ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: INFORMATYKA z. 26 Nr kol. 1255

Marcin WYCIŚLIK

WARUNEK KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY REALIZOWALNOŚCI ALGORYTMU W SYSTEMACH STEROWANYCH PRZEPŁYWEM ARGUMENTÓW*

Streszczenie. W pracy podano warunek konieczny i wystarczający realizowalności algorytmu danego w postaci macierzy zmiennych formy kanonicznej w systemach sterowanych przepływem argumentów. Pokazano także algebraiczną metodę sprawdzenia prezentowanego warunku.

THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF REALIZABILITY OF AN ALGORITHM IN SYSTEMS CONTROLLED BY A FLOW OF ARGUMENTS

Summary. The article presents the necessary and sufficient condition of realizability of an algorithm given as the variable matrix of canonical form in systems controlled by a flow of arguments. An algebraic method of verifying the condition is also given.

CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE RÉALISATION D'UNE ALGORITHME DANS LES SYSTÈMES CONTRÔLÉS PAR LE FLUX DES ARGUMENTS

Résumé. Dans cette travaille est présentée la condition nécessaire et suffisante de réalisation d'une algorithme donné sous la forme matricielle des variables de forme

* Praca zrealizowana w ramach Projektu Badawczego (GRANTU) nr KBN 3 P406 011 04 .

canonique dans les système contrôlés par le flux des arguments. Il est présentée aussi la méthode algébrique de contrôle de cette condition.

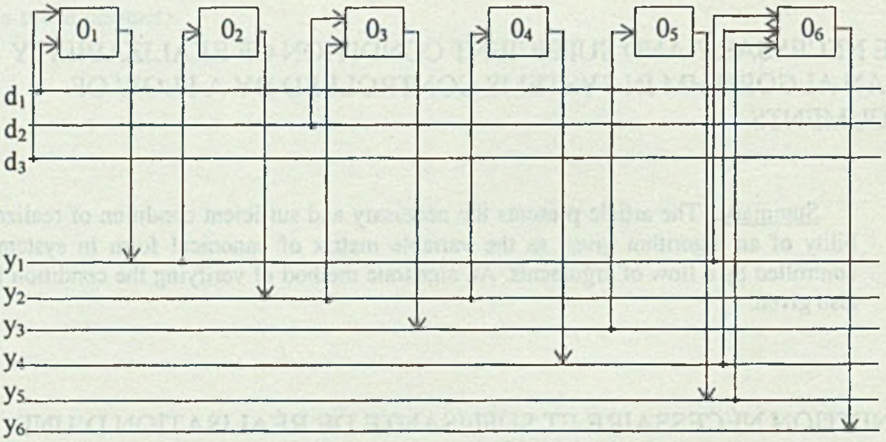
1. Systemy sterowane przepływem argumentów

W pracy [1] scharakteryzowano systemy sterowane przepływem operacji i podano koncepcję systemów sterowanych przepływem argumentów.

W systemach sterowanych przepływem operacji poszczególne działania realizuje się kolejno, w ustalonym w algorytmie porządku.

W systemach sterowanych przepływem argumentów kolejność zapisu nie ma znaczenia, a poszczególne operacje realizowane są, gdy w systemie pojawią się właściwe dla nich argumenty.

Przykładową strukturę systemu sterowanego przepływem argumentów przedstawia rysunek 1. Ilustruje ona fakt, że operacje są realizowane, gdy tylko na liniach argumentów pojawią się odpowiednie wartości.



Rys. 1. Struktura systemu sterowanego przepływem argumentów
Fig. 1. Structure of a system controlled by a flow of arguments

W pracy [1] wprowadzono również pojęcia postaci kanonicznej algorytmu i macierzy zmiennych formy kanonicznej. Dla systemu z rysunku 1 macierz zmiennych formy kanonicznej przybiera postać pokazaną na rysunku 2.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	1	0	0	0	1
y_2	0	0	1	1	0	0
y_3	0	0	0	0	1	0
y_4	0	0	0	0	0	1
y_5	0	0	0	0	0	1
y_6	0	0	0	0	0	0

Rys. 2. Macierz zmiennych formy kanonicznej
Fig. 2. Variable matrix of canonical form

W pracy [1] kilkakrotnie podkreślono, że jeżeli macierz zmiennych formy kanonicznej algorytmu jest macierzą trójkątną górną o zerowej przekątnej głównej, to algorytm można zrealizować w systemie sterowanym przepływem danych. Warunek ten jest wystarczający, ale niekonieczny. Niniejsza praca przedstawia warunek konieczny i wystarczający realizowalności algorytmu w systemach sterowanych przepływem argumentów.

