

Bogusław JANUSZEWSKI

Zakład Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Rzeszowska, Rzeszów

RZUTOWANIA PODPRZESTRZENIOWE O ŚRODKACH WIĄZKOWO ROZPROSZONYCH

Streszczenie. W niniejszym opracowaniu zdefiniowano w n – wymiarowej przestrzeni rzutowej P_n rzutowanie podprzestrzeniowe \mathbf{R} realizowane z wiązkowo rozproszonych środków \mathcal{S}_X . Rzutowanie \mathbf{R} charakteryzuje się tym, że każdemu punktowi $X \in P_n$ przypisuje ono w podprzestrzeniowej rzutni \mathcal{P} jego obraz $X^{\mathbf{R}} = \mathcal{P} \cap (X \mathbf{O} \mathcal{S}_X)$, gdzie \mathcal{S}_X jest indywidualnie przypisanym punktowi X środkiem rzutowania będącym elementem wyróżnionej wiązki. Dla rzutowania \mathbf{R} określono właściwości aparatu rzutowania, utworów rzutujących i obrazów podprzestrzeni przestrzeni P_n . W wyniku przeprowadzonych analiz udowodniono, że rzutowanie \mathbf{R} jest rzutowaniem drugiego stopnia.

SUBSPACE PROJECTIONS WITH BUNDLE DISPERSED CENTRES

Summary. In this paper the \mathbf{R} subspace projection with \mathcal{S}_X bundle dispersed centres is defined as a transformation of a n – dimensional P_n projective space. The characteristic of the \mathbf{R} projection is that it attributes to each $X \in P_n$ point in the \mathcal{P} projection hyper plane its image $X^{\mathbf{R}} = \mathcal{P} \cap (X \mathbf{O} \mathcal{S}_X)$, where \mathcal{S}_X is a centre of the \mathbf{R} projection separately assigned from a distinguished bundle of subspaces to the point X . Moreover the property of projection apparatus, projection formations and images of P_n space subspaces in the \mathbf{R} projection was qualified in the paper. In result of conducted analyses was proved, that the \mathbf{R} projection belonged to the family of second degree projections.

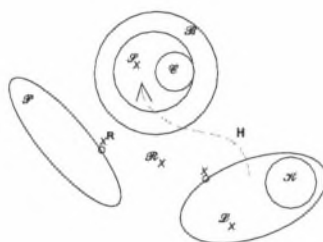
Metody graficzne stosowane, między innymi, w zapisie modeli geometrycznych obiektów technicznych wymagają użycia przekształcenia, zwanego rzutowaniem \mathbf{R} przestrzeni P , zawierającej zapisywane modele, na pewien podzbiór punktów \mathcal{P} tej przestrzeni noszący nazwę rzutni. Rzutowanie \mathbf{R} przypisuje każdemu punktowi X przestrzeni P jego obraz $X^{\mathbf{R}} \in \mathcal{P}$ będący przekrojem rzutni \mathcal{P} z pewnym utworem \mathcal{R}_X . Utwór \mathcal{R}_X , nazywany utworem rzutującym punktu X , jest generowany przez X oraz odpowiednio wyróżniony w P utwór \mathcal{S}_X zwany środkiem rzutowania \mathbf{R} punktu X na rzutnię \mathcal{P} . W większości znanych rzutowań \mathbf{R} utwory \mathcal{R}_X , \mathcal{S}_X oraz rzutnia \mathcal{P} są podprzestrzeniami odwzorowywanej przestrzeni P . Rzutowania takie nazywane są tutaj *rzutowaniami podprzestrzeniowymi*.

Nawet pobieżny przegląd znanych metod odwzorowań graficznych pozwala zauważyć, że w definiowaniu tych metod najszerszy udział mają rzutowania podprzestrzeniowe o stałym środku rzutowania \mathcal{P} dla wszystkich punktów odwzorowywanej przestrzeni P . Nazywa się je *rzutowaniami wiązkowymi* [1]. Niekiedy jednak znajdują uzasadnienie zastosowania rzutowań podprzestrzeniowych, w których różnym punktom X odwzorowywanej przestrzeni P przypisuje się jednoznacznie, na ogół różne, środki rzutowań \mathcal{S}_X (np. [2, 3, 4]). Środki te mogą być elementami odpowiedniej wiązki podprzestrzeni i wówczas tak pomyślane rzutowanie \mathbf{R} jest uogólnieniem rzutowania wiązkowego i nazywa się je tutaj *rzutowaniem podprzestrzeniowym o środkach wiązkowo rozproszonych*. Omówienie podstawowych właściwości tego rodzaju rzutowań jest tematem niniejszego opracowania.

