

Jarosław Z. MIRSKI

Katedra Architektury i Ochrony Budowli Zabytkowych  
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

## UPROSZCZONA PROCEDURA PODZIAŁU TRÓJKĄTA SFERYCZNEGO WIEŁOŚCIANÓW FOREMNYCH I ICH POCHODNYCH ORAZ USTALENIE LICZBY ICH ELEMENTÓW

**Streszczenie.** Znane trzy sposoby podziału trójkąta sferycznego pozwoliły utworzyć z 20-ścianu foremego wielościany pochodne, które ujęto w oryginalnej tablicy systematyzującej. Utworzone wielościany o większej liczbie ścian mają zastosowania w konstrukcjach inżynierskich i wówczas pręty odpowiadają krawędziom, a węzły – wierzchołkom wielościanów. Autor zauważył brak w literaturze wzorów na wyznaczenie liczby krawędzi i wierzchołków wygenerowanych wielościanów. W aspekcie potrzeb inżynierskich ustalono formuły pozwalające na automatyczne wyliczanie liczby wierzchołków i krawędzi dla dowolnego wielościanu utworzonego z 20-, 8- i 4-ścianu foremego.

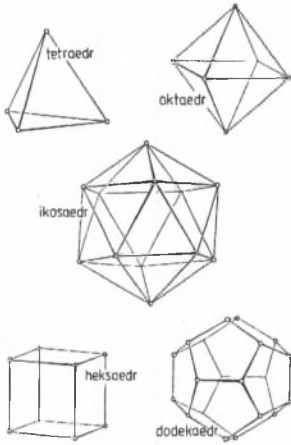
## SIMPLIFIED PROCEDURE OF A SPHERICAL TRIANGLE DIVISION IN REGULAR POLYHEDRONS AND THEIR DERIVATIVES AND CALCULATION OF THE NUMBER OF THEIR ELEMENTS

**Summary.** The three known methods of a spherical triangle division allowed for obtaining derivative polyhedrons from a regular icosahedron, presented here in an original systematising table. The generated polyhedrons with a larger number of faces are frequently used in engineering structures, where ribs are represented by polyhedron edges and nodes by vertices. The author of this paper notices that the methods for determining numbers of edges and vertices of newly generated polyhedrons are not discussed in the literature. That is why and in order to meet engineering needs automatic, calculation formulas were developed for any polyhedrons generated from a regular 20-, 8- or 4-hedron.

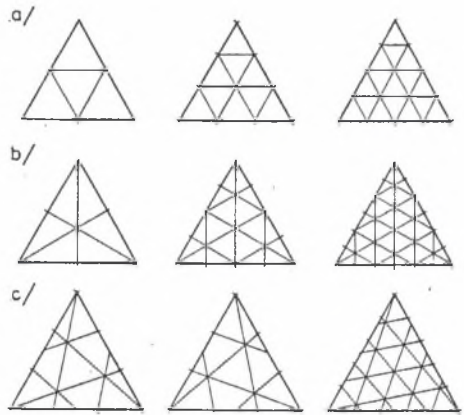
# 1. Przekształcania wielościanów foremnych

Z pięciu wielościanów foremnych (znanych od starożytności) wzięto pod uwagę 20-, 8- i 4-ścian foremny, których ściany są trójkątami foremnymi (rys.1). Zastosowano trzy znane sposoby podziału trójkąta sferycznego (rys.2), które pozwoliły utworzyć z wybranych wielościanów – wielościany pochodne o większej liczbie ścian.

Wprowadzono uproszczenie polegające na interpolacji trójkąta płaskiego zamiast sferycznego, odpowiadającego krzywoliniowej siatce wielościanu o wierzchołkach i krawędziach leżących na sferze z nim współśrodkowej. Z elementu trójkąta równobocznego, będącego oczkiem siatki wyjściowej, zbudowano drogą podziałów kolejne trójkąty mniejsze. Siatki trójkątów małych spełniają przy tym warunki podane przez J. Fulińskiego w pracy [1] oraz cytowane są w [2 i 3].

