ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

PRACE HABILITACYJNE
Nr 4

MATEMATYKA–FIZYKA

Nr 1

GLIWICE 1961

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 32

Dr CZESŁAW KLUCZNY

O PEWNYCH RODZINACH KRZYWYCH W POWIĄZANIU Z TEORIĄ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

PRACA HABILITACYJNA

PRZEDSTAWIONA RADZIE WYDZIAŁU MAT.-FIZ.-CHEM.
UNIWERSYTETU MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ W LUBLINIE

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 24. I. 1961

GLIWICE 1961

REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Prof. dr inż. Andrzej Grossman

Oddano do wykonania 4. III. 1961 r.
Ark. druk. 6¾
Papier powielaczowy kl. V, 61x86, 70 g
Nakład 300+36 egz.
Zamówienie nr 356

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

CZESŁAW KLUCZNY
Katowice

O PEWNYCH RODZINACH KRZYWYCH W POWIĄZANIU Z TEORIĄ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

1. W pracy [7] T.Ważewski podał metodę badania własności asymptotycznych i brzegowych całek układów równań różniczkowych zwyczajnych opartą na pojęciu retraktu, której uzupełnieniom i modyfikacjom poświęcony jest szereg dalszych prac różnych autorów: [1], [6], [2], [3], [4]. W pracach tych pojęcie retraktu, leżące u podstaw metody T.Ważewskiego zastępowano różnymi pojęciami topologicznymi, jak retrakt deformacyjny quasi-izotopowy [6], homeomorfizm [3], homotopia [4]. Wszystkie te teorie będziemy dla prostoty nazywali retraktowymi.

Podstawowe twierdzenia występujące w różnych wariantach metody retraktowej podpadają pod pewien ogólny schemat, który można pomijając nieistotne szczegóły sformułowania przedstawić następująco.

Napiszmy w postaci wektorowej

/1/ $$x' = f(t,x)$$

układ równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie prawa strona $f(t,x)$ jest funkcją wektorową określoną i ciągłą w pewnym zbiorze W zawartym w przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej. Wnętrze zbioru W oznaczamy przez U i przyjmujemy, że $R = W.\mathrm{Front}\, W$. Zakładamy, że zbiór $\mathrm{Front}\, W - R$ jest domknięty. Ponadto zakładamy, że zbiór Z zawiera się w zbiorze W. Otóż, przy pewnych mniej lub więcej krępujących założeniach α o lokalnym zachowaniu się całek w części brzegowej zbioru W i przy pewnych założeniach β charakteryzujących topologicznie przy pomocy retraktu, homotopii itp. położenie zbioru Z względem zbiorów U i R, istnieje zawsze taki punkt zbioru Z, z którego wychodzi całka asymptotyczna w prawo, to jest wysycona na prawo względem zbioru W, lecz całkowicie zawarta w zbiorze U.

W licznych zastosowaniach metody retraktowej problem badania własności asymptotycznych całek układu równań różniczkowych lub też problemy brzegowe dla takiego układu sprowadzają się do dowodu istnienia całki asymptotycznej (w sensie wyżej określonym), wychodzącej ze zbioru Z, a cała trudność polega na stosownym określeniu zbiorów W i Z oraz na sprawdzeniu, czy spełnione są wymagane założenia α i β. Sprawdzanie założeń α ma charakter raczej rachunkowy, gdyż rolę decydującą odgrywa tu kształt prawej strony równania /1/. Sprawdzanie warunków β wymaga znajomości odpowiednich twierdzeń topologicznych, co poza najprostszymi, trywialnymi przypadkami może być nader kłopotliwe, dlatego, że idzie tu o twierdzenia topologiczne bardzo specjalne, których przygotowanie może stanowić samo w sobie nie łatwy problem. Z drugiej strony okazuje się, że w tych najprostszych typowych przypadkach można się zwykle obejść bez większego aparatu topologicznego, gdyż wystarczają tak elementarne pojęcia dotyczące struktury zbioru, jak domkniętość, ograniczoność i spójność. Jednym z celów niniejszej pracy będzie właśnie wykazanie użyteczności tych najprostszych środków w zagadnieniach, do których zwykło się stosować metody retraktowe.

Metoda retraktowa w pierwotnej swej postaci [7] stosowała się do równań spełniających warunek jednoznaczności, chociaż twórca jej T.Ważewski wskazał, jak można przy jej pomocy atakować pośrednio również równania nie spełniające tego warunku. Prace A.Bieleckiego [2], [3] dotyczyły równań niejednoznacznych, a nawet ogólniejszych jeszcze równań paratyngensowych. Wyniki swoje będące uogólnieniem wyników zawartych w pracach [7] i [6] uzyskał on stosując metodę tzw. regularyzacji polegającą na zastąpieniu rozważanego równania równaniem bardzo regularnym w pewnym podzbiorze zbioru W i zachowującym istotne własności danego równania w punktach zbioru brzegowego B. W istocie więc rzeczy i ten autor stosował metody topologiczne do równań jednoznacznych.

Innym celem niniejszej pracy jest zbudowanie takiego aparatu topologicznego, który by bezpośrednio stosował się także do równań niejednoznacznych. W prostych przypadkach wystarczają

już elementarne środki, o których wyżej wspomniałem. Chodziło mi jednak o zbudowanie formalizmu, który by obejmował także przypadki bardziej skomplikowane i takie, gdzie ze względu na niejednoznaczność równania nie mają zastosowania pojęcia retraktu, homotopii itp. W tym celu definiuję pojęcie tzw. wymiatania, które w przypadku jednoznaczności sprowadza się do specjalnego typu homotopii i na nim opieram nowy wariant "metody retraktowej".

Dalszym celem niniejszej pracy jest osłabienie w stosunku do prac cytowanych warunków α. W szczególności warunek T.Ważewskiego wykluczający tzw. poślizgi wewnętrzne może być zastąpiony warunkami mniej krępującymi. W związku z tym okazało się celowe zmodyfikowanie pojęcia całki asymptotycznej, a mianowicie definiuję ją jako całkę równania /1/ wysyconą na prawo względem zbioru W i określoną w przedziale z prawej strony otwartym. Tak uogólniona całka asymptotyczna nie musi leżeć całkowicie we wnętrzu zbioru W.

Przy założeniach nieco silniejszych, w szczególności przy tych, które przyjmowano w cytowanych pracach obie definicje całki asymptotycznej wychodzą na to samo.

W badaniach będących przedmiotem tej pracy nie jest istotne to, że rozważane krzywe są całkami jakiegoś układu równań różniczkowych. Istotne są tylko pewne własności topologiczne rodziny tych całek, dlatego ująłem rzecz abstrakcyjnie, rozważając rodziny krzywych czyniące zadość postulatom, odpowiadającym niektórym własnościom rodzin całek równania /1/. Dzięki temu dowiedzione w tej pracy twierdzenia mogą być stosowane do pewnych uogólnień równań różniczkowych np. do równań paratyngensowych.

Nieco inny charakter ma twierdzenie (11,2), odnoszące się do przypadku, gdy rozważana rodzina krzywych spełnia warunek jednoznaczności odpowiednio sformułowany, dzięki czemu mogłem tu zastosować klasyczne pojęcie homotopii. Twierdzenie to w zastosowaniach może zastąpić twierdzenie "retraktowe" z pracy [7].

2. Niech D_0 oznacza przestrzeń metryczną zupełną, w której kule domknięte są zwarte, x punkt tej przestrzeni, $\varrho(x_1, x_2)$ odległość punktów x_1 i x_2. Określamy D jako prze-

strzeń punktów $y = (t,x)$ takich, że $x \in D_0$, $-\infty < t < +\infty$. Przez odległość $d(y_1,y_2)$ punktów $y_1 = (t_1,x_1)$, $y_2 = (t_2,x_2)$ przestrzeni D rozumiemy $\max\{|t_1 - t_2|, \varrho(x_1,x_2)\}$. Wynika stąd, że kula $K(y_1,r)$ o środku y_1 i promieniu r jest zbiorem punktów (t,x) takich, że $|t - t_1| < r$ i $\varrho(x, x_1) < r$. W przestrzeni D, która jest przestrzenią metryczną i zupełną, podobnie jak w przestrzeni D_0, każdy zbiór domknięty i ograniczony jest zwarty, / i na odwrót, każdy zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony/.

Dla wygody przyjmujemy następujące oznaczenia. Jeżeli Z jest dowolnym podzbiorem przestrzeni D, to przez $Z\{t < \tau\}$ rozumieć będziemy zbiór wszystkich punktów (t,x) należących do zbioru Z, dla których jest $t < \tau$. Analogiczne znaczenia mają symbole $Z\{t \leq \tau\}$, $Z\{t_1 < t < t_2\}$, $Z\{t \in \Delta\}$, gdzie Δ oznacza pewien przedział zmiennej t itp.

W pracy niniejszej pojęcie krzywej jest rozumiane stale w sensie następującej definicji.

D e f i n i c j a (2,1). Jeżeli $\varphi(t)$ jest funkcją określoną i ciągłą w pewnym przedziale Δ zmiennej t domkniętym lub otwartym, skończonym lub nieskończonym i o wartościach z przestrzeni D_0, to zbiór punktów $(t, \varphi(t))\{t \in \Delta\}$ /czytaj: ogół takich punktów $(t, \varphi(t))$, że $t \in \Delta$ / nazywam krzywą, a zespół symboli $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$ równaniem tej krzywej. Jeżeli $\Delta_1 \subset \Delta$, to o krzywej $(t, \varphi(t))\{t \in \Delta_1\}$ mówimy, że jest częścią krzywej $(t,\varphi(t))\{t \in \Delta\}$ odpowiadającą przedziałowi Δ_1. Jeżeli $\Delta = \langle t_1,t_2\rangle$ lub $\Delta = \langle t_1,t_2)$, $/-\infty < t_1 < t_2 \leq +\infty/$, to o krzywej mówię, że wychodzi z punktu $(t_1,\varphi(t_1))$, który nazywam początkiem krzywej. Analogicznie określamy koniec krzywej.

D e f i n i c j a (2,2). Krzywą o równaniu $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$ nazywamy krzywą typu L, jeżeli Δ jest przedziałem skończonym postaci $\langle t_1,t_2\rangle$. Krzywe typu L oraz punkty obejmujemy wspólną nazwą elementów typu L. O elemencie typu L, który jest punktem mówimy, że ma początek i koniec w tym punkcie.

D e f i n i c j a (2,3). Mówimy, że zbiór F, którego każdy element jest bądź krzywą zawartą w zbiorze W bądź punktem zbioru W, jest rodziną typu $\mathcal{F}$ określoną w zbiorze W, jeżeli są spełnione następujące warunki (por. [9]):

1^0 Punkty zbioru W są elementami zbioru F,

2^0 Każda krzywa, która jest częścią pewnej krzywej zbioru F lub sumą dwóch elementów zbioru F, należy do zbioru F^*. Ponadto, jeżeli każda część krzywej I będąca krzywą typu L należy do zbioru F, to i krzywa I należy do zbioru F.

3^0 Jeżeli W^* jest podzbiorem zwartym zbioru W, a F^* oznacza podzbiór zbioru F, do którego należą wszystkie elementy typu L, zawarte w zbiorze W^* i tylko takie, to zbiór F^* jest zwarty, inaczej mówiąc, z każdego ciągu elementów typu L należących do zbioru F i zawartych w podzbiorze zwartym zbioru W można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu zbioru F typu L, przy czym zbieżność ciągu zbiorów zwartych rozumiemy tu według następującej definicji.

D e f i n i c j a (2,4). Ciąg zbiorów I_1, I_2 jest zbieżny do zbioru I, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N taka, że dla $n > N$ jest $I_n \subset K(I,\varepsilon)$ oraz $I \subset K(I_n,\varepsilon)$, gdzie $K(A,\varepsilon)$ oznacza otoczenie ε-owe zbioru A.

Symbolem Z_1F będziemy oznaczali założenie, że zbiór F jest rodziną typu $\mathcal{F}$ określoną w zbiorze W. W dalszych rozważaniach przyjmujemy to założenie.

T w i e r d z e n i e (2,1). Jeżeli zbiór W_0 jest podzbiorem zwartym zbioru W, a F_0 oznacza zbiór elementów rodziny F zawartych w zbiorze W_0, to krzywe zbioru F_0 są jednakowo ciągłe.

D o w ó d. Przypuśćmy, że krzywe zbioru F_0 nie są jednakowo ciągłe. W takim razie istnieją: liczba dodatnia ε, ciąg funkcji $\varphi^m(t)$ i ciąg przedziałów $\langle t_1^m, t_2^m \rangle$ takie, że $0 < t_2^m - t_1^m \leq \frac{1}{m}$, a równanie $x = \varphi^m(t)$, $t_1^m \leq t \leq t_2^m$ jest równaniem pewnej krzywej I^m rodziny F_0, a ponadto

$$|\varphi^m(t_2^m) - \varphi^m(t_1^m)| \geq \varepsilon \quad /m = 1,2,..../.$$

Ponieważ krzywe I^m są zawarte w zbiorze W_0, który jest zwarty i $W_0 \subset W$, to z własności 3^0 rodziny F wynika, że

---

*) W szczególności suma krzywej należącej do zbioru F i punktu należącego do zbioru W należy do zbioru F, o ile tylko ta suma jest krzywą.

z ciągu I^m można wybrać podciąg I^{m_k} zbieżny do pewnego elementu I typu L rodziny F_0. Połóżmy:

$$\varphi^m(t_1^m) = \bar{x}^m, \quad \varphi^m(t_2^m) = \bar{\bar{x}}^m, \quad \lim_{k\to\infty} t_1^{m_k} = t_1,$$

$$\lim_{k\to\infty} t_2^{m_k} = t_2, \quad \lim_{k\to\infty} \bar{x}^{m_k} = \bar{x}, \quad \lim_{k\to\infty} \bar{\bar{x}}^{m_k} = \bar{\bar{x}}.$$

Punkty $(t_1, \bar{x})$, $(t_2, \bar{\bar{x}})$ leżą na elemencie I. Z drugiej strony z nierówności:

$$0 < t_2^{m_k} - t_1^{m_k} \leqslant \frac{1}{m_k}, \quad |\bar{\bar{x}}^{m_k} - \bar{x}^{m_k}| \geqslant \varepsilon$$

wynika, że $t_2 = t_1$ i $|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \geqslant \varepsilon$, wobec czego zbiór zawierający punkty $(t_1, \bar{x})$, $(t_2, \bar{\bar{x}})$ nie może być elementem rodziny F_0. Otrzymana sprzeczność stanowi dowód twierdzenia (2,1).