Przyjmijmy, że odwzorowaniu za pomocą rzutowania podprzestrzeniowego \mathbf{R} o środkach wiązkowo rozproszonych, zwanego dalej krótko rzutowaniem \mathbf{R} , podlega \mathbf{n} – wymiarowa przestrzeń rzutowa $P_{\mathbf{n}}$; $\mathbf{n} \geq 2$. W celu uzyskania możliwości realizacji takiego rzutowania konieczne jest wyróżnienie w $P_{\mathbf{n}}$ tzw. *aparatu rzutowania* \mathbf{R} , który składa się z:

- wiązki $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ podprzestrzeni, zwanej bazą środków rzutowania \mathbf{R} , mającej tę właściwość, iż $\mathbf{n} \geq \dim \mathcal{B} = \mathbf{b} \geq 0$, $\mathbf{b} - 1 \geq \dim \mathcal{C} = \mathbf{c} \geq -1$, wskaźnik rozmaitości $w_{\mathcal{C}}$ wiązki $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ równy jest $(\mathbf{b} - \mathbf{c} + 1)$,
- wiązki $\langle \mathcal{X}, P_{\mathbf{n}} \rangle$ podprzestrzeni, zwanej wiązką przyporządkowań środków, charakteryzującej się wskaźnikiem rozmaitości $w_{\mathcal{X}} = w_{\mathcal{C}}$, a tym samym wymiarem rdzenia \mathcal{X} równym $\mathbf{n} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$,

- przekształcenia rzutowego H wiązki $\langle \mathcal{K}, P_n \rangle$ na wiązkę $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$, które może być kolineacją albo korelacją,
- podprzestrzeni – rzutni \mathcal{P} o wymiarze $p \geq 1$ dobranej tak, że gdy H jest kolineacją (korelacją) to \mathcal{P} wraz z każdym $c+1$, $(b-1)$ wymiarowym elementem wiązki $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ daje w złączu na ogół odwzorowywaną przestrzeń P_n , a w iloczynie - podprzestrzeń o wymiarze nie większym od $p-2$.

Rys.1. Ideogram budowy aparatu rzutowania R Fig.1. Ideogram of structure of R projection apparatus

Przy tak określonym aparacie rzutowania R (rys. 1) każdemu punktowi $X \in P_n$ daje się przypisać w wiązce $\langle \mathcal{K}, P_n \rangle$ element $S_X = X \circ \mathcal{K}$. Z kolei podprzestrzeni S_X odpowiada, za pośrednictwem rzutowości H , element S_X bazy $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ środków rzutowania R , który uznaje się za środek rzutowania R punktu X . Ostatecznie środek S_X w złączu z X wyznacza podprzestrzeń rzutującą \mathcal{R}_X . Jej przekrój z rzutnią \mathcal{P} jest obrazem – rzutem X^R punktu X w rzutowaniu R na rzutnię \mathcal{P} .

Istotnym zagadnieniem charakteryzującym analizowane podprzestrzeniowe rzutowanie R o środkach wiązkowo rozproszonych jest określenie właściwości utworów rzutujących podprzestrzeni przestrzeni P_n . Utwory te traktuje się tutaj jako sumy podprzestrzeni rzutujących poszczególne punkty odwzorowywanych podprzestrzeni. Znajomość struktury utworu rzutującego $\Sigma_{\mathcal{M}}$ podprzestrzeni \mathcal{M} stwarza możliwość ustalenia obrazu – rzutu \mathcal{M}^R tej podprzestrzeni w rzutowaniu R ; $\mathcal{M}^R = \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{P}$.

Dążąc do opisu w rzutowaniu R właściwości utworów rzutujących podprzestrzeni o wymiarach większych od 0 sformułujemy dwa pomocnicze w tym

opisie lematy. Lematy te wynikają z analitycznych zależności podanych np. w [5], a dotyczących właściwości tworów stopnia drugiego wyróżnionych w przestrzeni C_n .