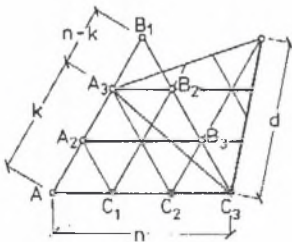


◀ Rys. 1.  
Wielościany  
platońskie  
Fig. 1. Plato's  
polyhedrons



Rys. 2. Przykłady  
podziału trójkąta  
równobocznego: ▶  
a) wg I sposobu,  
b) wg II sposobu,  
c) wg III sposobu

Fig. 2. Examples of division  
of equilateral triangle:  
a) acc. to way 1, b) acc. to way 2, c) acc.  
to way 3



◀ Rys.3. Rysunek do twierdzenia w tekście  
Fig. 3. Drawing referring to the theorem in the text

Prof. J. Fuliński podał i udowodnił w [1] następujące twierdzenie: *jeżeli bok trójkąta równobocznego o wielkości  $n$  części (rys.3) podzielimy w stosunku  $k : (n - k)$  i punkt  $A_3$  dzielący bok połączymy z przeciwległym wierzchołkiem, otrzymamy odcinek  $d$ , którego kwadrat równy jest kwadratowi boku trójkąta  $n^2$  pomniejszonego o iloczyn odcinków  $k \cdot (n - k)$  :*

$$d^2 = n^2 - k(n - k) = n^2 + k^2 - n \cdot k \quad (1)$$

We wzorze:  $n$  i  $k$  – oznaczają kolejne liczby naturalne.

Wzór (1) wyraża jednocześnie liczbę oczek w przekształconym trójkącie sferycznym. Natomiast wzór na liczbę ścian w wielościanie pochodnym z wybranego wielościanu foremego ma postać (2):

$$N_{n,k} = N_f (n^2 + k^2 - n \cdot k) \quad (2)$$

w którym:  $N_f$  – liczba ścian przyjętego wielościanu foremego, jako wyjściowego do podziału,

$n, k$  – jak wyżej.

Dla przykładu przyjęto do podziału trójkątne ściany 20-ścianu foremego. Podstawiając we wzorze (2) za  $N_f = 20$  oraz za  $n$  i  $k$  – kolejne liczby naturalne, otrzymano wielościany o większej liczbie ścian: 60-ścian *półforemny* wg drugiego sposobu podziału, 80-ścian *półforemny* wg pierwszego sposobu podziału, 140-ścian *półforemny* wg trzeciego sposobu podziału, 180-ścian *półforemny* wg pierwszego sposobu podziału, 240-ścian *półforemny* wg drugiego sposobu podziału itd.

Jednocześnie utworzono oryginalną trójkątną tablicę 1 porządkującą generowane wielościany z 20-ścianu foremego.

Z analizy liczb w tablicy 1 łatwo zauważyć, że istnieją dwa przekształcenia wielościanów prostych. *Pierwsze przekształcenie trójkątnych ścian* wyraża wzór:

$$N = 20 \cdot n^2 \quad (3)$$

który przedstawia układ wielościanów jednokrotnych: 20-, 80-, 180-ścian, ... itd..., dzieląc tabelę na dwie trójkątne symetryczne części. Generowanie tych wielościanów odzwierciedla I rodzaj przekształcenia ścian wielościanu (rys1a).

*Drugi sposób przekształcenia ścian* 20-ścianu (rys.1b) określa formuła:

$$N = 20 \cdot (3 \cdot n^2) \quad (4)$$

która pozwala na generowanie wielościanów jednokrotnych (oznaczone kropką w tablicy 1): 60-, 240-, 540-ścian, ... itd., leżących na dwusiecznej tej trójkątnej tabeli, którą dzieli także symetrycznie. Powyżej i poniżej tej dwusiecznej są dwie rodziny wielościanów dwukrotnych (pravo- i lewoskrętnych), mających tę samą siatkę, lecz będących wzajemnie lustrzanymi odbiciami.