3. D e f i n i c j a (3,1). Punkt zbioru W, który nie jest początkiem (końcem) żadnej krzywej rodziny F nazywać będziemy punktem końcowym prawym (lewym), a zbiór wszystkich takich punktów oznaczać symbolem S (symbolem S^-).

D e f i n i c j a (3,2). Mówimy, że element I rodziny F daje się przedłużyć w prawo (w lewo), jeżeli istnieje krzywa I_1 rodziny F taka, że $I \subset I_1$ i istnieje punkt należący do krzywej I_1 o współrzędnej czasowej t większej (mniejszej) od współrzędnej czasowej dowolnego punktu elementu I.

D e f i n i c j a (3,3). Element I rodziny F nazywamy wysyconym w prawo (w lewo), jeżeli element I nie da się przedłużyć w prawo (w lewo).

T w i e r d z e n i e (3,1). Jeżeli element I ma koniec (początek) w punkcie, który nie należy do zbioru S (do zbioru S^-), to element I daje się przedłużyć w prawo (w lewo).

Twierdzenie to wynika od razu z określenia zbiorów S i S^- i z własności 2^o rodziny F.

T w i e r d z e n i e (3,2). Jeżeli krzywa I nie jest typu L, ale zawiera się w podzbiorze zwartym W_0 zbioru W, to istnieje krzywa rodziny F typu L będąca przedłużeniem krzywej I.

D o w ó d. Przypuśćmy, że krzywa I ma równanie $x = \varphi(t)$, $t_1 \leqslant t < t_2$ i $I \subset W_0$. Istnieje ciąg liczb τ_0, τ_1,..... taki, że $t_1 = \tau_0 < \tau_1$ ... i $\lim_{n\to\infty} \tau_n = t_2$. Niech I_n oznacza część krzywej I odpowiadającą przedziałowi $\langle t_1, \tau_n\rangle$, n=1,2.... Z własności 3^0 rodziny F wynika, że ciąg I_1, I_2,.... jest zbieżny do pewnej krzywej I_0 określonej w przedziale $\langle t_1, t_2\rangle$ będącej krzywą rodziny F i zawierającej krzywą I. Stanowi to dowód twierdzenia dla przypadku, gdy funkcja $\varphi(t)$ jest określona w przedziale postaci $\langle t_1, t_2)$. W pozostałych przypadkach dowód jest analogiczny.

Z twierdzeń (3,1) i (3,2) wynika następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e (3,3). Element rodziny F o początku (końcu) w punkcie P jest wysycony w prawo (w lewo) wtedy i tylko wtedy, gdy albo ma koniec w zbiorze S (początek w zbiorze S^-), albo nie zawiera się w żadnym podzbiorze zwartym zbioru W. W tym drugim przypadku element wysycony jest krzywą określoną w przedziale z prawej (z lewej) strony otwartym lub w przedziale nieograniczonym w prawo (w lewo).

D e f i n i c j a (3,4). Krzywą I rodziny F nazywamy asymptotyczną w prawo (w lewo) ze względu na zbiór W*), jeżeli jest krzywą wysyconą w prawo i nie ma końca (w lewo i nie ma początku).

Z twierdzenia (3,3) i definicji (3,4) wynika następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e (3,4). Krzywa rodziny F o początku (końcu) w punkcie P jest asymptotyczną w prawo (w lewo) wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera się w żadnym podzbiorze zwartym zbioru W.

---

*) Zwrot "ze względu na zbiór W" będziemy w dalszym ciągu opuszczali.

4. D e f i n i c j a (4,1). Strefą emisji prawej (lewej) zbioru α zawartego w zbiorze W nazywamy zbiór wszystkich punktów położonych na elementach rodziny F mających początek (koniec) w zbiorze α. Strefę emisji prawej (lewej) zbioru α oznaczać będziemy symbolem $E(\alpha)$, $/E^{-}(\alpha)/$. Sumę $E(\alpha) + E^{-}(\alpha)$ nazywamy strefą emisji całkowitej zbioru α. Analogicznie określamy strefę emisji punktu.

Ograniczymy się do sformułowania niektórych własności strefy emisji prawej. Przymiotnik "prawy" będziemy opuszczali wszędzie tam, gdzie to nie może prowadzić do nieporozumień.

(i_1) $$E(\alpha) = \sum_{(t,x)\in\alpha} E(t, x),$$

(i_2) $(\tau,\xi) \in E(\tau,\xi)$; $E(\tau,\xi) = (\tau,\xi)$ tylko wtedy, gdy punkt $(\tau,\xi) \in S$,

(i_3) jeżeli $(\tau_1, \xi_1) \subset E(\tau,\xi)$, to $E(\tau_1,\xi_1) \subset E(\tau, \xi)$,

(i_4) jeżeli $(\tau_1, \xi_1) \in E(\tau,\xi)$, a $\tau \leq \tau_2 \leq \tau_1$, to istnieje ξ_2 takie, że $(\tau_2, \xi_2) \subset E(\tau,\xi)$ i $(\tau_1,\xi_1) \in E(\tau_2,\xi_2)$.

Własności (i_1) i (i_2) wynikają wprost z definicji (4,1), a pozostałe z własności rodziny F i z uwagi na to, że punkt $(t,x) \in E(\tau,\xi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element rodziny F o początku (τ,ξ) i końcu (t,x).

Z (i_1) - (i_4) łatwo wynikają następujące dalsze własności strefy emisji:

$$E(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta); \quad \text{jeżeli } \alpha \subset \beta,$$

$$\text{to } E(\alpha) \subset E(\beta); \quad \alpha \subset E(\alpha),$$

(i_5) jeżeli $\beta \subset E(\alpha)$, to $E(\beta) \subset E(\alpha)$; $E(E(\alpha)) = E(\alpha)$.

Z a ł o ż e n i e Z_1. Zbiór W punktów (t,x) jest zawarty w przestrzeni D. Oznaczamy $U = \text{Int } W$, $R = W \cdot \text{Front } W$ i zakładamy, że zbiór $\Psi = \text{Front } W - R$ jest domknięty. Zbiór Ψ w szczególności może być pusty lub identyczny z brzegiem zbioru W.

Przy tym założeniu, które zresztą obowiązuje w dalszym ciągu, udowodnimy teraz twierdzenie, które okaże się podstawowym dla badania własności asymptotycznych rodzin typu $\mathcal{F}$.

T w i e r d z e n i e (4.1). Przyjmijmy założenie Z_1. Jeżeli zbiór α jest zwarty i $\alpha \subset W$, a ze zbioru α nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to strefa emisji zbioru α jest zbiorem zwartym.

D o w ó d. Obierzmy dowolny punkt A i niech $r_1, r_2, \ldots$ będzie ciągiem rosnącym do $+\infty$. Oznaczmy przez K_i kulę domkniętą o środku w punkcie A i o promieniu r_i. Zakładamy, że liczba r_1 jest tak duża, że $\alpha \subset K_1$. Z założenia Z_1 wynika, że $d(\alpha,\psi) > 0$. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem malejącym do zera, a $\varepsilon_1 < d(\alpha,\psi)$. Połóżmy $W_n = K_n - K(\psi, \varepsilon_n)$, gdzie $K(\psi, \varepsilon_n)$ oznacza otoczenie otwarte zbioru ψ o promieniu ε_n, $n = 1,2, \ldots$ Zbiór α jest zawarty w każdym ze zbiorów W_n, $n = 1,2, \ldots$ Twierdzimy, że istnieje takie m, że $E(\alpha) \subset W_m$. W przeciwnym razie istniałby ciąg $I_1, I_2, \ldots$ krzywych rodziny F, z których każda wychodziłaby ze zbioru α, a krzywa I_n miałaby koniec na brzegu zbioru W_n, $n = 1,2, \ldots$. Niech punkt P_n będzie początkiem krzywej I_n. Oznaczmy dla $n \geq k$ przez I_n^k część krzywej I_n zawartą w zbiorze W_k i będącą krzywą rodziny F o początku w punkcie P_n i końcu leżącym na brzegu zbioru W_k. Na mocy własności 3^0 rodziny F i z uwagi na zwartość zbioru α z ciągu I_n można wybrać podciąg I_{n_1} taki, że ciąg krzywych $I_{n_1}^1$ będzie zbieżny do pewnej krzywej I^1 rodziny F wychodzącej z pewnego punktu P należącego do zbioru α i mającej koniec na brzegu zbioru W_1. Z ciągu I_{n_1} można w podobny sposób wybrać podciąg I_{n_2} taki, że ciąg krzywych $I_{n_2}^2$ będzie zbieżny do pewnej krzywej I^2 rodziny F wychodzącej z punktu P i mającej koniec na brzegu zbioru W_2. Postępując w podobny sposób otrzymamy w końcu ciąg $I^1, I^2, \ldots$ krzywych rodziny F wychodzących z punktu P, taki że krzywa I^k dociera do brzegu zbioru W_k $(k = 1,2, \ldots)$, a ponadto $I^1 \subset I^2 \subset \ldots$ Krzywa $I = I^1 + I^2 + \ldots$ byłaby na mocy własności 2^0 rodziny F krzywą rodziny F,

przy czym krzywa ta nie zawierałaby się w żadnym ze zbiorów W_k, $k = 1,2,\ldots$ Z domkniętości zbioru Ψ (por. założenie Z_1) wynika, że dowolny podzbiór zwarty zbioru W zawiera się w którymś ze zbiorów W_k, $k = 1,2\ldots\ldots$, wobec tego krzywa I nie zawierałaby się w żadnym podzbiorze zwartym zbioru W i na mocy twierdzenia (3,4) byłaby krzywą asymptotyczną. Otrzymana sprzeczność z założeniami twierdzenia (4,1) dowodzi, że istnieje liczba m taka, że $E(\alpha) \subset W_m$. Znaczy to, że zbiór $E(\alpha)$ jest ograniczony. Pozostaje wykazać domkniętość zbioru $E(\alpha)$. Ponieważ $E(\alpha) \subset W$, to $E(\alpha) \subset W \cdot W_m$. Zbiór $W \cdot W_m$ jest podzbiorem zwartym zbioru W. Załóżmy, że punkt $Q_n \in E(\alpha)$, $n = 1,2,\ldots$ i $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$. Wynika stąd, że istnieje ciąg $P_1, P_2\ldots\ldots$ punktów należących do zbioru α i ciąg krzywych $J_1, J_2,\ldots\ldots$ rodziny F taki, że krzywa J_n ma początek w punkcie P_n i koniec w punkcie Q_n. Ponieważ $J_n \subset W \cdot W_n$, $n = 1,2,\ldots$, to z własności 3^0 rodziny F wynika, że istnieje także krzywa rodziny F o początku w pewnym punkcie P i końcu w punkcie Q. Punkt P jest przy tym punktem skupienia ciągu $P_1, P_2,\ldots$ i ze względu na zwartość zbioru α należy do α. Znaczy to, że ze zbioru α wychodzi krzywa rodziny F do punktu Q, a zatem punkt $Q \in E(\alpha)$, czego należało dowieść.

Z twierdzenia (4,1) wynika w szczególności, że jeżeli z punktu P należącego do zbioru W nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to strefa emisji punktu P jest zbiorem zwartym.

T w i e r d z e n i e (4,2). Z punktu należącego do zbioru W wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F wtedy i tylko wtedy, gdy strefa emisji tego punktu nie jest zbiorem zwartym.

D o w ó d. Jeżeli punkt P należy do zbioru W i zbiór E(P) jest zwarty, a krzywa I rodziny F wychodzi z punktu P, to krzywa I jest zawarta w zbiorze E(P), który jest podzbiorem zwartym zbioru W, i na mocy twierdzenia (3,4) nie może być krzywą asymptotyczną. Ta uwaga łącznie z twierdzeniem (4,1) stanowi dowód twierdzenia (4,2).

T w i e r d z e n i e (4,3). Każdy punkt zbioru W jest początkiem (końcem) pewnego elementu rodziny F wysyconego w prawo (w lewo).

D o w ó d. Jeżeli punkt $(\tau, \xi) \in W$ i zbiór $E(\tau, \xi)$ nie jest zwarty, to na mocy twierdzenia (4,2) z punktu (τ, ξ) wychodzi krzywa asymptotyczna i jako taka jest krzywą wysyconą w prawo. Jeżeli natomiast zbiór $E(\tau, \xi)$ jest zwarty, to istnieje punkt (τ_1, ξ_1) należący do $E(\tau, \xi)$, taki że liczba τ_1 jest największą spośród współrzędnych czasowych punktów należących do $E(\tau, \xi)$. Wobec tego punkt $(\tau_1, \xi_1) \in S$ i istnieje element rodziny F o początku w punkcie (τ, ξ) i końcu w punkcie (τ_1, ξ_1). Element ten na mocy twierdzenia (3,3) jest elementem wysyconym rodziny F. Dowód drugiej części twierdzenia jest analogiczny.

W n i o s e k (4,1). Każdy element rodziny F mający początek (koniec) w punkcie P jest częścią pewnego elementu wysyconego rodziny F o początku (końcu) w punkcie P.

W n i o s e k (4,2). Strefa emisji prawej (lewej) zbioru α jest zbiorem punktów położonych na elementach rodziny F mających początek (koniec) w zbiorze α i wysyconych w prawo (w lewo).

5. W dalszym ciągu zajmiemy się twierdzeniami dotyczącymi istnienia krzywej asymptotycznej rodziny F. Przypominamy, że obowiązują założenia Z_1 i Z_1F.

T w i e r d z e n i e (5,1). Jeżeli zbiór $S \subset S^-$, to z każdego punktu zbioru $W-S$ wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F, a w szczególności, jeżeli zbiór S jest pusty, to z każdego punktu zbioru W wychodzi krzywa asymptotyczna.

D o w ó d. Na mocy twierdzenia (4,3) z każdego punktu zbioru $W - S$ wychodzi element wysycony rodziny F, a ponieważ $S \subset S^-$, to element ten nie ma końca, a zatem jest krzywa asymptotyczną (w prawo).