Lemat I. Jeżeli $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ są takimi wiązkami podprzestrzeni przestrzeni P_n , że:

- $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F} = e \geq 1$, lecz $\mathcal{E} \neq \mathcal{F}$,
- $\dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{F}) = e - 1$, tylko wtedy, gdy e jest liczbą parzystą,
- $\mathcal{F} = H(\mathcal{E})$, gdzie H jest przekształceniem kolineacyjnym,

to zbiór Σ_t wszystkich złączy $E_i \circ F_i = t_i$ punktów $E_i \in \langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ oraz $F_i \in \langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ odpowiadających sobie w kolineacji H , jest rodziną tworzących hiperkwadryki skośnej będącej tworem podprzestrzeni $\mathcal{E} \circ \mathcal{F}$.

Lemat II. Jeżeli $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ są takimi wiązkami podprzestrzeni przestrzeni P_n , że:

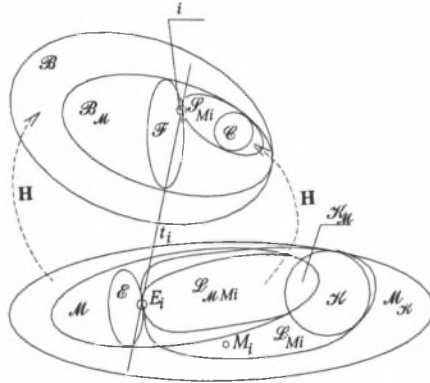
- $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F} = e \geq 1$, lecz $\mathcal{E} \neq \mathcal{F}$,
- $\mathcal{F} = H(\mathcal{E})$, gdzie H jest przekształceniem korelacyjnym,

to zbiór Σ_t wszystkich złączy $E_i \circ \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ punktów $E_i \in \langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ oraz podprzestrzeni $(e - 1)$ – wymiarowych $\mathcal{F}_i \in \langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ odpowiadających sobie w korelacji H , jest rodziną tworzących hiperkwadryki podprzestrzeniowej będącej tworem podprzestrzeni $\mathcal{E} \circ \mathcal{F}$.

Załóżmy w dalszym ciągu, że w przestrzeni P_n wyróżniony jest aparat $\{\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle, \langle \mathcal{H}, P_n \rangle, H, \mathcal{P}\}$ rzutowania R , oraz pewna m – wymiarowa podprzestrzeń \mathcal{M} ($1 \leq m \leq n - 1$) usytuowana w sposób nieszczególny względem \mathcal{B} , \mathcal{C} i \mathcal{H} . Niech $\Sigma_{\mathcal{M}}$ będzie tworem rzutującym podprzestrzeni \mathcal{M} w rzutowaniu R , czyli zbiorem wszystkich podprzestrzeni rzutujących \mathcal{B}_{X_i} poszczególne punkty X_i podprzestrzeni \mathcal{M} . Analizę właściwości utworu $\Sigma_{\mathcal{M}}$ przeprowadzmy dzieląc ją dwa na przypadki, różnicowane rodzajem rzutowego przekształcenia H wchodzącego w skład aparatu rzutowania R .

a) Przekształcenie H jest kolineacją

W rozważanej sytuacji (rys.2) niech odwzorowywana m -wymiarowa podprzestrzeń \mathcal{M} przecina $(n + c - b)$ -wymiarowy rdzeń \mathcal{H} wiązki $\langle \mathcal{H}, P_n \rangle$ w w -wymiarowej podprzestrzeni \mathcal{H}_w ($w \neq m$ i $w \neq (n + c - b)$), a tym samym niech w złączy z \mathcal{H} ustala $(n + c - b + m - w)$ -wymiarową podprzestrzeń \mathcal{M}_w należącą do wiązki $\langle \mathcal{H}, P_n \rangle$. Podprzestrzeni tej kolineacja H przypisuje w wiązce $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ $(m + c - w)$ -wymiarową podprzestrzeń \mathcal{B}_w .