Generowanie tych wielościanów odzwierciedla *III sposób przekształcenia trójkątów*, pochodzących z podwojenia liczb  $n$  i  $k$  we wzorze 5-1 na liczbę oczek w trójkącie przekształconym:

$$N = 20 \cdot (n^2 + k^2 - n \cdot k) \quad (5)$$

Przykładem tych wielościanów są:

140-ścian ( $n = 2, k = 3$ ) i 560-ścian ( $n = 4, k = 6$ ),  
 260-ścian ( $n = 3, k = 4$ ) i 1040-ścian ( $n = 6, k = 8$ ),  
 420-ścian ( $n = 4, k = 5$ ) i 1068-ścian ( $n = 8, k = 10$ ).

Tablica 1  
 Fragment trójkątnej tabeli wielościanów utworzonych z 20-ścianu foremnego  
 w wyniku trzech sposobów przekształceń

n	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	itd.
1	20	60	140	260	420	620	860	1140	1460	1820	2220	2660	3140		
2	60	80	140	240	380	560	780	1040	1340	1680	2060	2480	2940		
3	140	140	180	260	380	540	740	980	1260	1580	1940	2340	2780		
4	260	240	260	320	420	560	740	960	1220	1520	1860	2240	2660		
5	420	380	380	420	500	620	780	980	1220	1500	1820	2180	2580		
6	620	560	540	560	620	720	860	1040	1260	1520	1820	2160	2540		
7	860	780	740	740	780	860	980	1140	1340	1580	1860	2180	2540	...	
8	1140	1040	980	960	980	1040	1140	1280	1460	1680	1940	2240	2580		
9	1460	1340				1260	1340	1460	1620	1820	2060	2340	2660		
10	1820						1580	1680	1820	2000	2220	2480	2780		
11									2060	2220	2420	2660	2940		
12											2660	2880	3140		
13													3380		
itd.															...

Podobne tablice utworzono dla wielościanów pochodnych z 8-ścianu foremnego w pracy [2] i 4-ścianu foremnego w pracy [3].

## 2. O liczbie krawędzi i wierzchołów

- Stosując *1 sposób podziału ścian wielościanów foremnych* (rys.4) dla wielościanów otrzymanych z przekształceń 20-, 8- i 4-ścianu foremnego ustalano liczby ich krawędzi i wierzchołków, zestawiając wyniki w tablicy 2.

Rys. 4. Przykłady podziału trójkąta równobocznego wg 1 sposobu (rysunek autora)

Fig. 4. Examples of division of equilateral triangle acc. to way 1



Tablica 2

Fragment zestawienia liczby krawędzi i liczby wierzchołków wielościanów wygenerowanych w wyniku *1 sposobu podziału* równobocznego trójkąta sferycznego

Dla wyjściowego 20-ścianu f.			Dla wyjściowego 8-ścianu f.			Dla wyjściowego 4-ścianu f.		
Kolejne wielościany	liczba		Kolejne wielościany	liczba		Kolejne wielościany	liczba	
	krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków
20	30	12	8	12	6	4	6	4
80	120	42	32	48	20	16	24	10
180	270	92	72	108	38	36	54	20
320	480	162	128	192	68	64	96	34
500	750	252	200	300	102	100	150	52
720	1080	362	288	432	146	144	216	74
980	1470	492	392	588	198	196	294	100
itd. ...	...	...	itd. ...	...	...	itd. ...	...	...

Na podstawie zestawu liczb w tablicy 2 ustalono **wzór na liczbę krawędzi** w wielościanach pf.