Prostym wnioskiem z twierdzenia (4,1) jest twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e (5,2). Jeżeli zbiór a zawarty w zbiorze W jest zwarty, lecz strefa emisji zbioru a nie

jest zbiorem zwartym, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

Wobec tego, dla dowodu, że ze zbioru zwartego $a \subset W$ wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F, wystarczy okazać, że $E(a)$ nie może być zbiorem zwartym. Uwaga ta prowadzi do następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e (5,3). Załóżmy, że rodzina F nie posiada krzywych asymptotycznych w lewo. Jeżeli zbiór $W - S.S^-$ jest nieograniczony, a zbiór $a = S^- - S.S^-$ zawiera się w podzbiorze zwartym W^* zbioru W, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

D o w ó d. Wykażemy najpierw, że $W - S.S^- \subset E(a)$. Jeżeli punkt $P \in W$, to punkt P jest końcem pewnego elementu I rodziny F wysyconego w lewo w zbiorze W, a ponieważ nie ma krzywych asymptotycznych w lewo, to element I ma początek w zbiorze S^-. Wynika stąd, że $W \subset E(S^-)$, a ponieważ $S.S^- = E(S.S^-)$, to $W - S.S^- \subset E(S^- - S.S^-)$. Lecz $S^- - S.S^- = a$, zatem $W - S.S^- \subset E(a)$ i tym bardziej $W - S.S^- \subset E(W^*)$, a ponieważ z założenia zbiór W^* jest zwarty, to na mocy twierdzenia (5,2) z pewnego punktu Q należącego do zbioru W^* wychodzi pewna krzywa asymptotyczna I_1 rodziny F. Ponieważ wykazaliśmy, że z punktu Q wychodzi krzywa (asymptotyczna), to $Q \notin S$. Wobec tego, jeżeli $Q \notin a$, $/a = S^- - S.S^-/$, to $Q \notin S^-$, a zatem punkt Q jest końcem pewnej krzywej I_2 rodziny F, wysyconej w lewo i mającej początek w pewnym punkcie Q_1 należącym do zbioru S^-. Ponadto punkt $Q_1 \notin S$, a więc $Q_1 \in a$. Suma $I_1 + I_2$ jest krzywą asymptotyczną rodziny F wychodzącą ze zbioru a. W ten sposób twierdzenie (5,3) zostało udowodnione.

Krzywych asymptotycznych w lewo nie będzie na pewno w tym przypadku, gdy dla każdego τ zbiór $W\{t \leq \tau\}$ jest zwarty (lub pusty). Istotnie, jeżeli punkt $(t_1, x_1) \in W$, to każda krzywa rodziny F, która ma koniec w tym punkcie, zawiera się w zbiorze zwartym $W\{t \leq t_1\}$, zatem krzywa taka nie może być asymptotyczną.

Z uwagi tej i z twierdzenia (5,3) wynika następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e (5,4). Jeżeli zbiór $W - S.\overline{S^-}$ jest nieograniczony, ale dla każdego τ zbiór $W\{t \leq \tau\}$ jest zwarty, /w szczególności może być pusty/, a ponadto zbiór $a = \overline{S^-} - S.\overline{S^-}$ jest ograniczony, to ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

Ze względu na zastosowania formułujemy prosty przypadek szczególny ostatniego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e (5,5). Jeżeli zbiór W jest nieograniczony, ale dla każdego τ zbiór $W\{t \leq \tau\}$ jest zwarty, a ponadto zbiór $\overline{S^-}$ jest ograniczony, to ze zbioru $\overline{S^-}$ wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

U w a g a (5,1). Jeżeli zmienimy kierunek osi t, to krzywe asymptotyczne w prawo staną się asymptotycznymi w lewo, punkty końcowe prawe punktami końcowymi lewymi, a strefa emisji prawej strefą emisji lewej. Korzystając z tej uwagi można łatwo sformułować twierdzenia dotyczące istnienia krzywych asymptotycznych w lewo rodziny F. Tak np. w twierdzeniach (5,1) i (5,4) wystarczy zastąpić S przez $\overline{S^-}$ i na odwrót $\overline{S^-}$ przez S a zwrot "ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna" przez "istnieje krzywa asymptotyczna w lewo mająca koniec w zbiorze a", aby twierdzenia te stały się twierdzeniami dotyczącymi istnienia krzywej asymptotycznej w lewo.

U w a g a (5,2). Oznaczmy przez $F(\tau)$ zbiór elementów rodziny F zawartych w zbiorze $W\{t \leq \tau\}$ i podobnie, jak w założeniu Z_1 położmy:

$$R(\tau) = W\{t \leq \tau\}.\text{Front } W\{t \leq \tau\}, \tag{5,1}$$

$$\varphi(\tau) = \text{Front } W\{t \leq \tau\} - R(\tau), \tag{5,2}$$

oraz

$$S(\tau) = W\{t = \tau\} + S\{t < \tau\}. \tag{5,3}$$

Jest $R(\tau) = W\{t = \tau\} + R\{t < \tau\}$ i $\Psi(\tau) = \Psi\{t \leq \tau\}$. Z ostatniej równości wynika, że zbiór $\Psi(\tau)$ jest domknięty. Znaczy to, że zbiór $W\{t \leq \tau\}$, /o ile nie jest pusty/, spełnia założenie Z_1, a zbiór $F(\tau)$ jest rodziną krzywych typu $\mathcal{F}$ określoną w zbiorze $W\{t \leq \tau\}$. Będziemy także mówili, że zbiór $F(\tau)$ jest rodziną F zredukowaną do zbioru $W\{t \leq \tau\}$. Zbiór $S(\tau)$ jest zbiorem punktów końcowych rodziny $F(\tau)$.

Oczywiście, że wszystkie twierdzenia udowodnione dla rodziny F określonej w zbiorze W są słuszne i dla rodziny $F(\tau)$ i zbioru $W\{t \leq \tau\}$, o ile tylko zbiór ten nie jest pusty. Analogiczna uwaga dotyczy rodziny F zredukowanej do zbioru $W\{t \geq \tau\}$.

Dla rodzin typu $\mathcal{F}$ nie podaliśmy jeszcze twierdzeń dotyczących zagadnień brzegowych. Twierdzenia takie, chociaż trywialne, można jednak formułować. Jeżeli np. zbiór W ma tę własność, że dla każdego τ zbiór $W\{t \leq \tau\}$ jest zwarty, a zbiór S jest pusty, to z twierdzenia (5,1) wynika, że z dowolnego punktu P należącego do zbioru W wychodzi element rodziny F do zbioru $W\{t = \tau\}$, o ile $\tau \geq t_p$, gdzie t_p oznacza odciętą punktu P. Jest także oczywiste, że ze zbioru S^- wychodzi element rodziny F do dowolnego punktu zbioru W.

Dla ilustracji teorii podajemy następujący przykład:

P r z y k ł a d (5,1). Niech D_0 będzie przestrzenią euklidesową n-wymiarową, a $\varphi(t)$ funkcją /skalarną/ określoną i ciągłą dla dowolnych wartości zmiennej t, przy czym $\varphi(t) \geq 0$. Połóżmy $W = (t,x)\{|x| \leq \varphi(t), -\infty < t < +\infty\}$.

Zbiór W spełnia założenie Z_1. Przyjmijmy założenie Z_1F. Twierdzimy, że jeżeli jeden ze zbiorów S^- lub S jest pusty, to istnieje krzywa rodziny F określona w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

D o w ó d. Załóżmy, że zbiór S^- jest pusty i oznaczmy przez $\hat{F}$ rodzinę F zredukowaną do zbioru $W\{t \geq 0\}$, a przez $\hat{S}^-$ zbiór punktów końcowych lewych rodziny $\hat{F}$. Ponieważ założyliśmy, że $S^- = 0$, to łatwo zauważyć, że $\hat{S}^- = W\{t = 0\}$. Zbiór $W\{t \geq 0\}$ i rodzina $\hat{F}$ spełniają założenia twierdzenia (5,4), a zatem istnieje punkt P należący do zbioru

$W\{t = 0\}$, z którego wychodzi pewna krzywa asymptotyczna I^+ rodziny $\hat{F}$. Krzywa ta nie zawiera się w żadnym ze zbiorów $W\{0 \leq t \leq \tau\}$, ponieważ zbiory te są zwarte, a zatem krzywa I^+ jest określona w przedziale $\langle 0, +\infty)$. Ze względu na uwagę (5,1) i twierdzenie (5,1) każdy punkt zbioru $W\{t = 0\}$ jest końcem pewnej krzywej rodziny F, asymptotycznej w lewo. Oznaczmy przez I^- krzywą asymptotyczną w lewo rodziny F, która ma koniec w punkcie P. Krzywa I^- jest określona w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, a suma $I^- + I^+$ jest krzywą rodziny F określoną w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

W przypadku, gdy zbiór S jest pusty dowód przebiega zupełnie analogicznie. Prawdziwość twierdzenia w tym drugim przypadku wynika także z uwagi (5,1).

W rozważonym przykładzie zamiast założenia, że jeden ze zbiorów S^- lub S jest pusty wystarczy przyjąć, że $S^- \subset S$ lub $S \subset S^-$, o ile dla każdego τ zbiór $W\{t = \tau\}$ nie zawiera się ani w zbiorze S ani w zbiorze S^-.

6. W dalszym ciągu niniejszej pracy zajmiemy się rodzinami bardziej zbliżonymi do rodzin całek układu równań różniczkowych.

D e f i n i c j a (6,1). Mówimy, że rodzina F jest rodziną typu G_0 określoną w zbiorze W, jeżeli F jest rodziną typu $\mathcal{F}$ określoną w zbiorze W, a ponadto jest spełniony następujący warunek:

4^+ Jeżeli punkt $P \in U$ / $U = \mathrm{Int}\, W$/, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że przecięcie się strefy emisji punktu P z hiperpłaszczyzną $t = \tau$ jest dla $t_P \leq \tau \leq t_P + \varepsilon$ continuum, to znaczy zbiorem domkniętym, ograniczonym, spójnym i niepustym.

Zgodnie z określeniem rodzina typu G_0 posiada także własności 1^0, 2^0 i 3^0 rodziny typu $\mathcal{F}$. Warunek 4^+ oznacza, że w zbiorze U jest spełniony lokalnie w prawo warunek Knezera. Z 4^+ wynika - inaczej niż w przypadku dowolnej rodziny typu $\mathcal{F}$ - że zbiór punktów końcowych prawych jest zawarty w zbiorze R, chociaż punkty końcowe lewe mogą się znajdować w zbiorze U.

D e f i n i c j a (6,2). Punkty zbioru W, które nie są początkami (końcami) takich krzywych rodziny F, które choćby częściowo leżą w zbiorze U zaliczam do zbioru T /do zbioru T^-/.

Z a ł o ż e n i e Z_2. Jeżeli krzywa rodziny F ma początek w zbiorze U, a koniec w zbiorze R, to koniec ten należy do zbioru T.

Z a ł o ż e n i e Z_3. Jeżeli krzywa rodziny F ma początek w zbiorze U, a koniec w zbiorze R, to koniec ten należy do zbioru S.

Założenia Z_2 i Z_3 wykluczają pewne typy tak zwanych poślizgów wewnętrznych*).

Ponieważ w pracy niniejszej rodzina typu G_0 jest rozważana wyłącznie przy jednym z powyższych założeń, to dla wygody rodzinę typu G_0 spełniającą założenie Z_2 /Z_3/ zaliczam do typu G /G_*/, a założenie, że rodzina F jest typu G /G_*/ oznaczam symbolem Z_2F /Z_3F/.

D e f i n i c j a (6,3). Punkt P nazywamy punktem mocnego wyjścia (mocnego wejścia), jeżeli $P \in S$ ($P \in S^-$) i jeżeli istnieje krzywa rodziny F mająca koniec (początek) w punkcie P zawarta poza punktem P w zbiorze U. Zbiór punktów mocnego wyjścia (mocnego wejścia) oznaczać będziemy symbolem S_* (symbolem S_*^-)**)

Z definicji (6,3) wynika, że w założeniu Z_3 można na miejsce S położyć S_*.

Z definicji (6,1) i (6,2) wynika, że jeżeli jest spełnione założenie Z_2F, to

(6,1) $\quad S \subset T \subset R, \quad T^- \subset R,$

(6,2) $\quad$ jeżeli $a \subset T$, to $E(a) \subset T$,

(6,3) $\quad E(U + T) = U + T.$

---

*) W pracach o podobnym temacie warunek analogiczny jest mocniejszy /por. [7] [1] [6] [2] [4]/.

**) Definicja (6,3) pokrywa się z określeniem punktu mocnego wyjścia podaną przez A.Bieleckiego [2]. Pojęcie to jest ogólniejsze od pojęcia punktu ścisłego wyjścia (por.[7]).

Ponadto

(6,4) $$T + T^{-} = R.$$

Udowodnimy nieco mniej oczywisty wzór (6,4). Z (6,1) wynika, że $T + T^{-} \subset R$. Pozostaje wykazać, że $R \subset T + T^{-}$. Przypuśćmy, że istnieje punkt P taki, że $P \in R$ lecz $P \notin T$ i $P \notin T^{-}$. Ponieważ $P \notin T^{-}$, więc na mocy definicji (6,1) istnieje krzywa rodziny F o początku w zbiorze U i końcu w punkcie P. Lecz $P \in R$, wobec tego z założenia Z_2 wynika, że $P \in T$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $R \subset T + T^{-}$ q.e.d.

Przy założeniu Z_3F mamy ponadto związki następujące:

(6,5) $$S + T^{-} = R$$

(6,6) $$E(U + S) = U + S, \quad E(U + S_*) = U + S_*.$$

Wzór (6,5) można udowodnić rozumując podobnie, jak przy dowodzie wzoru (6,4); wzory (6,6) wynikają z definicji (6,3) i ~~(6,4)~~. przyjętego założenia Z_3F

W uzupełnieniu wzorów (5,1) - (5,3) połóżmy

(6,7) $$T(\tau) = W\{t = \tau\} + T\{t < \tau\}.$$

7. W dalszym ciągu pracy przyjmujemy założenie Z_2F.

D e f i n i c j a (7,1). Zbiór $e(a) = E(a).T$ nazywamy śladem emisji zbioru a, a zbiór $e(a,\tau) = E(a).T(\tau)$ śladem emisji zbioru a w zbiorze $T(\tau)$.

Zbiór $e(a,\tau)$ nie jest pusty, jeżeli zbiór a zawiera punkt o współrzędnej czasowej nie większej od liczby τ. Zbiory $e(a)$ i $e(a,t)$ mają własności następujące:

(v_1) $e(a) \subset E(a)$; $e(a + b) = e(a) + e(b)$, jeżeli $a \subset b$, to $e(a) \subset e(b)$; jeżeli $a \subset S$, to $e(a) = a$; jeżeli $a \subset T$, to $e(a) = E(a) \subset T$,

(v_2) jeżeli $E(a) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$, to $e(a) = e(a,\bar{t})$,

(v_3) $e(e(a)) = e(a)$,

(v_4) jeżeli $a \subset W\{t \leq \tau\}$ i $\tau \leq \bar{t} \leq \bar{\bar{t}}$, to $e(a,\bar{\bar{t}}) = e(e(a,\bar{t}),\bar{\bar{t}})$.