Rys.2. Ideogram budowy utworu rzutującego podprzestrzeni \mathcal{M} , gdy \mathbf{H} jest kolineacjąFig.2. Ideogram of structure of projection formation for \mathcal{M} subspace, when \mathbf{H} is collineation

Ponieważ w podprzestrzeni $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ zawarte są wszystkie podprzestrzenie $\mathcal{L}_{M_i} = \mathcal{H} \circ M_i$ ($M_i \in \mathcal{M}$) wiązki $\langle \mathcal{H}, P_n \rangle$ generujące przyporządkowanie punktom M_i ich środków rzutowań \mathcal{P}_{M_i} , więc środki \mathcal{P}_{M_i} są tutaj $(c + 1)$ -wymiarowymi elementami wiązki $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \rangle$. Weźmy jeszcze pod uwagę wiązkę $\langle \mathcal{H}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \rangle = \mathcal{M} \cap \langle \mathcal{H}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \rangle$. Na podstawie wcześniej podanego określenia aparatu rzutowania \mathbf{R} i zasad jego działania można w omawianym przypadku stwierdzić, że $(w + 1)$ -wymiarowe elementy $\mathcal{L}_{\mathcal{M}M_i} = \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_{M_i}$ wiązki $\langle \mathcal{H}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \rangle$ są zbiorami punktów $M_{i,j} \in \mathcal{M}$ o stałych środkach \mathcal{P}_{M_i} rzutowania \mathbf{R} ; $\mathcal{P}_{M_i} = \mathbf{H}(\mathcal{L}_{M_i} = \mathcal{H} \circ M_i)$, $M_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Z podanych wyżej przesłanek wynika, że twór rzutujący $\Sigma_{\mathcal{M}}$ podprzestrzeni \mathcal{M} jest w analizowanym przypadku zbiorem podprzestrzeni $\mathcal{P}_{\mathcal{M}, \mathcal{M}M_i}$, z których każda składa się ze złączy $\mathcal{F}_{ij} = M_{i,j} \circ \mathcal{P}_{M_i}$, gdzie $M_{i,j} \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}M_i}$, zaś $\mathcal{P}_{M_i} = \mathbf{H}(\mathcal{L}_{M_i})$.

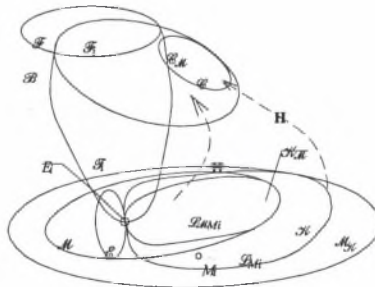
W celu bliższego określenia właściwości utworu $\Sigma_{\mathcal{M}}$ wyróżnijmy w \mathcal{M} oraz w $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ odpowiednio takie podprzestrzenie \mathcal{E} i \mathcal{F} , że $\mathcal{E} \circ \mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$, $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \emptyset$, a $\mathcal{F} \circ \mathcal{C} = \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ i $\mathcal{F} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, (rys.2). Prosty rachunek wymiarów, prowadzi do wniosku, że tak wyróżnione podprzestrzenie \mathcal{E} i \mathcal{F} mają identyczne wymiary $(m - w - 1)$ i przecinają kolineacyjne wiązki $\langle \mathcal{H}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \rangle$ i $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \rangle$ również w kolineacyjnych wiązkach odpowiednio $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$. Przyjmijmy, że wiązki $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$, spełniają wymagania lematu I. Oznacza to, iż złącza t_i homologicznych punktów E_i oraz F_i w tych wiązkach składają się na rodzinę $\{t\}$ tworzących hiperkwadryki skośnej Ω . Z drugiej strony zauważmy, że (rys.2) każda z podprzestrzeni $\mathcal{C} \circ F_i \in \langle \mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \rangle$ jest środkiem \mathcal{P}_{M_i} rzutowania \mathbf{R} dla wszystkich punktów $M_{i,j} \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}M_i}$, wśród których znajduje się także punkt $E_i = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{M}M_i}$.