– pochodzących od trzech wielościanów foremnych:

$$p = p_w \cdot n^2 \quad (6)$$

oraz **wzór na liczbę wierzchołków** wielościanów wygenerowanych z trzech wielościanów foremnych:

$$w = 0,5 \cdot N \cdot n^2 + 2 \quad (7)$$

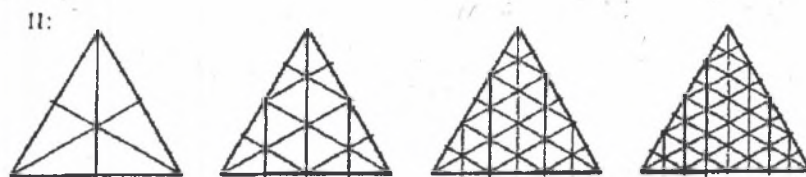
we wzorach:  $p_w$  – liczba krawędzi wybranego wielościanu foremnego,

$n$  – kolejne liczby naturalne,

$N$  – liczba ścian wielościanu foremnego.

**Jednocześnie na podstawie analizy stwierdzono, że liczba krawędzi różnych w siatkach wielościanów wygenerowanych według 1 sposobu podziału – jest równa liczbie podziału boku trójkąta równobocznego wyjściowych wielościanów foremnych.**

- Stosując **II sposób podziału ścian wielościanów foremnych** (rys.5) dla wielościanów otrzymanych z przekształceń 20-, 8-, i 4-ścianu foremnego ustalono liczby ich krawędzi i wierzchołków, zestawiając wyniki w tablicy 3.



Rys. 5. Przykłady podziału trójkąta równobocznego wg II sposobu (rysunek autora)

Fig. 5. Examples of division of equilateral triangle acc. to way 2

Na podstawie zestawu liczb w tabelicy 3, ustalono **wzór na liczbę krawędzi** w wielościanach pf. – pochodzących od trzech wielościanów foremnych:

$$p = 4,5 \cdot N \cdot (n - 1)^2 \quad (8)$$

oraz **wzór na liczbę wierzchołków** wielościanów wygenerowanych z wielościanów foremnych:

$$w = \frac{3}{2} \cdot N \cdot (n - 1)^2 + 2 \quad (9)$$

we wzorach: N – liczba ścian wielościanu foremnego,  
n – kolejne liczby naturalne.

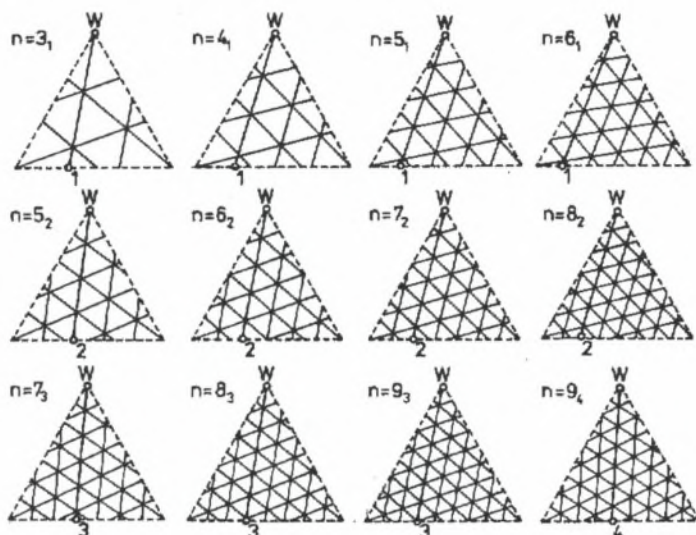
Tablica 3

Fragment zestawienia liczby prętów i liczby węzłów siatek, które odpowiadają krawędziom i wierzchołkom wielościanów – dla **II sposobu podziału** równobocznego trójkąta sferycznego

Dla wyjściowego 20-ścianu f.			Dla wyjściowego 8-ścianu f.			Dla wyjściowego 4-ścianu f.		
kolejne wielościany	liczba		kolejne wielościany	liczba		kolejne wielościany	liczba	
	krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków
20	30	12	8	12	6	4	6	4
60	90	32	24	36	14	12	18	8
240	360	122	96	144	50	48	72	26
540	810	272	216	324	110	108	162	56
960	1440	482	384	576	194	192	288	98
1500	2250	752	600	900	302	300	450	152
2160	3240	1082	864	1296	434	432	648	218
itd. ...	...	...	itd. ...	...	...	itd. ...	...	...

