})|$ wynikającej z warunku zadowalającej czułości [5]:

$$|H_X(f_{\min})| \geq |H_X(f_{\min})|_{\min}, \quad (12)$$

gdzie:

$|H_X(f_{\min})|_{\min}$ - wynika ze spełnienia nierówności:

$$|S| \stackrel{df}{=} \frac{\partial |\Delta U|}{|\Delta Y_X|} = |Eg(f_{\min})| \cdot |H_X(f_{\min})| \geq |S|_{\min},$$

gdzie:

$$|S|_{\min} \stackrel{df}{=} |Eg(f_{\min})| \cdot |H_X(f_{\min})|_{\min}.$$

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono oryginalną metodę oceny wartości stosunku sygnał-szum SNR_{WZ} równonapięciowego komparatora admitancji o schemacie jak na rys. 1.

Z przeprowadzonej analizy omawianej klasy komparatorów wynika, że maksymalizacja stosunku sygnał-szum SNR_{WZ} równonapięciowego komparatora admitancji dielektryków wymaga odpowiedniego doboru wartości współczynników K i L wzmacniaczy operacyjnych, zastosowanych w obwodach wejściowych konwerterów prąd-napięcie, tzn. uzyskaniu jak najmniejszej wartości wyrażenia $K \cdot e^{-L \cdot f_{\min}}$ występującego we wzorze (11), lub odpowiedniego doboru wartości modułu transmitancji $|H_X(f_{\min})|$ konwertera prąd-napięcie zapewniającego spełnienie warunku zadowalającej czułości (por. równanie (12)), niezależnie od zakresu zmian mierzonych wielkości (G_X, C_X) lub $(G_X, tg\delta_X)$.

Załącznik

Oszacowanie wartości parametrów szumowych wzmacniaczy operacyjnych $\{A_{WZ}, B_{WZ}, K_{H_X}, L_{H_X}, K_{H_N}, L_{H_N}\}$ występujących we wzorach (7a) - (7c).

Przy pominięciu indeksów, wartości średniokwadratowych równoważnych napięć i prądów szumów przyjmują odpowiednio postać: $\bar{e}^2 = e^2(f) = A e^{-B \cdot f}$ oraz $\bar{i}^2 = i^2(f) = K e^{-L \cdot f}$.

Odczytując z charakterystyk szumowych wzmacniaczy operacyjnych zamieszczanych w katalogach (np. [3]) wartości średniokwadratowych równoważnych napięć i prądów szumów dla dwóch różnych częstotliwości f_1 i f_2 (np. $f_1 = 1$ Hz i $f_2 = 10$ Hz), tzn.:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= Ae^{-B f_1} \\ e_2 &= Ae^{-B f_2} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Z.1a})$$

lub

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= Ke^{-L f_1} \\ i_2 &= Ke^{-L f_2} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Z.1b})$$

można zapisać:

$$\frac{e_1}{e_2} = e^{B(f_2-f_1)} \quad \text{oraz} \quad \frac{i_1}{i_2} = e^{L(f_2-f_1)}, \quad (\text{Z.2})$$

a stąd

$$B = \frac{1}{f_2 - f_1} \ln\left(\frac{e_1}{e_2}\right) \quad \text{oraz} \quad L = \frac{1}{f_2 - f_1} \ln\left(\frac{i_1}{i_2}\right), \quad (\text{Z.3})$$

i

$$A = e_1 e^{-B f_1} = e_2 e^{-B f_2} \quad \text{oraz} \quad K = i_1 e^{-L f_1} = i_2 e^{-L f_2}. \quad (\text{Z.4})$$

LITERATURA

1. Bojarska M.: Ocena przenoszenia sygnałów stochastycznych przez liniowe przetworniki pomiarowe, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1979.
2. Bojarska M.: Wpływ szerokości pasma przenoszenia przetwornika pomiarowego na zniekształcenia przenieszonego sygnału stochastycznego, ZN Pol. Śl., ser. Elektryka, z. 108, Gliwice 1989.
3. Burr-Brown IC Data Book. Linear Products, Tucson 1994.
4. Guzik J.: Ocena granicznej zdolności rozdzielczej konwertera prąd-napięcie przy przetwarzaniu skrajnie małych prądów infraniskiej częstotliwości (10^{-3} - 10) Hz, ZN Pol. Śl., ser. Elektryka, z. 128, Gliwice 1992.
5. Guzik J.: Szerokopasmowe układy pomiarowe do badania dielektryków, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1996.
6. Hasse L., Spiralski L.: Szumy elementów i układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.
7. Wodziński J.: Wysokonapięciowa technika prób i pomiarów, PWN, Warszawa 1998.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Leszek KIELTYKA

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 października 2002 r.