Stąd łatwo wywnioskować, że wcześniej zdefiniowane tworzące t_i hiperkwadryki Ω w złączach z podprzestrzeniami \mathcal{E} i \mathcal{H}_M dają zbiór podprzestrzeni zawierających podprzestrzenie rzutujące poszczególne punkty podprzestrzeni \mathcal{M} . Zbiór ten, tożsamy z tworem rzutującym Σ_M podprzestrzeni \mathcal{M} , jest w przypadku, gdy $\dim(\mathcal{E} \circ \mathcal{H}_M \circ t_i) \leq \dim(\mathcal{M} \circ \mathcal{B}_M)$, hiperpowierzchnią wiązkową o wierzchołku $\mathcal{E} \circ \mathcal{H}_M$ kierownicy Ω i tworzących $\mathcal{F}_i = \mathcal{E} \circ \mathcal{H}_M \circ t_i$. Ponieważ kierownica Ω jest tworem stopnia drugiego, więc i **utwór rzutujący Σ_M jest tworem – hiperpowierzchnią wiązkową stopnia drugiego.**

Zaznaczmy jeszcze, iż w sytuacji gdy wyróżnione wcześniej wiązki $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ nie spełniają wymagań lematu I, lub gdy wymiary złączy podprzestrzeni \mathcal{E} , \mathcal{H}_M i poszczególnych tworzących hiperkwadryki Ω nie są mniejsze od $\dim(\mathcal{M} \circ \mathcal{B}_M)$, to utwór rzutujący Σ_M degeneruje się do podprzestrzeni $\mathcal{M} \circ \mathcal{B}_M$.

b) Przekształcenie H jest korelacją

Podobnie jak w sytuacji opisanej pod a) niech i obecnie odwzorowywana m -wymiarowa podprzestrzeń \mathcal{M} przecina $(n + c - b)$ -wymiarowy rdzeń \mathcal{H} wiązki $\langle \mathcal{H}, \mathcal{P}_n \rangle$ w w -wymiarowej podprzestrzeni \mathcal{H}_M ($w \neq m$ i $w \neq (n + c - b)$), a tym samym niech w złączu z \mathcal{H} ustala $(n + c - b + m - w)$ -wymiarową podprzestrzeń $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ należącą do wiązki $\langle \mathcal{H}, \mathcal{P}_n \rangle$, (rys.3). Podprzestrzeni tej korelacja H przypisuje w wiązce $\langle \mathcal{E}, \mathcal{B} \rangle$ $(b - m + w)$ -wymiarową podprzestrzeń \mathcal{E}_M . Ponieważ jak wcześniej wspomniano w podprzestrzeni $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ zawarte są wszystkie podprzestrzenie $\mathcal{P}_{M_i} = \mathcal{H} \circ M_i$ ($M_i \in \mathcal{M}$) wiązki $\langle \mathcal{H}, \mathcal{P}_n \rangle$ generujące przyporządkowanie punktom M_i ich środków rzutowań \mathcal{P}_{M_i} , więc środki \mathcal{P}_{M_i} są tutaj $(b - 1)$ -wymiarowymi elementami wiązki $\langle \mathcal{E}_M, \mathcal{B} \rangle$.



Rys.3. Ideogram budowy utworu rzutującego podprzestrzeni \mathcal{M} , gdy H jest korelacją

Fig.3. Ideogram of structure of projection formation for \mathcal{M} subspace, when H is correlation

Weźmy jeszcze pod uwagę wiązkę $\langle \mathcal{H}_w \mathcal{M} \rangle = \mathcal{M} \cap \langle \mathcal{H}_w \mathcal{M}_2 \rangle$. Jej $(w + 1)$ -wymiarowe elementy $\mathcal{L}_{\mathcal{M} \mathcal{M}_1} = \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{M}_1}$ są zbiorami punktów $M_{i,j} \in \mathcal{M}$ o stałych środkach $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}$ rzutowania \mathbf{R} ; $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1} = \mathbf{H}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_1} = \mathcal{H} \circ M_i)$, $M_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_1}$. Uwzględniając powyższe stwierdzamy, że utwór rzutujący Σ_w podprzestrzeni \mathcal{M} jest w obecnie analizowanym przypadku zbiorem podprzestrzeni $\mathcal{R}_{w, \mathcal{M} \mathcal{M}_1}$ z których każda składa się ze złączy $\mathcal{F}_i = M_{i,j} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}$, gdzie $M_{i,j} \in \mathcal{L}_{\mathcal{M} \mathcal{M}_1}$, zaś $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1} = \mathbf{H}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_1})$.