2. Zależność argumentów i macierz całkowicie zredukowana macierzy zmiennych

DEFINICJA D1. Dla danej macierzy zmiennych $\underline{A}$ argument y_j nazywamy argumentem zależnym w stopniu 1 od argumentu y_i wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} = 1$. Fakt takiej zależności zapisujemy:

$$\{\underline{A}\}\, y_j \longleftarrow y_i \text{ lub } \{\underline{A}\}\, y_j \xleftarrow{1} y_i$$

DEFINICJA D2. Dla danej macierzy zmiennych $\underline{A}$ argument y_j nazywamy argumentem zależnym w stopniu p od argumentu y_i wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\neg\left(\exists q \in \{1,\dots,p-1\} : \{\underline{A}\}\, y_j \xleftarrow{q} y_i\right) \wedge \left(\exists k : \{\underline{A}\}\, y_j \xleftarrow{p-1} y_k \wedge \{\underline{A}\} y_k \longleftarrow y_i\right)$$

Zależność stopnia 1 będzie w dalszym ciągu nazywana również zależnością bezpośrednią argumentów, zaś zależności wyższych stopni określane będą mianem zależności pośrednich.

DEFINICJA D3. Macierzą całkowicie zredukowaną macierzy zmiennych $\underline{A}$ nazywamy macierz $\underline{A}_R$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall i,j: \left(\left\{ \underline{A}_R \right\} y_j \longleftarrow y_i \right) \Leftrightarrow \left(\exists p: \left\{ \underline{A} \right\} y_j \xleftarrow{p} y_i \right)$$

Sfomułowanie to oznacza, że wszystkie zależności bezpośrednie i pośrednie występujące w macierzy $\underline{A}$ są w macierzy $\underline{A}_R$ zredukowane do zależności bezpośrednich.

Rysunek 3 przedstawia macierz całkowicie zredukowaną dla macierzy zmiennych z rysunku 2.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	1	1	1	1	1
y_2	0	0	1	1	1	1
y_3	0	0	0	0	1	1
y_4	0	0	0	0	0	1
y_5	0	0	0	0	0	1
y_6	0	0	0	0	0	0

Rys. 3. Macierz całkowicie zredukowana macierzy zmiennych formy kanonicznej
Fig. 3. Completely reduced matrix of variable matrix of canonical form

3. Warunek konieczny i wystarczający realizowalności algorytmu

TWIERDZENIE T1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby algorytm dany w postaci macierzy zmiennych formy kanonicznej był realizowalny w systemie sterowanym przepływem argumentów jest, żeby macierz całkowicie zredukowana macierzy zmiennych miała zerową przekątną główną.

Warunek ten oznacza, że żaden argument nie jest zależny w macierzy zmiennych formy kanonicznej sam od siebie ani bezpośrednio, ani pośrednio.

Elementy przekątnej głównej macierzy zredukowanej można znaleźć na wiele sposobów. W dalszej części pracy przedstawiona jest algebraiczna metoda wyznaczania macierzy $\underline{A}_R$.

4. Funkcja redukująca i jej własności

DEFINICJA D4. Funkcją redukującą nazywamy funkcję postaci $f_r(\underline{A}) = \underline{A}\,\underline{A} + \underline{A}$, gdzie wszystkie operacje realizowane są w algebrze Boole'a.

TWIERDZENIE T2. Zależności stopnia p występujące w macierzy $\underline{A}$ zostają w macierzy $f_r(\underline{A})$ zredukowane do stopnia $\left[\frac{p+1}{2}\right]$.

LEMAT L1. Zależności stopnia 2 występujące w macierzy $\underline{A}$ zostają w macierzy $f_r(\underline{A})$ zredukowane do zależności bezpośrednich.

DOWÓD LEMATU L1

Niech $\underline{B} = f_r(\underline{A})$. Wtedy:

$$\forall i,j: b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} + a_{ij}$$

Jeśli argument y_j jest w macierzy $\underline{A}$ zależny pośrednio w stopniu 2 od argumentu y_i, to na mocy D2 i D1:

$$\exists k: a_{kj} = 1 \wedge a_{ik} = 1$$

co z kolei oznacza, że:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} + a_{ij} = 1,$$

gdyż co najmniej jeden z elementów sumy jest równy 1.

Zatem na mocy D1 zachodzi w macierzy $\underline{B}$ zależność bezpośrednia argumentu y_j od argumentu y_i.

LEMAT L2. Zależności bezpośrednie występujące w macierzy $\underline{A}$ pozostają zależnościami bezpośrednimi w macierzy $f_r(\underline{A})$.

DOWÓD LEMATU L2

Jeżeli przyjmiemy oznaczenia jak w dowodzie lematu L1, to bezpośrednia zależność argumentu y_j od y_i w macierzy $\underline{A}$ oznacza, że $a_{ij}=1$. Na mocy definicji elementu b_{ij} można od razu orzec, że również $b_{ij} = 1$. Oznacza to zależność bezpośrednią argumentu y_j od y_i w macierzy $\underline{B} = f_r(\underline{A})$.

DOWÓD TWIERDZENIA T2

Dowód opiera się na zasadzie indukcji matematycznej.

I krok indukcji

Dla p=0 i p=1 twierdzenie jest spełnione na mocy lematów L1 i L2.