**Na podstawie analizy stwierdzam, że liczba krawędzi różnych w siatkach wielościanów wygenerowanych według II sposobu podziału – jest równa liczbie podziału boku trójkąta równobocznego wyjściowych wielościanów foremnych.**

Stosując III sposób podziału ścian wielościanów foremnych dla wielościanów otrzymanych z przekształceń 20-, 8-, i 4-ścianu foremego ustalono liczbę ich krawędzi i wierzchołków zestawiając wyniki w tabelicy 4.



Rys. 6. Przykłady podziału trójkąta równobocznego wg III sposobu (rysunek autora)

Fig. 6. Examples of division of equilateral triangle acc. To way 3

Na podstawie zestawu liczb w tabelicy 4, ustalono **wzory na liczbę krawędzi** w wielościanach pf. – pochodzących od trzech wielościanów foremnych dla przypadku łączenia wierzchołka trójkąta równobocznego z końcem:

– *pierwszego* odcinka podziału przeciwległego boku trójkątnej ściany wyjściowego wielościanu foremego

$$p = k \cdot (n^2 - n + 1) \quad (10a)$$

– *drugiego* odcinka podziału przeciwległego boku trójkątnej ściany wyjściowego wielościanu foremego

$$p = k \cdot (n^2 - 2n + 4) \quad (10b)$$

– *trzeciego* odcinka podziału przeciwległego boku trójkątnej ściany wyjściowego wielościanu foremego

$$p = k \cdot (n^2 - 3n + 9) \quad (10c)$$

– *czwartego* odcinka podziału przeciwległego boku trójkątnej ściany wyjściowego wielościanu foremego

$$p = k \cdot (n^2 - 4n + 16) \quad (10d)$$

Tablica 4

Fragment zestawienia liczby prętów i liczby węzłów siatek, które odpowiadają krawędziom i wierzchołkom wielościanów – dla **III sposobu podziału** równobocznego trójkąta sferycznego

Liczba podziału boku trójkąta	Dla wyjściow. 20-ścianu f.			Dla wyjściowego 8-ścianu f.			Dla wyjściow. 4-ścianu f.		
	kolejne wielościany	liczba		kolejne wielościany	liczba		kolejne wielościany	liczba	
		krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków		krawędzi	wierzchołków
	<b>20</b>	30	12	<b>8</b>	12	6	<b>4</b>	6	4
3	140 <sub>1</sub>	210	72	56	84	30	28	42	16
4	260 <sub>1</sub>	390	132	104	156	54	52	78	28
5	380 <sub>2</sub>	570	192	152	228	78	76	114	40
5	420 <sub>1</sub>	630	212	168 <sub>1</sub>	252	86	84 <sub>1</sub>	126	44
6	560 <sub>2</sub>	840	282	224 <sub>2</sub>	336	114	112 <sub>2</sub>	168	58
6	620 <sub>1</sub>	930	312	248 <sub>1</sub>	372	126	124 <sub>1</sub>	186	64
7	740 <sub>3</sub>	1110	372	296 <sub>3</sub>	444	150	148 <sub>3</sub>	222	76
7	780 <sub>2</sub>	1170	392	312 <sub>2</sub>	468	158	156 <sub>2</sub>	234	80
7	860 <sub>1</sub>	1290	432	344 <sub>1</sub>	516	174	172 <sub>1</sub>	258	88
8	980 <sub>3</sub>	1470	492	392 <sub>3</sub>	588	198	196 <sub>3</sub>	294	100
8	1040 <sub>2</sub>	1560	522	416 <sub>2</sub>	624	210	208 <sub>2</sub>	312	106
8	1140 <sub>1</sub>	1710	572	456 <sub>1</sub>	684	230	228 <sub>1</sub>	342	116
9	1220 <sub>4</sub>	1830	612	488 <sub>4</sub>	732	246	244 <sub>4</sub>	366	124
9	1260 <sub>3</sub>	1890	632	504 <sub>3</sub>	756	254	252 <sub>3</sub>	378	128
9	itd. ...	...	...	itd. ...	...	...	itd. ...	...	...