Własności (v_1) wynikają z definicji (7,1), odpowiednich własności strefy emisji oraz z (6,1) i (6,2). Własności (v_2) - (v_4) udowodnimy szczegółowo. Jeśli $E(a) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$ to zbiór $E(a).W\{t = \bar{t}\}$ zawiera się w zbiorze $S\{t = \bar{t}\}$ lub jest pusty, a zatem $E(a).W\{t = \bar{t}\} = E(a).S\{t = \bar{t}\} = E(a).T\{t \geq \bar{t}\}$. Wobec tego z definicji (7,1) i ze wzoru (6,7) otrzymujemy $e(a,\bar{t}) = E(a).T(\bar{t}) = E(a).(W\{t = \bar{t}\} + T\{t<\bar{t}\}) = E(a).T = e(a)$. Udowodniliśmy (v_2). Na mocy definicji (7,1) i z uwagi na własności strefy emisji otrzymujemy:

$$e(e(a)) = E(e(a)).T \subset E(E(a)).T = E(a).T = e(a),$$

oraz

$$e(a) = e(a).T \subset E(e(a)).T = e(e(a)).$$

W ten sposób udowodniliśmy (v_3). Przechodzimy do dowodu (v_4). Z uwagi na własności strefy emisji otrzymujemy z definicji (7,1):

(7,1) $$e(e(a,\bar{t}),\bar{\bar{t}}) = E(e(a,\bar{t})).T(\bar{\bar{t}}) \subset E(E(a)).T(\bar{\bar{t}}) = E(a).T(\bar{\bar{t}}) = e(a,\bar{\bar{t}}).$$

Z drugiej strony, jeżeli punkt $Q \in e(a,\bar{\bar{t}})$, to istnieje punkt P taki, że $P \in a \subset W\{t \leq \bar{t}\}$ i element I rodziny F o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q. Lecz $e(a,\bar{\bar{t}}) \subset T(\bar{\bar{t}}) \subset R(\bar{\bar{t}}) \subset Front.W\{t \leq \bar{\bar{t}}\}$. Ponieważ $W\{t \leq \bar{t}\} \subset W\{t \leq \bar{\bar{t}}\}$, a element I wychodzi ze zbioru $W\{t \leq \bar{t}\}$ i dociera do brzegu zbioru $W\{t \leq \bar{\bar{t}}\}$, to element I spotyka brzeg zbioru $W\{t \leq \bar{t}\}$. Niechaj Q_1 będzie punktem o największej współrzędnej czasowej spośród współrzędnych czasowych punktów należą-

cych do zbioru I.Front $W\{t \leq \bar{t}\}$. Punkt $Q_1 \in T(\bar{t})$, a ponieważ $Q_1 \in E(a)$, to punkt $Q_1 \in e(a,\bar{t})$. Znaczy to, że $Q \in E(e(a,\bar{t}))$, a że $Q \notin T(\bar{t})$, to $Q \in E(e(a,\bar{t})).T(\bar{t}) = e(e(a,\bar{t}),\bar{t})$. Ten wynik łącznie z (7,1) stanowi dowód własności (v_4).

8. W tym punkcie udowodnimy podstawowe dla dalszych rozważań twierdzenia. /Obowiązują założenia Z_1 i Z_2F/.

T w i e r d z e n i e (8,1). Jeżeli zbiór zwarty a jest zawarty w zbiorze U + T i ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to ślad emisji zbioru a jest zbiorem zwartym.

D o w ó d. Ponieważ $T \subset$ Front W, to $e(a) = E(a).T \subset E(a)$.Front W. Z drugiej strony, ponieważ $a \subset U + T$, to z założenia Z_2F i z definicji (6,2) zbioru T wynika, że $E(a)$.Front $W \subset E(a).T$. Wobec tego $e(a) = E(a)$.Front W i na mocy twierdzenia (4,1) zbiór e(a) jest zwarty.

T w i e r d z e n i e (8,2). Jeżeli punkt P należy do zbioru U + T i z punktu P nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to ślad emisji punktu P jest continuum*).

D o w ó d. Na mocy twierdzenia (8,1) zbiór e(P) jest zwarty. Pozostaje udowodnić, że zbiór e(P) jest spójny. Jeżeli $P \in T$, to na mocy własności (v_1) jest $e(P) = E(P)$, a zatem zbiór e(P) jako suma łuków wychodzących z punktu P jest spójny. Dla dowodu twierdzenia (8,2) pozostaje wykazać spójność zbioru e(P) w przypadku, gdy punkt P należy do zbioru U. Przypuśćmy więc, że $P \in U$ i że zbiór e(P) jest sumą dwóch zbiorów rozgraniczonych b i c, które ze względu na zwartość zbioru e(P) są także zwarte, a zatem:

(8,1) $$e(P) = b + c,\ b.c = 0,\ b = \bar{b},\ c = \bar{c}.$$

*) W [5] podano pewne uogólnienie twierdzenia Knezera dotyczącego przecięcia się strefy emisji punktu z hiperpłaszczyzną t = constans. Twierdzenie (8,2) jest dalszym uogólnieniem tego twierdzenia.

Z ograniczoności zbioru $E(P)$ wynika, że istnieje liczba $\bar{t}$ taka, że $E(P) \subset W\{t \leq \bar{t}\}$. Oznaczmy przez α zbiór liczb τ o tej własności, że dla każdego $t \geq \tau$ istnieją zbiory b_t, c_t takie, że $b_t \cdot c_t = 0$, $b_t = \bar{b}_t$, $c_t = \bar{c}_t$, a ponadto $e(P,t) = b_t + c_t$ oraz $e(b_t) = b$ i $e(c_t) = c$.

Zbiór α ma następujące własności:

(i) $\quad t_p \notin \alpha, \quad \bar{t} \in \alpha,$

(ii) $\quad$ jeżeli $t_1 \in \alpha$ i $t_2 > t_1$, to $t_2 \in \alpha$,

(iii) $\quad$ jeżeli $t_1 \in \alpha$, to istnieje liczba $t_3 < t_1$ taka, że $t_3 \in \alpha$.

Udowodnimy te własności. Ponieważ $e(P,t_p) = P$, to $t_p \notin \alpha$. Aby wykazać, że $\bar{t} \in \alpha$ wystarczy ze względu na (8,1) udowodnić, że dla $t^* \geq \bar{t}$ jest $e(P,t^*) = e(P)$, $e(b) = b$ i $e(c) = c$. Ponieważ $E(P) \subset W\{t \leq \bar{t}\} \subset W\{t \leq t^*\}$, to pierwszy z tych związków wynika z własności (v_2). Pozostaje wykazać pozostałe dwa związki. Na mocy własności (v_3) jest $e(e(P)) = e(P)$, wobec tego z (8,1) i z definicji (7,1) otrzymujemy $e(b + c) = b + c \subset T$, a stąd i z (6,2).

(8,2) $\qquad b \subset e(b) \subset b + c.$

Jest także $e(b) \cdot c = 0$. W przeciwnym razie z pewnego punktu Q należącego do zbioru b wychodziłby element I rodziny F do zbioru c, a ponieważ $b \subset T$, to $e(Q) = E(Q)$, a zatem $I \subset e(Q) \subset e(P)$, co ze względu na (8,1) nie jest możliwe. Wobec tego $e(b) \cdot c = 0$, a zatem z (8,2) otrzymujemy, że $e(b) = b$. W podobny sposób wykazuje się, że $e(c) = c$. Udowodniliśmy własność (i).

Własność (ii) wynika wprost z określenia zbioru α.

W dowodzie (iii) można ograniczyć się do $t_1 \leq \bar{t}$. Połóżmy

(8,3) $\qquad d(b_{t_1}, c_{t_1}) = 3\eta$

Jest $\eta > 0$. Ponieważ zbiór $E(P)$ jest zwarty, to na mocy twierdzenia (2,1) krzywe rodziny F zawarte w zbiorze $E(P)$ stanowią zbiór krzywych jednakowo ciągłych, a zatem istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdej krzywej rodziny F o równaniu $x = \varphi(t)$ zawartej w $E(P)$ i określonej w przedziale $\langle t_2, t_3\rangle$ jest

$$(8,4) \qquad |\varphi(t_2) - \varphi(t_3)| < \eta, \quad \text{jeżeli} \quad t_1 - \delta \leq t_2 < t_3 \leq t_1.$$

Oznaczmy $\delta_0 = \min(\delta, \eta)$ i niech t^* będzie dowolną liczbą należącą do przedziału $\langle t_1 - \delta_0, t_1\rangle$. Z własności (v_4) otrzymujemy

$$(8,5) \qquad e(e(P,t^*),t_1) = e(P,t_1),$$

jeżeli więc punkt $Q \in e(P,t^*)$, to istnieje element rodziny F wychodzący z punktu Q i mający koniec w zbiorze $e(P,t_1)$. Jeżeli $t_Q < t^*$, to z definicji (7,1) i ze wzoru (6,7) wynika, że punkt Q należy także do zbioru $e(P,t_1)$ i element o którym mowa redukuje się do punktu. Jeżeli $t_Q \geq t^*$, to $t_1 - \delta_0 \leq t_Q \leq t_1$ i z (8,4) wynika, że

$$(8,6) \qquad d(Q, e(P,t_1)) < \eta.$$

Oznaczmy przez b_{t^*}, c_{t^*} podzbiory zbioru $e(P,t^*)$ określone przez następujące związki

$$(8,7) \qquad d(b_{t^*}, b_{t_1}) < \eta, \quad d(c_{t^*}, c_{t_1}) < \eta.$$

Ze względu na zwartość zbioru $e(P,t^*)$ z (8,7), (8,6) i z (8,3) otrzymujemy

$$(8,8) \qquad b_{t^*} + c_{t^*} = e(P,t^*),\ b_{t^*} \cdot c_{t^*} = 0,\ b_{t^*} = \bar{b}_{t^*},\ c_{t^*} = \bar{c}_{t^*}$$

oraz $e(b_{t^*}, t_1) \subset b_{t_1}$ i $e(c_{t^*}, t_1) \subset c_{t_1}$, a ponieważ z (8,5 i (8,8) wynika, że $e(b_{t^*}, t_1) + e(c_{t^*}, t_1) = b_{t_1} + c_{t_1}$, to

(8,9) $$e(b_{t^*}, t_1) = b_{t_1} \quad \text{i} \quad e(c_{t^*}, t_1) = c_{t_1}.$$

Z własności (v_2), (v_4), z (8,9) i ze względu na to, że $t_1 \in \alpha$ a $e(b_{t_1}) = b$ otrzymujemy

(8,10) $$e(b_{t^*}) = e(b_{t^*}, \bar{t}) = e(e(b_{t^*}, t_1), \bar{t}) = e(b_{t_1}, \bar{t}) = e(b_{t_1}) = b.$$

W podobny sposób otrzymamy, że

(8,10') $$e(c_{t^*}) = c.$$

Ze względu na wybór t^* związki (8,8), (8,10) i (8,10') są prawdziwe dla $t_1 - \delta_0 \leq t^* \leq t_1$, a ponieważ liczba t_1 należy do zbioru α, to związki te pozostają prawdziwe i dla $t > t_1$.

Udowodnione własności zbiorów b_{t^*} i c_{t^*} dowodzą, że liczba t^* należy do zbioru α. W ten sposób własność (iii) została udowodniona.

Z własności (i) - (iii) wynika, że zbiór α posiada kres dolny, który nie należy do α. Położmy $\inf \alpha = t_0$. Istnieje punkt Q należący do $e(P, t_0)$ taki, że

(8,11) $$e(Q).b \neq 0 \quad \text{i} \quad e(Q).c \neq 0,$$

bo w przeciwnym razie dla każdego punktu Q należącego do $e(P, t_0)$ byłoby $e(Q) \subset b$ lub $e(Q) \subset c$, więc zbiór $e(P, t_0)$ byłby sumą rozłącznych zbiorów b_0, c_0 takich, że $e(b_0) \subset b$ i $e(c_0) \subset c$, a ponieważ z własności (v_1), (v_2), (v_4) wynika, że $e(b_0) + e(c_0) = e(b_0 + c_0) = e(e(P, t_0)) = e(e(P, t_0), \bar{t}) = e(P, \bar{t}) = e(P) = b + c$, to $e(b_0) = b$ i $e(c_0) = c$.

Ponadto z własności 3^0 rodziny F i ze zwartości zbiorów $E(P)$, $e(b_0)$, $e(c_0)$ łatwo wynika, że i zbiory b_0 i c_0 byłyby zwarte. Z określenia liczby t_0 i z udowodnionych własności zbiorów b_0 i c_0 wynikałoby więc wbrew założeniu, że liczba t_0 należy do zbioru α. Zatem punkt Q o podanych wyżej własnościach istnieje. Punkt Q nie może należeć do zbioru T, bo w przeciwnym razie zbiór $e(Q)$ byłby zbiorem spójnym, zawartym w zbiorze T, wobec czego z uwagi na (8,11) zawierałby punkty nie należące do $(b + c)$. Ponieważ jednak $Q \in E(P)$, to $e(Q) \subset e(P)$, a zatem zbiór $e(P)$ zawierałby także punkty nie należące do zbioru $(b + c)$ wbrew założeniu, że $e(P) = b + c$. Udowodniliśmy, że $Q \notin T$, a ponieważ $Q \in e(P,t_0)$, to z definicji (7,1) i ze wzoru (6,7) wynika, że $Q \in W\{t = t_0\}$ czyli $t_Q = t_0$. Ponieważ $e(P,t_0) \subset U + T$ i $Q \notin T$, to $Q \in U$ i na mocy własności 4^+ rodziny typu G istnieje liczba t_2 taka, że $t_0 < t_2 \leq \bar{t}$, a zbiór $e(Q,t_2)$ jest continuum. Lecz liczba t_2 należy do zbioru α, wobec tego istnieją zbiory b_2 i c_2 rozgraniczone takie, że $e(P,t_2) = b_2 + c_2$, a ponadto $e(b_2) = b$ i $e(c_2) = c$. Ponieważ $Q \in E(P)$, to $e(Q,t_2) \subset e(P,t_2)$, a zatem zbiór $e(Q,t_2)$ jako continuum byłby zawarty w jednym ze zbiorów b_2 lub c_2. Jeżeli $e(Q,t_2) \subset b_2$, to z własności (v_2), (v_4) otrzymujemy $e(Q) = e(Q,\bar{t}) = e(e(Q,t_2),\bar{t}) \subset e(b_2,\bar{t}) = e(b_2) = b$ co przeczy związkowi $e(Q).c \neq 0$. W podobny sposób założenie $e(Q,t_2) \subset c_2$ prowadzi do sprzeczności ze związkiem $e(Q).b \neq 0$. Wynika stąd, że punkt Q nie może należeć do zbioru U. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia (8,2)*).