II krok indukcji

Z_i : Teza twierdzenia T2 jest spełniona dla wszystkich i <= n.

T_i : Teza twierdzenia T2 jest spełniona dla p=n+1.

D_i : Jeżeli y_j jest zależne od y_i w stopniu p, to na mocy D2 zastosowanej dwukrotnie zachodzi:

$$\exists k: \{\underline{A}\} y_j \xleftarrow{p-2} y_k \wedge \{\underline{A}\} y_k \xleftarrow{2} y_i .$$

Przyjmując oznaczenie $\underline{B} = f_r(\underline{A})$, możemy na podstawie założenia tego kroku indukcji napisać:

$$\exists k: \{\underline{B}\} y_j \xleftarrow{\left[\frac{p-1}{2}\right]} y_k \wedge \{\underline{B}\} y_k \xleftarrow{1} y_i ,$$

co na mocy definicji D2 oznacza, że:

$$\{\underline{B}\} y_j \xleftarrow{\left[\frac{p+1}{2}\right]} y_i$$

c.b.d.o.

WŁASNOŚĆ W1. Z twierdzenia T2 wynika, że w macierzy $f_r^s(\underline{A})$ (s-krotne złożenie funkcji redukującej) wszystkie zależności stopnia co najwyżej 2^s zostają zredukowane do zależności bezpośrednich.

WŁASNOŚĆ W2. Najwyższym możliwym stopniem zależności w macierzy $\underline{A}$ (o rozmiarach n × n) jest n.

WŁASNOŚĆ W3. Bezpośrednio z własności W1 i W2 wynika, że:

$$\underline{A}_R = f_r^{\lceil \log_2 n \rceil}(\underline{A})$$

Uwaga. Przy praktycznym wyznaczaniu macierzy $\underline{A}_R$ liczba złożeń funkcji redukującej może być mniejsza - równa logarytmowi dwójkowemu z najwyższego stopnia zależności występującej w macierzy $\underline{A}$.

5. Przykłady

W rozdziale tym prezentowane są dwa przykłady macierzy zmiennych formy kanonicznej algorytmu i ich macierze całkowicie zredukowane.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	1	0	1	0	0
y_2	0	0	0	0	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0
y_4	0	1	0	0	0	0
y_5	0	0	1	1	0	1
y_6	1	0	0	0	0	0

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	1	0	1	0	0
y_2	0	0	0	0	0	0
y_3	1	1	0	1	0	0
y_4	0	1	0	0	0	0
y_5	1	1	1	1	0	1
y_6	1	1	0	1	0	0

Rys. 4. Przykładowa macierz zmiennych formy kanonicznej algorytmu realizowalnego w systemie sterowanym przepływem argumentów i jej macierz całkowicie zredukowana

Fig. 4. Example of variable matrix of canonical form of algorithm realizable in system controlled by a flow of arguments and its completely reduced matrix

Choć macierz z rysunku 4 nie jest macierzą trójkątną górną, to jednak algorytm opisany tą macierzą da się zrealizować w systemie sterowanym przepływem danych. Wskazuje na to zerowa przekątna macierzy całkowicie zredukowanej.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	0	1	0	0	1	1
y_2	0	0	0	0	0	0
y_3	1	0	0	0	1	0
y_4	0	1	0	0	0	0
y_5	0	0	0	1	0	0
y_6	0	0	1	1	0	0

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	1	1	1	1	1	1
y_2	0	0	0	0	0	0
y_3	1	1	1	1	1	1
y_4	0	1	0	0	0	0
y_5	0	1	0	1	0	0
y_6	1	1	1	1	1	1

Rys. 5. Przykładowa macierz zmiennych algorytmu nierealizowalnego w systemie sterowanym przepływem argumentów i jej macierz całkowicie zredukowana

Fig. 5. Example of variable matrix of algorithm nonrealizable in system controlled by a flow of arguments and its completely reduced matrix

Algorytm, którego macierz zmiennych jest przedstawiona na rysunku 5 nie może być zrealizowany w systemie sterowanym przepływem argumentów, gdyż macierz całkowicie zredukowana zawiera jedynki na przekątnej głównej.

LITERATURA

[1] Węgrzyn S.: Systemy sterowane przepływem operacji i systemy sterowane przepływem argumentów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Informatyka z.24, Gliwice 1993.

Recenzent: Dr inż. Andrzej Wilk

Wpłynęło do Redakcji 21 stycznia 1994 r.

Abstract

In [1] it is showed that if the variable matrix of canonical form of the algorithm is the upper triangular one (main diagonal excluded) then it can be used in direct synthesis of the system controlled by argument flow and performing the corresponding algorithm.

This article proves that the above condition is sufficient however not necessary. The necessary and sufficient condition based on completely reduced matrix (which is also defined) is given. In section 4 definition of the reducing function is given as well as its use for finding the completely reduced matrix.

The last section gives an illustration of an application of the described condition for checking realizability of an algorithm in system controlled by a flow of arguments.