Abstract

The paper presents evaluation of the value of the signal-to-noise ratio (SNR) for the input circuit of a null indicator of an active, equivoltage comparator of dielectric admittance. The comparator schematic diagram is shown in Fig.1. The conversion equation of the comparator is given by

$$\Delta U = U_X - U_N = I_X H_X - I_N H_N = EgY_X H_X - EgY_N H_N, \quad (1a)$$

while the comparison formula of the circuit being analyzed is expressed by

$$Y_X = \frac{H_N}{H_X} Y_N, \quad (1b)$$

where:

E_g - voltage source supplying the comparator circuit,

ΔU - output signal of the comparator,

$\{I_X, I_N\}$ - currents flowing through the admittances being compared, namely

$$Y_X = G_X + j 2\pi C_X \text{ and } Y_N = G_N + j 2\pi C_N,$$

$\{U_X, U_N\}$ - output signals of the used current-voltage converters of the transmittances

$$H_X = H_X(f) = |H_X(f)|e^{j\Phi_X(f)} \text{ and } H_N = H_N(f) = |H_N(f)|e^{j\Phi_N(f)}.$$

The signal-to-noise ratio (SNR) for the output circuit of the null indicator is described by Eq. (2)

$$SNR_{WZ} = \frac{dU}{\sqrt{e_{WZ}^2}} = \frac{|dU| \cdot |H_{WZ}(f)|}{\sqrt{e_{\Delta U}^2} \cdot |H_{WZ}(f)|} = \frac{|dU|}{\sqrt{e_{\Delta U}^2}}, \quad (2)$$

where:

$$d|U| = |U_X - U_N| \stackrel{(1a)}{=} |Eg| \cdot |Y_X H_X - Y_N H_N| - \text{rms value of output comparator signal,}$$

$\sqrt{e_{WZ}^2}, \sqrt{e_{\Delta U}^2}$ - rms values of the noise equivalent voltages in the null indicator circuit,

$$H_{WZ} = H_{WZ}(f) = |H_{WZ}(f)|e^{j\Phi_{WZ}(f)} - \text{transmittance of applied null indicator circuit.}$$

Maximization of the SNR results in minimization of the value $\sqrt{e_{\Delta U}^2}$ (compare Eq.(3)). In the paper there are also derived the detailed relationships (5) and (6), in which optimization is brought to minimization of the expression $\xi(f)$, e.g.:

$$\text{Min}\{\xi(f)\} = \text{Min} \left\{ \underbrace{e_{wz}^2 + \left(i_{H_X}^2 + i_{Y_X}^2\right) \cdot |H_X(f)|^2 + \left(i_{H_N}^2 + i_{Y_N}^2\right) \cdot |H_N(f)|^2}_{\xi(f)} \right\}, \quad (3)$$

where:

e_{wz}^2 – mean-square value of the equivalent noise voltage in the output circuit of the null indicator WZ,

$i_{H_X}^2, i_{H_N}^2, i_{Y_X}^2, i_{Y_N}^2$ – mean-square values of the equivalent noise currents in the input circuits of current-voltage converters as well as mean-square values of the thermal noises of conductances G_X and G_N .

From the considerations it follows that

$$\begin{aligned} \text{Min}\xi(f) = \text{Min}\xi(f_{\min}) = & \text{Min}\left\{A_{WZ} e^{-B_{WZ} f_{\min}}\right\} + \\ & + \text{Min}\left\{\left[1 + \left(\frac{C_X}{C_N}\right)^2\right] Ke^{-L f_{\min}} + 4kT G_X f_{\max} \left(1 + \frac{C_X}{C_N}\right)\right\} \cdot |H_X(f_{\min})|^2 \end{aligned}$$

where minimization of the $\xi(f_{\min})$ results in limitation of the measuring range for $\{G_X, C_X\}$ and the appropriate selection of the transmittances $|H_X(f_{\min})|$.