\* *indeks cyfrowy przy liczbach* – oznacza rozpoczęcie łączenia wierzchołka trójkąta równobocznego z końcem przeciwległego odcinka, np. 1-, 2-, 3- itd.

Powyższe wzory pozwoliły ustalić **ogólny wzór na liczbę krawędzi** wielościanów pf. wygenerowanych wg III sposobu podziału trójkąta równobocznego:

$$p = k \cdot (n^2 - i \cdot n + i^2) \quad (11a)$$

lub

$$p = k \cdot \frac{n^3 + i^3}{n + i} \quad (11b)$$

W podobny sposób ustalono **ogólny wzór na liczbę wierzchołków** wielościanów wygenerowanych z wielościanów foremnych:

$$w = 0,5 \cdot N \cdot \frac{n^3 + i^3}{n + i} + 2 \quad (12)$$

gdzie: **k** – liczba krawędzi wyjściowego wielościanu foremnego,  
**n** – liczba odcinków podziału boku trójkąta,  
**i** – liczba ustalająca rozpoczęcie łączenie wierzchołka trójkąta równobocznego z końcem przeciwległego n-tego odcinka,  
**N** – liczba ścian wyjściowego wielościanu foremnego.



- Poprawność wyznaczonych liczb w tablicach 2, 3 i 4 sprawdzono *wzorem Eulera*:

$$W - K + N = 2$$

gdzie:  $W$  – liczba wierzchołków,  $K$  – liczba krawędzi,  $N$  – liczba ścian wielościanu.

### 3. Zakończenie

Utworzone wielościany o większej liczbie ścian mają zastosowania w inżynierskich konstrukcjach prętowych, tarczownicowych i tarczownicowo-prętowych. Wówczas pręty odpowiadają krawędziom wielościanów, a węzły – wierzchołkom wielościanów. Z tej przyczyny na etapie projektowania istotna jest znajomość liczby krawędzi i liczby wierzchołków wygenerowanych wielościanów, które służą za model rzeczywistych konstrukcji.

Ustalone formuły pozwalają na automatyczne wyliczenie liczby wierzchołków i krawędzi dla dowolnego wielościanu powstałego na drodze przekształcania wybranego wielościanu foremego.

### LITERATURA

1. Fuliński J.: Geometryczne elementy projektowania kratownic powierzchniowych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Rolniczej we Wrocławiu. Melioracja XI; nr 64, 1966, s. 7-41.
2. Mirski J.: Siatki powstałe z przekształceń 8-ścianu foremego. Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu. Melioracja XLI; nr 212, 1992, s.27-39.
3. Mirski J.: Siatki dwuwarstwowe opracowane na podstawie tetraedru. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Geometria i Grafika Inżynierska; nr 3, Gliwice 1999; s.93-105.
4. Mirski J.: O wyznaczaniu liczby krawędzi i wierzchołków wielościanów wygenerowanych z wielościanów foremnych. VI Seminarium „Geometria i Grafika – Szczyrk 2003”. Materiały wydane przez Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej Politechniki Śląskiej; Gliwice 2003, s.58-61.

Recenzent: Dr hab. Eugeniusz KORCZAK  
Profesor Politechniki Poznańskiej

**Abstract**

The interpolation of a regular tetrahedron, octahedron or icosahedron by the three ways of a triangle division allowed for obtaining derivative polyhedrons with a larger number of faces (examples in tables). The generated polyhedrons with a larger number of faces are frequently used in engineering structures, where ribs are represented by polyhedron edges and nodes by vertices. The three known methods of a spherical triangle division allowed for obtaining derivative polyhedrons from a regular icosahedron, presented here in an original systematising table. The author of this paper notices that the methods for determining numbers of edges and vertices of newly generated polyhedrons are not discussed in the literature. That is why and in order to meet engineering needs automatic, calculation formulas were developed for any polyhedrons generated from a regular 20-, 8- or 4-hedron.