Wzorując się na analizie przypadku a), dla szczegółowego określenia właściwości utworu Σ_w wyróżnijmy w \mathcal{M} oraz w \mathcal{B} odpowiednio takie podprzestrzenie \mathcal{E} i \mathcal{F} , że $\mathcal{E} \circ \mathcal{H}_w = \mathcal{M}$, $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}_w = \emptyset$, a $\mathcal{F} \circ \mathcal{C}_w = \mathcal{B}$ i $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_w = \emptyset$, (rys.3). Korzystając z przyjętych właściwości podprzestrzeni \mathcal{E} i \mathcal{F} łatwo wyliczyć, że podprzestrzenie te mają identyczne wymiary równe $(m - w - 1)$ i przecinają korelacyjne wiązki $\langle \mathcal{H}_w \mathcal{M} \rangle$ i $\langle \mathcal{C}_w \mathcal{B} \rangle$ także w korelacyjnych wiązkach odpowiednio $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$. Jeżeli wiązki $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$, spełniają wymagania lematu II, to złącza \mathcal{F}_i homologicznych punktów E_i oraz $(m - w - 2)$ -wymiarowych podprzestrzeni \mathcal{F}_i w tych wiązkach składają się na rodzinę $\{\mathcal{F}_i\}$ tworzących hiperkwadryki podprzestrzeniowej Ω . Równocześnie przypomnijmy, że (rys.3) każda z podprzestrzeni $\mathcal{C}_w \circ \mathcal{F}_i \in \langle \mathcal{C}_w \mathcal{B} \rangle$ jest środkiem $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}$ rzutowania \mathbf{R} dla wszystkich punktów $M_{i,j} \in \mathcal{L}_{\mathcal{M} \mathcal{M}_1}$, wśród których znajduje się także punkt $E_i = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{M} \mathcal{M}_1}$. Stąd wcześniej zdefiniowane tworzące \mathcal{F}_i hiperkwadryki Ω w złączach z podprzestrzeniami \mathcal{C}_w i \mathcal{H}_w dają zbiór podprzestrzeni zawierających podprzestrzenie rzutujące poszczególne punkty podprzestrzeni \mathcal{M} . Zbiór ten jest identyczny z utworem rzutującym Σ_w podprzestrzeni \mathcal{M} , i w przypadku gdy $\dim(\mathcal{C}_w \circ \mathcal{H}_w \circ \mathcal{F}_i) \leq \dim(\mathcal{M} \circ \mathcal{B})$, ma postać hiperpowierzchni wiązkowej o wierzchołku $\mathcal{C}_w \circ \mathcal{H}_w$, kierownicy Ω i tworzących $\mathcal{F}_i = \mathcal{C}_w \circ \mathcal{H}_w \circ \mathcal{F}_i$. Ponieważ kierownica Ω jest tworem stopnia drugiego, więc i **utwór rzutujący Σ_w jest tworem – hiperpowierzchnią wiązkową stopnia drugiego.**

Zauważmy jeszcze, że gdy wyróżnione w powyższym rozumowaniu wiązki $\langle \emptyset, \mathcal{E} \rangle$ i $\langle \emptyset, \mathcal{F} \rangle$ nie spełniają wymagań lematu II (czyli gdy $\mathcal{E} = \mathcal{F}$), lub gdy wymiary złączy podprzestrzeni \mathcal{C}_w , \mathcal{H}_w i poszczególnych tworzących hiperkwadryki Ω nie są mniejsze od $\dim(\mathcal{M} \circ \mathcal{B})$, to utwór rzutujący Σ_w degeneruje się do podprzestrzeni $\mathcal{M} \circ \mathcal{B}$.

Podsumowując rozważania prowadzone w punktach a) i b) należy stwierdzić, iż zdefiniowane w niniejszym opracowaniu podprzestrzeniowe rzutowanie \mathbf{R} przestrzeni P_n ze środków wiązkowo rozproszonych, przypisuje każdej, ogólnie usytuowanej względem elementów aparatu $\{(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \langle \mathcal{H}, P_n \rangle, \mathbf{H}, \mathcal{P}\}$ rzutowania \mathbf{R} , podprzestrzeni \mathcal{M} utwór rzutujący $\Sigma_{\mathcal{M}}$ będący w ogólności tworem drugiego stopnia. Utwór ten, zgodnie z podanymi np. w [5] właściwościami tworów stopnia drugiego, daje w przecięciu z podprzestrzenią – rzutnią \mathcal{P} , w ogólnym przypadku, również twór stopnia drugiego, który jest tożsamy z rzutem $\mathcal{M}^{\mathbf{R}}$ podprzestrzeni \mathcal{M} . Wymienione przesłanki prowadzą do wniosku, że rzutowanie \mathbf{R} przestrzeni P_n należy do **rodziny rzutowań stopnia drugiego**.