T w i e r d z e n i e (8,3). Jeżeli zbiór spójny a jest zawarty w zbiorze $U + T$ i ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to ślad emisji zbioru a jest zbiorem spójnym.

---

*) Mogłoby się wydawać, że z punktu, którego ślad emisji jest continuum nie mogą wychodzić krzywe asymptotyczne. Można podać proste przykłady rodzin typu G, które wykazują, że tak jednak nie jest. Jeżeli jednak zbiór W ma tę własność, że dla dowolnych τ_1, τ_2 zbiór $W\{\tau_1 \leq t \leq \tau_2\}$ jest ograniczony i ślad emisji punktu należącego do zbioru W jest continuum, to z punktu tego nie wychodzą krzywe asymptotyczne.

D o w ó d. Przypuśćmy, że $e(a) = b + c$, $b.\bar{c} = 0$, $\bar{b}.c = 0$. Jeżeli punkt $P \in a$, to na mocy twierdzenia (8,2) zbiór $e(P)$ jest continuum, a zatem $e(P) \subset b$ lub $e(P) \subset c$. Oznaczmy przez β i γ podzbiory zbioru a takie, że $P \in \beta$ jeżeli $e(P) \subset b$, i $P \in \gamma$ jeżeli $e(P) \subset c$. Jest $\beta + \gamma = a$ i $\beta \cdot \gamma = 0$. Lecz z założenia zbiór a jest spójny więc $\bar{\beta} \cdot \gamma \neq 0$ lub $\beta \cdot \bar{\gamma} \neq 0$. Przyjmijmy pierwszą alternatywę i niech punkt $Q_0 \in \bar{\beta} \cdot \gamma$. Ponieważ $Q_0 \in \bar{\beta}$, to istnieje ciąg punktów Q_k, $k=1,2,\ldots$ należących do zbioru β taki, że $\lim_{k\to\infty} Q_k = Q_0$ i ciąg elementów $I_1, I_2, \ldots$ taki, że element I_k wychodzi z punktu Q_k i ma koniec w zbiorze b. Oznaczmy $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k = Z$. Zbiór Z jest podzbiorem zwartym zbioru W i na mocy twierdzenia (4,1) strefa emisji zbioru Z jest zbiorem zwartym, a ponieważ krzywe I_k, $k = 1,2,\ldots$ są zawarte w $E(Z)$, to z własności 3^0 rodziny F wynika od razu, że istnieje element rodziny F wychodzący z punktu Q_0 i mający koniec w pewnym punkcie P_0 należącym do zbioru $\bar{b}$. Punkt P_0 należy do zbioru R, a ponieważ $Q_0 \in U + T$, to z założenia Z_2F wynika, że $P_0 \in T$. Znaczy to, $e(Q_0).\bar{b} \neq 0$. Z drugiej strony $Q_0 \in \gamma$ i $e(Q_0) \subset c$, co przeczy założeniu, że $\bar{b}.c = 0$. W podobny sposób, przyjmując drugą alternatywę doszlibyśmy do sprzeczności z założeniem $b.\bar{c} = 0$. Otrzymane w ten sposób sprzeczności stanowią dowód twierdzenia (8,3).

U w a g a (8,1). Można podać trywialne nawet przykłady świadczące o tym, że ślad emisji punktu P należącego do zbioru W może nie być continuum, chociaż z punktu P nie wychodzą krzywe asymptotyczne. Jeżeli jednak istnieje liczba $\tau > t_p$ taka, że zbiór $e(P,\tau)$ jest continuum i zawiera się w zbiorze $U + T$, to i $e(P)$ jest continuum. Istotnie, ponieważ z punktu P nie wychodzą krzywe asymptotyczne, to zbiór E(P) jest zwarty i na mocy (v_2) istnieje liczba $\bar{t}$ taka, że $e(P) = e(P),\bar{t})$ i wobec tego z (v_4) otrzymujemy $e(P) = e(e(P,\tau),\bar{t}) = e(e(P,\tau))$. Stąd i z twierdzeń (8,1), (8,3) wynika, że $e(P)$ jest continuum.

Uwaga ta uogólnia twierdzenie (8,2) i może służyć do uogólnienia twierdzenia (8,3).

9. Zajmiemy się teraz twierdzeniami dotyczącymi własności asymptotycznych i brzegowych rodziny F typu G. Ponieważ rodzina taka jest także rodziną typu $\mathcal{F}$, to twierdzenia uzyskane dotychczas pozostają w mocy. Podstawą dla uzyskania dalszych twierdzeń są twierdzenia ptu 8, a zwłaszcza twierdzenie (8,3).

L e m a t. Załóżmy, że zbiór σ i rodzina F typu G spełniają warunek:

$$(9,1) \qquad e(U + \sigma) = \sigma$$

Jeżeli zbiór b jest zawarty w zbiorze W, a zbiór a spójny i zawarty w zbiorze $U + \sigma$ ma punkty wspólne z dwiema różnymi składowymi zbioru $\sigma - b$*), to jedno z dwojga:
(u_1) ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F, albo
(u_2) istnieje element rodziny F o początku w zbiorze a i końcu w zbiorze b.

D o w ó d. Zgodnie z założeniami lematu istnieją dwie różne składowe T_1 i T_2 zbioru $\sigma - b$ i punkty P_1 i P_2 takie, że

$$(9,2) \qquad P_1 \in T_1 \cdot a, \quad P_2 \in T_2 \cdot a.$$

Lecz z (9,1) i z definicji (7,1) wynika, że $\sigma \subset T$, a zatem punkty P_1 i P_2 należą do zbioru T i na mocy tejże definicji $P_1 \in e(P_1)$ i $P_2 \in e(P_2)$. Stąd i z (9,2) wynika, że zbiór e(a) ma punkty wspólne ze zbiorami T_1 i T_2. Gdyby nie zachodziła alternatywa (u_2), to strefa emisji zbioru a byłaby rozłączona ze zbiorem b, a że $e(a) \subset E(a)$, to

$$(9,3) \qquad e(a).b = 0.$$

*) Tym samym przyjmujemy, że zbiór $\sigma - b$ nie jest spójny. Ta sama uwaga odnosi się do zbiorów $T - b$, $S - b$, $S_* - b$, o których mowa w twierdzeniach (9,1) - (9,3)

Lecz z założenia, że $a \subset U + \sigma$ i z (9,1) otrzymujemy, że $e(a) \subset \sigma$, a stąd i z (9,3) $e(a) \subset \sigma - b$. Ponieważ jednak już wykazaliśmy, że zbiór $e(a)$ ma punkty wspólne z dwiema różnymi składowymi zbioru $\sigma - b$, to stąd wynikałoby, że zbiór $e(a)$ nie jest spójny. Z drugiej strony, ponieważ $\sigma \subset T$, to $a \subset U + T$, wobec tego, gdyby nie zachodziła także alternatywa (u_1), to na mocy twierdzenia (8,3) zbiór $e(a)$ byłby spójny. Otrzymana sprzeczność stanowi dowód lematu.

U w a g a. (9,1). Udowodniony lemat można uogólnić. Istotnie, z przeprowadzonego dowodu jest widoczne, że zamiast spójności zbioru a wystarczyło przyjąć, że istnieje liczba $\bar{t}$ taka, że $a \subset W\{t \leq \bar{t}\}$, a zbiór $e(a,\bar{t})$ jest spójny. W tym przypadku trzeba wziąć tylko pod uwagę, że $e(a) = e(e(a,\bar{t}))$. W przykładzie (13,1) zajmujemy się takim przypadkiem. Uwaga (9,1) zastosowana do zagadnienia, któremu jest poświęcona praca [8], gdzie zbiorem "a" jest zbiór typu Antoine'a pozwala od razu uzyskać rozwiązanie tego zagadnienia.

Z udowodnionego lematu wynikają trzy twierdzenia, które formułujemy niżej. Teza każdego z nich pokrywa się z tezą lematu i używamy dla niej skrótu "(u_1) lub (u_2)".

T w i e r d z e n i e (9,1). Przyjmijmy założenie Z_2F. Jeżeli zbiór b jest zawarty w zbiorze W, a zbiór spójny a zawarty w zbiorze $U + T$ ma punkty wspólne z dwiema różnymi składowymi zbioru $T - b$, to (u_1) lub (u_2).

D o w ó d. Ze wzoru (6,3) i definicji (7,1) wynika, że $e(U + T) = T$ i twierdzenie (9,1) wynika z lematu przez podstawienie T na miejsce σ.

Następne dwa twierdzenia odnoszą się do przypadku, gdy rodzina F jest typu G_*.

T w i e r d z e n i e (9,2). Przyjmijmy założenie Z_3F. Jeżeli zbiór b jest zawarty w zbiorze W, a zbiór spójny a zawarty w zbiorze $U + S$ ma punkty wspólne z dwiema różnymi składowymi zbioru $S - b$, to (u_1) lub (u_2).

T w i e r d z e n i e (9,3). Przyjmijmy założenie Z_3F. Jeżeli zbiór b jest zawarty w zbiorze W, a zbiór spójny a

zawarty w zbiorze $U + S_*$ ma punkty wspólne z dwiema różnymi składowymi zbioru $S_* - b$, to (u_1) lub (u_2).

Twierdzenia (9,2) i (9,3) wynikają z lematu w podobny sposób jak twierdzenie (9,1), jeżeli skorzystamy ze wzoru (6,6) zamiast (6,3).

Ponieważ rodzina typu G_* jest rodziną typu G, to do rodzin typu G_* można stosować wszystkie trzy twierdzenia. Z uwagi na to, że zbiory S_*, S, T nie muszą się pokrywać, żadne z tych twierdzeń nie wynika z pozostałych i nie może być pominięte bez szkody dla teorii.

Każde z twierdzeń (9,1) - (9,3) może być uogólnione przez wykorzystanie uwagi (9,1). Z uwagi (8,1) wynika, że twierdzenia te podlegają dalszemu uogólnieniu, tym jednak zajmować się teraz nie będziemy.

10. D e f i n i c j a (10,1). Mówimy, że rodzina F jest rodziną typu G_*^- określoną w zbiorze W, jeżeli rodzina F jest rodziną typu $\mathcal{F}$ określoną w zbiorze W, a ponadto jest spełniony następujący warunek.

4^- Jeżeli punkt $P \in U$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że przecięcie się strefy emisji lewej punktu P z hiperpłaszczyzną $t = \tau$ jest dla $t_P - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant t_P$ continuum.

Z a ł o ż e n i e Z_2^-. Jeżeli krzywa rodziny F ma koniec w zbiorze U, a początek w zbiorze R, to początek ten należy do zbioru T^-.

Z a ł o ż e n i e Z_3^-. Jeżeli krzywa rodziny F ma koniec w zbiorze U, a początek w zbiorze R, to początek ten należy do zbioru S^-.

Rodzinę typu G_0^- spełniającą założenie Z_2^- / Z_3^- / będziemy zaliczali do typu G^- / G_*^- /, a symbolem Z_2^-F / Z_3^-F / będziemy oznaczali założenie, że F jest rodziną typu G^- / G_*^-/ określoną w zbiorze W.

U w a g a (10,1). Jeżeli zmienimy kierunek osi t, to zbiory T^-, S^-, S_*^-, $E^-(a)$ przechodzą odpowiednio w zbiory T, S, S_*, E(a) i na odwrót, a rodzina typu G^- (G_*^-) w rodzinę typu G (G_*) i krzywe asymptotyczne w lewo w krzywe asymptotyczne w prawo. Wynika stąd, że dla rodzin typu G^- i G_*^- można

sformułować twierdzenia analogiczne do twierdzeń (9,1) - (9,3) i można je otrzymać z tych ostatnich przez zastąpienie symboli T, T^-, S,... przez T^-, T, S^-,..... zastępując równocześnie założenia Z_2F, Z_3F odpowiednio przez założenia Z_2^-F, Z_3^-F i tezę (u_1) przez (u_1^-): istnieje krzywa rodziny F asymptotyczna w lewo o końcu w zbiorze a.

Teorię, którą przedstawiliśmy, zilustrujemy teraz przykładami, w których za przestrzeń D_o przyjęto przestrzeń euklidesową E^2 punktów $x = (x_1, x_2)$.

P r z y k ł a d (10,1).

$W = (t, x_1, x_2)\{|x_1| \leqslant 1, |x_2| \leqslant 1, 0 \leqslant t < +\infty\}$.

Połóżmy $\sigma = (t, x_1, x_2)\{|x_1| = 1, |x_2| < 1, 0 \leqslant t < +\infty\}$ i oznaczmy dla $|x_2| < 1$ przez $a(x_2)$ odcinek o końcach $(-1, x_2, 0)$, $(1, x_2, 0)$.

W każdym z przypadków:

(j) gdy spełnione jest założenie Z_2F, a $\sigma \subset T \subset \bar{\sigma}$,

(jj) gdy spełnione jest założenie Z_3F, a $\sigma \subset S \subset \bar{\sigma}$,

(jjj) gdy spełnione jest założenie Z_3F, a $\sigma \subset S_* \subset \bar{\sigma}$,

stosując odpowiednio twierdzenia (9,1), (9,2), (9,3) wnioskujemy, że z odcinka $a(x_2)$ wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

Oznaczmy dla $|x_1| < 1$ przez $b(x_1)$ odcinek o końcach $(x_1, -1, \tau)$, $(x_1, 1, \tau)$, gdzie τ oznacza dowolną liczbę dodatnią i rozważmy zbiór $W\{t \leqslant \tau\}$. Odcinek $b(x_1)$ dzieli zbiory $T(\tau)$, $S(\tau)$, $S_*(\tau)$ odpowiednio w przypadkach (j), (jj), (jjj) na dwie części i końce odcinka $a(x_2)$ należą po jednym do każdej z tych części. Ponieważ rodzina F zredukowana do zbioru $W\{t \leqslant \tau\}$ nie zawiera krzywych asymptotycznych, to z twierdzeń (9,1) - (9,3) otrzymujemy, że w każdym z przypadków (j) - (jjj) z odcinka $a(x_2)$ wychodzi element rodziny F do zbioru $b(x_1)$.