LITERATURA

1. POLAŃSKI S.: Rzutowanie wiązkowe w odwzorowaniach przestrzeni n -wymiarowych, Prace naukowe Politechniki Lubelskiej nr152, Budownictwo 22.
2. OTTO E., GROCHOWSKI B.: O rzutowaniu skośnym przestrzeni n -wymiarowych, Zeszyty Naukowe Geometria wykreślna IV, Warszawa-Poznań, 1966.
3. BOMBIK D.: Powierzchnie dwusieczne w rzuci zdegenerowanym, Konferencja o geometrii, Politechnika Częstochowska – Konferencje 34, Częstochowa 1999.
4. DŹWIERZYŃSKA J.: A modification and generalizations of the graphic, perspective representation of E3 space on the rotary cylinder surface, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Seminarium "Geometria I komputer" , Wiśła – Gliwice 2001.
5. BURAU W.: Mehrdimensionale projektive und hoehere geometrie, DVW, Berlin 1961.

Recenzent: Dr hab. Eugeniusz KORCZAK
Prof. Politechniki Poznańskiej

Abstract. The graphic methods used, among others, in mapping of geometrical models for technical objects, require the application of a transformation called an \mathbf{R} projection. The \mathbf{R} projection transforms a P space of models onto its \mathcal{P} point set, called a *projection hyper plane*. Each point $X \in P$ has a corresponding $X^{\mathbf{R}}$ image in \mathcal{P} , $X^{\mathbf{R}} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_X$, where \mathcal{P}_X is a formation called a *projection formation*, determined by X and a distinguished \mathcal{P}_X formation, called an *\mathbf{R} projection centre for X* . In many known

\mathbf{R} projections, the \mathcal{P}_x , \mathcal{S}_x and \mathcal{P} formations are subspaces of the P space. The \mathbf{R} projection with such properties is called a *subspace projection* of the P space onto the \mathcal{P} projection hyper plane.

Even a brief review of known graphic methods of representations indicates that the \mathbf{R} projections with constant \mathcal{P} projection centres for all points of the P space are widely applied in the definitions of these methods. Such \mathbf{R} projections are known as *bundle projections*.

Sometimes the application of the \mathbf{R} projection with different projection centres \mathcal{S}_x for each points of P space has a theoretical reason. These centres can be components of a bundle. In such a case the \mathbf{R} projection is a generalization of a bundle projection, here referred to as a *subspace projection with dispersed centres*. The analysis of main features such subspace projections is the subject of the paper being discussed.

Let us assume that a n - dimensional projective P_n space ($n \geq 2$) is represented by the \mathbf{R} subspace projection with bundle dispersed centres. To realize the \mathbf{R} projection, we have to select a so-called *apparatus of the \mathbf{R} projection* in the P_n space, which consists of:

- a $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ bundle of subspaces, called a base of the \mathbf{R} projection centres, with the following properties: $n \geq \dim \mathcal{B} = b \geq 0$, $b-1 \geq \dim \mathcal{C} = c \geq 1$, $w_{\mathcal{C}}$ coefficient of the $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ bundle variety is equal to $(b - c + 1)$,
- a $\langle \mathcal{H}, P_n \rangle$ bundle of subspaces, called a bundle of projection centre assignation, characterized by a $w_{\mathcal{H}}$ coefficient of variety equal to $w_{\mathcal{C}}$,
- an \mathbf{H} projective relation, which transforms the $\langle \mathcal{H}, P_n \rangle$ bundle onto the $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ bundle and may be a collineation or a correlation,
- a \mathcal{P} subspace – a projection hyper plane with a dimension p ; that if \mathbf{H} is a collineation (correlation) then the \mathcal{P} projection hyper plane with each $c+1$ $(b-1)$ dimensional element of the $\langle \mathcal{C}, \mathcal{B} \rangle$ bundle determines a junction identical to a subspace of the P_n space and the common subspace (product) with a dimension not greater than $p-2$.