P r z y k ł a d (10,2).

$W = (t, x_1, x_2)\{x_1 \geqslant 0, |x_2| \leqslant x_1, -\infty < t < +\infty\}$. Przyjmijmy założenie Z_3F i załóżmy, że punkty prostej l o równaniu $x_1 = x_2 = 0$ nie należą do S, natomiast Front $W - l \subset S$. Zbiór S jest więc sumą dwóch półpłaszczyzn S_1 i S_2, które są rozgrani-

czone prostą l. Jeżeli punkt $A_1 \in S_1$, a punkt $A_2 \in S_2$, to z odcinka A_1A_2 wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F. Wynika to od razu z twierdzenia (9,2), /a = A_1A_2, b = 0/.

Jeżeli założymy dodatkowo, że w zbiorze $W\{t \leqslant \tau\}$ rodzina F nie ma krzywych asymptotycznych w prawo, a punkty A_1, A_2 należą do tego zbioru i jeżeli b oznacza dowolną półprostą zawartą w zbiorze $W\{t = \tau\}$ i przechodzącą przez punkt $(0,0,\tau)$, to z odcinka A_1A_2 wychodzi element rodziny F mający koniec na półprostej b.

I ta teza wynika z twierdzenia (9,2), jeżeli zastosujemy je do rodziny F zredukowanej do zbioru $W\{t \leqslant \tau\}$. Zbiór $S(\tau)$ jest rozgraniczony częścią prostej $x_1 = x_2 = 0$ i półprostą b.

Wszystkie założenia tego przykładu będą spełnione w szczególności w tym przypadku, gdy rodzina F jest rodziną całek układu równań różniczkowych bliskich liniowych, a pierwiastki charakterystyczne mają różne znaki.

P r z y k ł a d (10,3). $W = (t,x_1,x_2)\{x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ t \geqslant 0\}$. Oznaczmy przez a krzywą Jordana zawartą w zbiorze $W\{t = 0\}$ i zawierającą w swoim wnętrzu punkt (0,0,0), a przez K(t) krzywą o równaniu $x_1 = \sin\lambda(t)$, $x_2 = \cos\lambda(t)$, $t \geqslant 0$, gdzie $\lambda(t)$ jest dowolną funkcją ciągłą i określoną dla $t \geqslant 0$. Przyjmijmy wreszcie założenie Z_2^-F, a o półprostej $x_1 = x_2 = 0$, $t \geqslant 0$ załóżmy, że jest krzywą rodziny F.

Twierdzimy, że jeżeli punkty krzywej K(t) nie należą do zbioru T, to z krzywej a wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

D o w ó d. Ponieważ krzywa a jest zbiorem zwartym, to z uwagi na twierdzenie (5,2) wystarczy wykazać, że zbiór E(a) jest nieograniczony. W tym celu rozwiążemy pewne zagadnienie brzegowe, wykażemy mianowicie, że ze zbioru a wychodzi element rodziny F do każdego ze zbiorów $b(\tau)$, gdzie przez $b(\tau)$ oznaczyliśmy odcinek łączący punkt $(0,0,\tau)$ z punktem $K(\tau) = (\tau, \sin\lambda(\tau), \cos\lambda(\tau))$. Ponieważ punkt $K(\tau) \in R$, lecz $K(\tau) \notin T$, to ze wzoru (6,4) wynika*), że $K(\tau) \in T^-$, a za-

*) Z uwagi (10,1) wynika, że wzór (6,4) jest słuszny i przy założeniu Z_2^-F.

tem punkt $K(\tau)$ należy także do śladu emisji lewej punktu $K(\tau)$. Z drugiej strony, ponieważ punkt $(0,0,0)$ jest początkiem krzywej rodziny F o równaniu $x_1 = x_2 = 0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, której końcem jest punkt $(0,0,\tau)$, to punkt $(0,0,0)$ należy do śladu emisji lewej punktu $(0,0,\tau)$. Wynika stąd, że punkty $K(\tau)$ i $(0,0,\tau)$ należą do śladu emisji lewej odcinka $b(\tau)$, a ponadto punkty te należą do dwóch różnych składowych zbioru T^- rozgraniczonych krzywą a. Ponieważ jednak zbiór $b(\tau)$ jest spójny i nie ma krzywych asymptotycznych w lewo, któreby miały koniec w zbiorze $b(\tau)$, to z twierdzenia (9,1) i uwagi (10,1) wynika, że istnieje krzywa rodziny F o początku w zbiorze a i końcu w zbiorze $b(\tau)$. Ze względu na dowolność liczby τ oznacza to, że $E(a)$ jest zbiorem nieograniczonym q.e.d.

W przykładzie tym można było, podobnie jak w przykładzie (10,1) zamiast założeń Z_2^-F i $K(t) \notin T$ przyjąć założenia Z_3^-F i $K(t) \notin S_*$. Istotnie, ze wzoru (6,6) wynika, że i w tym przypadku $K(t) \notin T^-$, a poza tym dowód pozostanie bez zmiany*).

11. Definicja (11,1). Rodzinę krzywych nazywamy jednoznaczną w prawo (w lewo) w zbiorze W, jeżeli każdy punkt zbioru W jest początkiem (końcem) jedynego elementu tej rodziny wysyconego w prawo (w lewo) w zbiorze W.

W tym punkcie przyjmujemy założenie, że w zbiorze W jest określona rodzina F typu G_δ jednoznaczna w prawo.

D e f i n i c j a (11,2). Zbiór punktów należących do zbioru $U + S$, o tej własności, że ślad emisji każdego z nich jest punktem nazywamy lewym cieniem zbioru S (por. [7]) i oznaczamy przez M.

Jeżeli $a \subset U + S$ i ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to $a \subset M$. Przyjmijmy za innymi (p. [7]) na oznaczenie śladu emisji punktu P, w przypadku gdy $e(P)$ jest punktem, symbol conseq P. Przekształcenie $P \to$ conseq P jest określone w zbiorze M i przyporządkowuje każdemu punktowi tego zbioru punkt zbioru S.

*) Przykład (10,1) został zaczerpnięty z [7], przykłady następne są modyfikacjami przykładów podanych w [4], gdzie były rozpatrywane w związku z rodziną całek układu równań różniczkowych spełniających warunek jednoznaczności.

T w i e r d z e n i e (11,1). Jeżeli w zbiorze W /spełniającym założenie Z_1 / jest określona rodzina F typu G_δ jednoznaczna w prawo, to funkcja conseq P jest ciągła w zbiorze M.

D o w ó d. Załóżmy, że punkty $P, P_1, P_2, \ldots$ należą do zbioru M i $\lim_{i\to\infty} P_i = P$. Połóżmy $e(P_i) = Q_i$, $i = 1,2,\ldots$. Z własności 3^o rodziny F wynika, że istnieje podciąg ciągu $Q_1, Q_2, \ldots$ zbieżny do pewnego punktu Q należącego do zbioru R i element rodziny F o początku P i końcu Q. Ponieważ punkt $P \in M$, a $M \subset U + S$, to z założenia $Z_3 F$ wynika, że $Q \in S$. Wobec tego $Q = e(P)$, a z uwagi na to, że rodzina F jest jednoznaczna w prawo $\lim_{i\to\infty} e(P_i) = e(P)$, q.e.d.

Twierdzenie to jest podstawą teorii zajmujących się badaniem własności asymptotycznych i opartych na pojęciu retraktu [7], [1], [6], [2], [4].

Z twierdzenia (11,1) wynika jeszcze inne twierdzenie różniące się swym charakterem zarówno od twierdzeń teorii opartych na pojęciu retraktu, jak również od innych twierdzeń pracy niniejszej. Twierdzenie to jest bardzo proste, a w zastosowaniach może zastąpić twierdzenia podane w [7]. Aby je sformułować, przyjmiemy następującą definicję.

D e f i n i c j a (11,3). Mówimy, że zbiór Z daje się ściągnąć do punktu P w zbiorze B, jeżeli istnieje homotopia $H(y,s)$, gdzie $y = (t,x)$, taka że dla $y \in Z$ jest $H(y,0) = y$, $H(y,1) = P$, a ponadto $H(y,s) \in B$ dla $0 \leqslant s \leqslant 1$.

T w i e r d z e n i e (11,2). Załóżmy, że rodzina F jest rodziną typu G_δ określoną w zbiorze W i jest jednoznaczna w prawo, a zbiór $a \subset U + S$ i zbiór $b \subset S$. Jeżeli istnieje podzbiór Z zbioru $S - b$, który daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $a + S - b$, ale nie daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $S - b$, to (u_1) lub (u_2).

D o w ó d. Wystarczy wykazać, że jeżeli non (u_1) i non (u_2), to każdy podzbiór zbioru $S - b$, który daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $a + S - b$, daje się także ściągnąć do punktu w zbiorze $S - b$. Załóżmy więc, że $Z \subset S - b$ i istnieje punkt P i homotopia $H_1(y,s)$ taka, że dla $y \in Z$ jest

$H_1(y,o) = y$, $H_1(y,1) = P$ oraz $H_1(y,s) \in a + S - b$ i położymy $H_2(y,s) = \text{conseq}\, H_1(y,s)$. Ponieważ ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne i $a \subset U + S$, to $a \subset M$ i $a + S - b \subset M$, a zatem z twierdzenia (11,1) wynika, że dla $y \in Z$ i dla $0 \leqslant s \leqslant 1$ funkcja $H_2(y,s)$ jest ciągła. Ponadto, ponieważ ze zbioru a nie wychodzą elementy rodziny F do zbioru b, to conseq $y \in S - b$ dla $y \in a + S - b$, a zatem $H_2(y,s) \in S - b$ dla $y \in Z$ i $0 \leqslant s \leqslant 1$. Znaczy to, że zbiór Z daje się ściągnąć do punktu conseq P w zbiorze $S - b$ q.e.d.

Twierdzenie (11,2) pozostanie prawdziwe, jeżeli na miejsce S położymy S_*.

Twierdzenie to można bez trudu stosować do przykładu (10,1) w przypadkach (jj) i (jjj) i do przykładu (10,2), o ile rodzina F spełnia założenia twierdzenia (11,2). Pokażemy, jak twierdzenie to można zastosować do przykładu (5,1). Załóżmy, że w tym przykładzie $S = \text{Front}\, W$ i położymy $a(\tau) = W\{t = \tau\}$, $Z(\tau) = a(\tau).\text{Front}\, W$. Przy dowolnym τ zbiór $Z(\tau)$ daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $S + a(\tau)$, lecz nie daje się ściągnąć do punktu w zbiorze S, a zatem na mocy twierdzenia (11,2) z każdego ze zbiorów $a(\tau)$ wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F.

12. Scharakteryzujemy teraz pokrótce ogólną zasadę rozumowania, którą posługiwaliśmy się dotychczas i nadal będziemy się posługiwali. Podstawą teorii są twierdzenia postaci: "jeżeli non α i β, to γ", gdzie α oznacza zdanie: "ze zbioru a wychodzi krzywa asymptotyczna", a β pewne warunki dotyczące rodziny krzywych i zbioru W. W pracach cytowanych wyżej spośród twierdzeń tego typu wykorzystano jedynie twierdzenie (11,1), dla przypadku, gdy rodzina F jest jednoznaczna. Oprócz tego twierdzenia podaliśmy, jak dotąd, twierdzenia (4,1) i (8,1) - (8,3). Wykorzystanie tych twierdzeń, każdego z osobna, pozwoliło uzyskać twierdzenia dotyczące własności asymptotycznych i brzegowych dla dość ogólnych rodzin krzywych. Jeżeli jednak ograniczymy się nawet do rodzin całek układu równań różniczkowych spełniających warunek jednoznaczności, to znajdziemy między nimi twierdzenia, których nie można otrzymać z twierdzenia (11,1). Nale-

żą do nich twierdzenia podane w pkt.5. Było oczywistym niedostatkiem teorii retraktowych, że nie obejmowały one tak oczywistego twierdzenia, jak np. twierdzenie (5,5) bez dodatkowego założenia o braku poślizgów wewnętrznych. Z twierdzenia (11,1) nie można otrzymać również twierdzenia (9,1) nawet w zastosowaniu do wypadku, gdy rodzina F jest rodziną całek układu równań różniczkowych spełniającego warunek jednoznaczności.

Tymi uwagami ograniczamy się do omawiania związku między wynikami uzyskanymi przez nas dotychczas a teoriami retraktowymi.

Wyjaśnimy, co zamierzamy dalej. Nie można się spodziewać, że twierdzeniami (4,1) i (8,1) - (8,3) wykorzystaliśmy już wszystkie własności przekształcenia $\alpha \to E(\alpha)$, które mogą być przydatne do formułowania twierdzeń dotyczących własności asymptotycznych i brzegowych. W dalszym ciągu zdefiniujemy pewne funkcje określone przez przekształcenie $\alpha \to E(\alpha)$ które dla rodzin typu G_* i G pozwolą sformułować twierdzenia, obejmujące pewne przypadki, w których twierdzenia dotychczasowe nie dały się bezpośrednio stosować.

13. D e f i n i c j a (13,1). Przyjmijmy założenie Z_1, a o zbiorach R' i A załóżmy, że $R' \subset R$ i $A \subset U + R'$. Mówimy, że funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ jest funkcją wymiatania typu G_*, jeżeli są spełnione następujące warunki:

1* Funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ jest określona dla wartości argumentu α będących podzbiorami zbioru A i dla dowolnych wartości parametru s, a jej wartości są podzbiorami zbioru A,

2* $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ dla $s \leqslant t_1$, a jeżeli punkt (t_1,x_1) należy do zbioru R', to $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ dla każdego s,

3* jeżeli $(t_1,x_1) \notin R'$ i $s > t_1$, to $\Gamma((t_1,x_1),s) \subset$
$\subset W\{t = s\} + R'\{t_1 < t < s\}$,

4* $\Gamma(\alpha,s) = \sum_{(t,x)\in\alpha} \Gamma((t,x),s)$

5* jeżeli zbiór α jest zwarty, to i zbiór $\Gamma(\alpha,s)$ jest zwarty, a ponadto istnieje liczba s_* taka, że $\Gamma(\alpha,s_*) \subset R'$ i dla $s \geqslant s_*$ jest $\Gamma(\alpha,s) = \Gamma(\alpha,s_*)$,

6* jeżeli zbiór α jest spójny, to i zbiór $\Gamma(\alpha,s)$ jest spójny

7* $\Gamma(\Gamma(\alpha,s_1),s_2) = \Gamma(\alpha,s_2)$ dla $s_1 \leqslant s_2$,

8^* funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ jest jednostajnie ciągła ze względu na s w zbiorze podzbiorów zwartych zbioru A, to znaczy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego zbioru zwartego $\alpha \subset A$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|s_1 - s_2| < \delta$, to $\Gamma(\alpha,s_1) \subset K(\Gamma(\alpha,s_2),\varepsilon)$,

9^* funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ jest górnie półciągła w sensie inkluzji ze względu na α w zbiorze wszystkich podzbiorów zwartych zbioru A, to znaczy, że jeżeli $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ jest ciągiem zstępującym zbiorów zwartych zawartych w zbiorze A i niepustych i $\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha$, to dla każdego s jest $\prod_{i=1}^{\infty} \Gamma(\alpha_i,s) \subset \Gamma(\alpha,s)$.

Funkcję $\Gamma(\alpha,s)$ spełniającą warunki 1^* oraz $3^* - 9^*$, a zamiast 2^* warunek następujący:

2^{**} $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ dla $s \leq t_1$, a jeżeli $(t_1,x_1) \in R'$, to $(t_1,x_1) \in \Gamma((t_1,x_1),s) \subset R'$,

nazywamy funkcją wymiatania typu G.

O funkcjach typu G_* czy typu G mówimy, że wymiatają zbiór A w sobie na R'.

Z własności $5^* - 7^*$ wynikają dalsze własności następujące.

5^{**} jeżeli zbiór $\Gamma(\alpha,s_1)$ jest zwarty, to dla $s \geq s_1$ zbiór $\Gamma(\alpha,s)$ jest także zwarty,

6^{**} jeżeli zbiór $\Gamma(\alpha,s_1)$ jest spójny, to dla $s \geq s_1$ zbiór $\Gamma(\alpha,s)$ jest także spójny.

D e f i n i c j a (13,2). Mówimy, że funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ / typu G_* czy typu G / wymiata zbiór a na R' w obrębie zbioru C, jeżeli istnieje zbiór A taki, że funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ wymiata go w sobie na R', a ponadto $a \subset A \subset C$.

T w i e r d z e n i e (13,1). Jeżeli są spełnione założenia Z_1 i Z_3F, a zbiór $a \subset U + S$ i jeżeli ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G_*, która wymiata zbiór a na S w obrębie zbioru $E(a)$.

D o w ó d. Połóżmy dla $\alpha \subset E(a)$ i dla dowolnych s

$$\Psi(\alpha,s) = \alpha\{t>s\} + e(\alpha\{t \leq s\},s) \quad (13,1)$$ *).

*) Równocześnie przyjmujemy, że ślad emisji zbioru pustego jest pusty.

Ponieważ $a \subset E(a)$, to w myśl definicji (13,2) wystarczy wykazać, że funkcja $\Psi(\alpha,s)$ posiada własności $1^* - 9^*$, jeżeli przyjmiemy $A = E(a)$. Własności 1^* i 4^* są oczywiste. Z (13,1) wynika, że

(13,2) $\Psi(\alpha,s) = \alpha$, jeżeli $\alpha\{t \leq s\} = 0$ i $\Psi(\alpha,s) = e(\alpha,s)$, jeżeli $\alpha\{t > s\} = 0$,

a stąd i z uwagi na to, że jeżeli punkt $(t,x) \in S$, to $e((t,x),s) = (t,x)$ dla $s \geq t$, wynika od razu 2^* i 3^*.

Jeżeli zbiór α jest zwarty, to i zbiór $\alpha\{t \leq s\}$ jest zwarty, a ponieważ ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F i $\alpha \subset E(a) \subset U + S$, to z twierdzenia (4,1) zastosowanego do zbioru $W\{t \leq s\}$ wynika, że i zbiór $e(\alpha\{t \leq s\}, s)$ jest zwarty. Ponadto $\alpha\{t = s\} = e(\alpha\{t = s\},s)$, a zatem we wzorze (13,1) można zastąpić $\alpha\{t < s\}$ przez $\alpha\{t \leq s\}$. Wobec tego zbiór $\Psi(\alpha,s)$ jako suma dwóch zbiorów zwartych jest zwarty.

Na mocy twierdzenia (4,1) zbiór $E(\alpha)$ jest zwarty. Niech s_* oznacza największą spośród współrzędnych czasowych punktów należących do $E(\alpha)$. Ze wzoru (13,1) i z własności (v_2) wynika, że dla $s \geq s_*$ jest $\Psi(\alpha,s) = e(\alpha,s) = e(\alpha)$, a ponieważ $\alpha \subset a \subset U + S$, to z uwagi na założenie Z_3F jest $e(\alpha) \subset S$. Wykazaliśmy własność 5^*.

Przypuśćmy, że własność 6^* nie jest prawdziwa. Wobec tego istnieją zbiory b i c takie, że $\Psi(\alpha,s) = b + c$, a ponadto $b.\bar{c} = \bar{b}.c = 0$. Połóżmy $b.e(\alpha\{t \leq s\},s) = b_1$, $c.e(\alpha\{t \leq s\},s) = c_1$, $b \cdot \alpha\{t > s\} = b_2$, $c.\alpha\{t > s\} = c_2$. Na mocy (13,1) jest $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$, a zatem zbiory $b_1 + b_2$ i $c_1 + c_2$ są rozgraniczone, czyli

(13,3) $$(\overline{b_1+b_2}).(c_1+c_2) = (b_1+b_2).(\overline{c_1+c_2}) = 0.$$

Ponadto $e(\alpha\{t \leq s\},s) = b_1 + c_1$, a zatem istnieją zbiory β i γ takie, że $\beta + \gamma = \alpha\{t \leq s\}$ oraz $e(\beta,s) = b_1$ i $e(\gamma,s) = c_1$.

Uzyskamy potrzebną dla zakończenia dowodu własności 6^* sprzeczność, jeżeli wykażemy, że zbiory $\beta + b_2$ i $\gamma + c_2$ są rozgraniczone. W tym celu wykażemy najpierw, że zbiór $(\beta + b_2).\overline{(\gamma + c_2)}$ jest pusty. Zbiory β i γ są rozgraniczone, bo w przeciwnym razie z twierdzenia (8,3) wynikałoby, że zbiory b_1 i c_1 nie są rozgraniczone, co ze względu na (13,3) nie jest możliwe. W takim razie $\beta.\bar{\gamma} = 0$. Z (13,3) wynika także, że $b_2.\bar{c}_2 = 0$. Pozostaje wykazać, że $b_2 . \bar{\gamma} = 0$ i $\beta.\bar{c}_2 = 0$. Lecz $\bar{\gamma} \subset W\{t \leq s\}$, a $b_2 \subset W\{t > s\}$, a zatem $b_2.\bar{\gamma} = 0$. Gdyby istniał punkt $P \in \beta \cdot \bar{c}_2$, to musiałoby być $t_P = s$, a zatem $P \in e(P,s)$. Ponieważ jednak $P \in \beta$, to $P \in e(\beta,s) = b_1$, a więc zbiór $b_1.\bar{c}_2$ nie byłby pusty, co znów z uwagi na (13,3) nie jest możliwe. W podobny sposób można wykazać, że zbiór $(\overline{\beta + b_2}).(\gamma + c_2) = 0$, wobec czego zbiory $\beta + b_2$ i $\gamma + c_2$ są rozgraniczone, co kończy dowód własności 6^*. Przechodząc do dowodu własności 7^*, zauważmy najpierw, że z własności 4^* wynika, że $\Psi(\alpha + \beta,s) = \Psi(\alpha,s) + \Psi(\beta,s)$. Wobec tego z (13,1) otrzymujemy $\Psi(\Psi(\alpha,s_1),s_2) = \Psi(\alpha\{s_1 < t \leq s_2\} + \alpha\{t > s_2\} + e(\alpha\{t \leq s_1\}, s_1),s_2)$. Stąd i z (13,2) wynika

$$(13,4) \qquad \Psi(\Psi(\alpha,s_1),s_2) = e(\alpha\{s_1 < t \leq s_2\},s_2) + \alpha\{t > s_2\} + e(e(\alpha\{t \leq s_1\},s_1),s_2).$$

Z drugiej strony

$$(13,5) \qquad \Psi(\alpha,s_2) = \alpha\{t > s_2\} + e(\alpha\{t \leq s_1\},s_2) + e(\alpha\{s_1 < t \leq s_2\},s_2).$$

Lecz na mocy (v_4) jest $e(e(\alpha\{t \leq s_1\},s_1),s_2) = e(\alpha\{t \leq s_1\},s_2)$, a zatem z (13,4) i z (13,5) wynika 7^*. Przechodzimy do dowodu własności 8^*. Ponieważ zbiór $E(\alpha)$ jest zwarty, to istnieją liczby s_0 i s_* takie, że do zbioru $E(\alpha)$ należą zarówno punkty o współrzędnej czasowej s_0, jak i punkty o współrzędnej czasowej s_*, lecz zbiór $E(\alpha)$ nie zawiera punktów o współrzędnej czasowej spoza przedziału $\langle s_0,s_*\rangle$. Z (13,2) wynika, że dla $s < s_0$ jest $\Psi(\alpha,s) = \Psi(\alpha,s_0) = \alpha$,

a z (13,2) i z własności (v_2) dla $s > s_*$ jest $\Psi(\alpha,s) = \Psi(\alpha,s_*) = e(\alpha)$. Wynika stąd, że przy dowodzie własności 8^* wystarczy ograniczyć się do przedziału $\langle s_0, s_*\rangle$. Ponieważ zbiór $E(\alpha)$ jest podzbiorem zwartym zbioru W, to na mocy twierdzenia (2,1) krzywe rodziny F zawarte w $E(\alpha)$ są jednakowo ciągłe, a zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, o której od razu założymy, że $\delta \leq \varepsilon$ taka, że jeżeli punkt $(\tau,\xi) \in E(\alpha)$, a punkt $(\tau_1,\xi_1) \in E(\tau,\xi)$, to

$$(13,6) \qquad \varrho(\xi,\xi_1) < \varepsilon \quad , \text{ jeżeli } 0 \leq \tau_1 - \tau < \delta.$$

Załóżmy, że $s_0 \leq s_1 < s_2 \leq s_*$ i $s_2 - s_1 < \delta$. Z (13,1) i z definicji (7,1) otrzymujemy

$$(13,7) \qquad \Psi(\alpha,s_1) = \alpha\{t > s_2\} + \alpha\{s_1 < t \leq s_2\} + E(\alpha\{t \leq s_1\}).T(s_1).$$

$$(13,8) \qquad \Psi(\alpha,s_2) = \alpha\{t > s_2\} + E(\alpha\{s_1 < t \leq s_2\}).T(s_2) + E(\alpha\{t \leq s_1\}).T(s_2).$$

Dla dowodu 8^* wystarczy wykazać, że każdemu punktowi jednego ze zbiorów $\Psi(\alpha,s_1)$, $\Psi(\alpha,s_2)$ odpowiada punkt drugiego zbioru taki, że ich odległość jest mniejsza od ε. Z uwagi na (13,7) i (13,8) jest to oczywiste, gdy chodzi o punkty należące do zbioru $\alpha\{t > s_2\}$. Każdemu punktowi jednego ze zbiorów $\alpha\{s_1 < t \leq s_2\}$ i $E(\alpha\{s_1 < t \leq s_2\}).T(s_2)$, odpowiada punkt drugiego zbioru taki, że obydwa leżą na pewnym elemencie F zawartym w $E(\alpha)$. Jeżeli P i Q są parą punktów o tej własności i punkt $P \in \alpha\{s_1 < t \leq s_2\}$, to $s_1 < t_P < t_Q$, ponadto ze wzoru (6,7) wynika, że $t_Q \leq s_2$, a zatem $0 \leq t_Q - t_P < \delta \leq \varepsilon$ i z (13,6) otrzymujemy, że $d(P,Q) < \varepsilon$. Pozostaje rozważyć wypadek, gdy punkt P należy do jednego z ostatnich składników prawych stron wzorów (13,7) i (13,8). Jeżeli $P \in E(\alpha\{t \leq s_1\}).T(s_1)$ i $t_P = s_1$, to w zupełnie analogiczny sposób otrzymamy, że $d(P,Q) < \varepsilon$, jeżeli natomiast $t_P < s_1$, to ze wzoru (6,7) wynika, że punkt P należy także

do zbioru $E(\alpha\{t \leq s_1\}).T(s_2)$ i można przyjąć $Q = P$. W ten sposób własność 8^* została udowodniona. Dla dowodu własności 9^* wystarczy wykazać, że dla każdego ciągu zstępującego zbiorów zwartych α_n zawartych w zbiorze $E(a)$ i dla każdego s jest $\prod_{n=1}^{\infty} \Psi(\alpha_n,s) \subset \Psi(\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n,s)$. W tym celu załóżmy, że punkt $Q \in \prod_{n=1}^{\infty} \Psi(\alpha_n,s)$. Jeżeli $t_Q > s$, to z (13,2) wynika, że $Q \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n\{t > s\}$, a zatem $Q \in \Psi(\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n,s)$. Jeżeli natomiast $t_Q \leq s$, to z tego samego wzoru otrzymujemy, że $Q \in \prod_{n=1}^{\infty} e(\alpha_n\{t \leq s\},s)$, a zatem istnieje ciąg punktów P_n, $P_n \in \alpha_n$, $n = 1,2,\ldots$ i ciąg elementów I_n rodziny F taki, że element I_n ma początek w punkcie P_n i koniec w punkcie Q. Ponieważ $\alpha_i \subset \alpha_1$, a zbiór α_1 jest zwarty, to $I_n \subset E(\alpha_1)$, $n = 1,2,\ldots$ Lecz $E(\alpha_1)$ jest podzbiorem zwartym zbioru W, a zatem na mocy własności 3^0 rodziny F z ciągu I_n można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu rodziny F mającego początek w zbiorze $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ i koniec w punkcie Q. Znaczy to, że $Q \in \Psi(\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n,s)$, co dowodzi 9^* W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia (13,1).

T w i e r d z e n i e (13,1'). Jeżeli są spełnione założenia Z_1 i Z_2F, a zbiór $a \subset U + T$ i jeżeli ze zbioru a nie wychodzą krzywe asymptotyczne rodziny F, to istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G, która wymiata zbiór a na T w obrębie zbioru $E(a)$.

Dowód tego twierdzenia jest niemal dokładnym powtórzeniem dowodu twierdzenia (13,1). W dowodzie własności 2^{**} należy skorzystać z tego, że jeżeli $a \subset T$, to $a \subset e(a) \subset T$, co wynika z ostatniej spośród własności (v_1).

T w i e r d z e n i e (13,2). Przyjmijmy założenia Z_1 i Z_3F. Jeżeli zbiór $b \subset W$, a zbiór $a \subset U + S$ i jeżeli nie istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G_*, która wymiata zbiór a na S w obrębie zbioru $U + S - b$, to (u_1) lub (u_2).

D o w ó d. Gdyby twierdzenie nie było prawdziwe, to na mocy twierdzenia (13,1) istniałaby funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ wymiatająca zbiór a na S w obrębie zbioru E(a), przy czym zbiory E(a) i b nie miałyby punktów wspólnych, a zatem na mocy wzoru (6,6) byłoby $E(a) \subset U + S - b$, co przeczy założeniom twierdzenia (13,2).

T w i e r d z e n i e (13,2'). Przyjmijmy założenia Z_1 i Z_2F. Jeżeli zbiór $b \subset W$, a zbiór $a \subset U + T$ i jeżeli nie istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G wymiatająca zbiór a na T w obrębie zbioru $U + T - b$, to (u_1) lub (u_2).

Dowód tego twierdzenia różni się od dowodu twierdzenia (13,2) jedynie tym, że zamiast z (6,6) korzystamy ze wzoru (6,3).

Twierdzenia (13,2) i (13,2') obejmują pewne przypadki, w których twierdzenia z poprzednich rozdziałów nie dają się bezpośrednio stosować.

W analogiczny sposób można określić funkcje wymiatania typów G_κ^- i G^- stosowne do badania rodzin typów G_κ i G. Funkcja wymiatania stosowna do badania rodzin typu $\mathcal{F}$ różniłaby się dość znacznie od funkcji wymiatania typów wyżej opisanych i zajmowanie się tym przypadkiem wydaje mi się mniej celowe.

P r z y k ł a d (13,1).

$$W = (t,x_1,x_2)\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 9,\ -\infty < t < +\infty\}$$

$$a = (t,x_1,x_2)\{(x_1 - 2)^2 + t^2 = 4,\ x_2 = 0\},$$

$$b = (t,x_1,x_2)\{x_1^2 + x_2^2 = 4,\ t = 0\}.$$

Przyjmijmy założenie Z_3F, a ponadto załóżmy, że punkty (0,-2,0), (0,4,0) należą do różnych składowych zbioru S. Twierdzimy, że:

(j) ze zbioru a + b wychodzi krzywa asymptotyczna rodziny F,

oraz

(jj) ze zbioru a wychodzi element rodziny F do zbioru b.

D o w ó d. Dla dowodu (j) wystarczy wykazać, że nie istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G_κ wymiatająca zbiór a + b na S w obrębie zbioru U + S. Przypuśćmy, że funkcja taka istnieje.

Na mocy 5^* istnieje liczba $s_* > 0$ taka, że zbiór $\Gamma(a + b, s_*)$ jest zawarty w zbiorze S, a z 2^* wynika, że zbiór $\Gamma(a + b, s_*)$ zawiera punkty (0,-2,0), (0,4,0). Ponieważ jednak z założenia punkty te należą do różnych składowych zbioru S, to zbiór $\Gamma(a + b, s_*)$ nie jest spójny. Z drugiej strony z 6^* i z 3^* wynika, że zbiór $\Gamma(a\{t \leq 0\}, 0)$ jest spójny i zawarty w zbiorze $S(0) = W\{t = 0\} + S\{t < 0\}$. Ponieważ jednak punkty (0,0,0), (4,0,0) leżące w różnych składowych zbioru S(0) - b należą na mocy 2^* także do zbioru $\Gamma(a\{t \leq 0\}, 0)$, to $\Gamma(a\{t \leq 0\}, 0).b \neq 0$ i tym bardziej $\Gamma(a,0).b \neq 0$. Lecz na mocy 2^* $b = \Gamma(b,0)$, więc zbiory $\Gamma(a,0)$, $\Gamma(b,0)$ mają punkt wspólny, wobec czego z 6^* i z 4^* wynika, że zbiór $\Gamma(a+b,0)$ jest spójny, a zatem z 6^{**} wynika, że i zbiór $\Gamma(a + b, s_*)$ jest spójny. Otrzymana sprzeczność dowodzi (j).

Dla dowodu (jj) rozważmy rodzinę F zredukowaną do zbioru $W\{t \leq 2\}$, który zawiera okręgi a i b. W dowodzie własności (j) wykazaliśmy, że $\Gamma(a,0).b \neq 0$. Oznacza to, że nie istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G_* wymiatająca zbiór a na S(2) w obrębie zbioru $W\{t \leq 2\} - b$, a ponieważ rodzina F zredukowana do zbioru $W\{t \leq 2\}$ nie zawiera krzywych asymptotycznych, to z twierdzenia (13,2) wynika (jj).

Dla przykładu (13,1) można otrzymać wynik dokładniejszy, a mianowicie: albo istnieje krzywa asymptotyczna rodziny F mająca punkty w zbiorach a i b, albo ze zbioru a + b wychodzą co najmniej dwie krzywe asymptotyczne. Istotnie, oznaczmy przez I krzywą rodziny F o początku w zbiorze a i końcu w zbiorze b, której istnienie wynika z (jj). Ze zbioru a + b + I można utworzyć dwa łuki o końcach (0,-2,0), (0,4,0), których częścią wspólną jest krzywa I oraz punkty (0,-2,0), (0,4,0). W sposób podobny, jak przy dowodzie (j) można wyzać, że nie istnieje funkcja $\Gamma(\alpha,s)$ typu G_* wymiatająca którykolwiek z tych łuków na S w obrębie zbioru U + S, wobec czego dla dowodu wystarczy zastosować twierdzenie (13,2) dwa razy, do każdego z tych łuków z osobna *).

*) Przykład (13,1) wykorzystaliśmy dla zilustrowania twierdzenia (13,2), chociaż wyniki, jakie uzyskaliśmy można by otrzymać stosując tylko twierdzenie (9,2) i pewne rozumowanie, przy którym wykorzystuje się uwagę (9,1).

W przykładzie (13,2) można było także przyjąć założenie Z_2F zamiast Z_3F zakładając tym razem, że punkty $(0,-2,0)$, $(0,4,0)$ należą do różnych składowych zbioru T. W tym przypadku w dowodzie własności (j), (jj) opieramy się na twierdzeniu (13,2').

Bibliografia

[1] ALBRECHT F., Remarques sur un théoreme de T.Ważewski relatif a l'allure asymptotique des integrales des équations differentielles, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.III, 2/1954/, p.315.

[2] BIELECKI A., Extension de la méthode du rétracte de T.Ważewski aux équations au paratingent, Ann. Univ, Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9,3 /1955/, p.37-58.

[3] - - - - - - Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9,4 /1955/, p.63-79.

[4] BIELECKI A., et Kluczny C., Sur un théoreme concernant des systèmes d'équations différentielles ordinaires, à paraitre dans les Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 /1961/.

[5] - - - - - - Sur une généralisation d'un théoreme de H.Knezer, à paraitre dans les Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14, /1961/.

[6] PLIŚ A., On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci., 2 /1954/, p.416.

[7] WAŻEWSKI T., Sur un principe topologique de l'examen de l'allure saymptotique des integrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Polon. Math., 20 /1947/, p.279-313.

[8] WAŻEWSKI T., et Szarski J., Sur l'existence des integrales asymptotiques des équations différentielles issues d'un ensemble de dimension zero, Colloqium Math. VI, /1958/, p.215-218.

[9] ZAREMBA S.K., Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles, Ann. Soc. Polon. Math., 15 /1936/, p.83-100.

Sur certaines familles de courbes en relation avec
la théorie des équations différentielles ordinaires

R é s u m é

Soit D_0 un espace métrique dans lequel les sphères fermées sont compactes, $D = (-\infty, \infty) \times D_0$ l'espace des points (t,x), où $x \subset D_0$ et t est un nombre réel, W un ensemble (non vide) contenu dans D, $U = \text{Int } W$, $R = W.\text{Front } W$ et supposons que l'ensemble $Y = \text{Front } W - R$ soit fermé - hypothèse Z_1.

Par courbe on entendra toujours un arc $x = \varphi(t)$, où t parcourt un intervalle Δ et la fonction $\varphi(t)$, à valeurs dans l'espace D_0, est supposée continue. Lorsque l'intervalle Δ est borné et fermé, la courbe sera dite du type L. Lorsque $\Delta = \langle t_1, t_2 \rangle$ ou $\Delta = \langle t_1, t_3)$, $t_3 < \infty$, je dirai que la courbe est issue du point $(t_1, \varphi(t_1))$, origine de la courbe. Dans le premier cas le point $(t_2, \varphi(t_2))$ sera appelé extrémité de la courbe. J'appellerai éléments du type L les courbes du type L et les points de l'ensemble W.

Un ensemble F formé d'éléments contenus dans W, sera appelé famille du type F si 1° tout point de W appartient à F, 2° toute courbe I, qui est contenue dans une courbe appartenant à F ou est la somme de deux éléments de F, appartient à la famille F et il en est de même lorsque toute portion de la courbe I, qui est une courbe du type L appartient à F, 3° étant donné une suite d'éléments de l'ensemble F, du type L, contenue dans un sous-ensemble compact de l'ensemble W, on peut toujours en extraire une suite partielle convergente vers un élément de l'ensemble F du type L, la convergence étant entendue comme la convergence (au sens de Hausdorff) d'une suite d'ensembles.

Je désigne par S (resp. T) l'ensemble des points P appartenant à W et satisfaisant à la condition qu'il n'existe pas de courbes de la famille F issues de P (resp. issues de P et pénétrant dans l'intérieur de l'ensemble W).

Par zone d'émission positive E(a) de l'ensemble $a \subset W$ j'entends l'ensemble des points situés dans W sur les courbes de la famille F, issues de a; l'ensemble $e(a) = E(a).T$ sera appelé trace d'émission positive de l'ensemble a.

Les définitions suivantes interviennent à partir du N°6 du travail:

4^+: Si un point $P = (\tau, \xi)$ appartient à U, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'intersection de l'ensemble E(P) avec tout hyperplan $t = t_1$, où $\tau < t_1 \leq \tau + \varepsilon$ est un continu.

Z_2: Si une courbe de la famille F est issue d'un point de l'ensemble U et aboutit à un point P' de l'ensemble R, alors $P' \in T$.

Z_3: Dans les mêmes hypothèses $P' \in S$.

Je dis que la famille F est du type G (resp. G_*) si elle satisfait aux conditions 1°, 2°, 3°, 4^+ et Z_2 (resp. Z_3). Toute famille F du type G_* est du type G. La famille de toutes les courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre (ou bien d'une équation au paratingent, voir [2]) remplit les conditions 1°, 2°, 3° et 4^+.

Un élément de la famille F est dit saturé à droite s'il ne peut pas se prolonger dans le sens positif de l'axe t. Une courbe de la famille F qui est saturée à droite et n'a pas d'extrémité sera appelée asymptotique.

Je démontre les propositions suivantes: Si la famille F est du type F et s'il n'y a pas de courbes asymptotiques de la famille F, issues de l'ensemble compact $a \subset W$, la zone d'émission E(a) est compacte (théorème (4,1)). Si la famille F est du type G, s'il n'existe pas de courbes asymptotiques de la famille F issues de l'ensemble connexe, $a \subset U + T$, alors e(a) est connexe (théorème (8,3)). La dernière proposition généralise le théorème de [6] qui, à son tour, généralise le théorème bien connu de H.Kneser, sur les zones d'émission, de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Or, il en résulte plusieurs conditions suffisantes pour qu'il existe des courbes asymptotiques de la famille F, issues d'un ensemble donné, ou bien des courbes assujetties à certaines conditions aux limites. Voici les plus importantes d'elles:

Si la famille F est du type F et l'ensemble $a \subset W$ est borné et fermé, mais sa zone d'émission positive E(a) n'est pas fermée ou bien n'est pas bornée, alors il existe une courbe asymptotique de la famille F, issue d'un point de l'ensemble a (théorème (5,2)).

Si la famille F est du type G et $b \subset W$, et si un ensemble $a \subset U + T$ a des points communs avec deux composantes distinctes de l'ensemble $T - b$, on a l'une des deux alternatives suivantes: is existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a, ou bien il existe un élément de la famille F dont l'origine est dans l'ensemble a et l'extrémité dans l'ensemble b (théorème 9,1)). En remplaçant G par G_* et T par S on en obtient un nouveau théorème qui est aussi vrai.

Ces théorèmes s'appliquent, en particulier, aux équations différentielles ordinaires remplissant la condition d'unicité des solutions ou non, aussi bien qu'aux équations au paratingent.

Dans le cas où la famille F est uniforme à droite, c'est-à-dire si les courbes de la famille ne peuvent pas se ramifier à droite, e(P) est une fontion qui fait correspondre à un point P l'extrémité de la courbe de la famille F, issue de P. On démontre que, si F est du type G_*, la fonction e(F) est continue dans l'ensemble des points $P \in U + S$, pour lesquels elle est définie. Il s'ensuit que les théorèmes contenus dans les travaux [7], [6], [2], [3] et [4] s'appliquent aux familles uniformes à droite du type G_*. J'ai démontré encore un théorème se rapportant à ce cas et basé sur la notion d'homotopie. Je dis qu'un ensemble Z peut être contracté en un point P dans l'ensemble B, s'il existe une homotopie $H(y,s)$, où $y = (t,x)$, telle que pour $y \in Z$ on a $H(y,0) = y$, $H(y,1) = P$, et en outre $H(y,s) \in B$ pour $0 \leq s \leq 1$. Or, si la famille F du type G_* est uniforme à droite, $a \subset U + S$ et $b \subset S$, et s'il existe un sous-ensemble Z de l'ensemble S-b qui ne peut pas être contracté en un point dans S-b, mais peut être contracté en un point dans $a + S - b$, alors il existe une courbe de la famille F, issue de l'ensemble a et asymptotique ou bien il existe un élément de la famille F joignant les ensembles a et b.

Je considère aussi des familles du type G^- ou du type G_*^- qui deviennent des familles du type G ou G_* lorsque l'on change le sens de l'axe t, et je définis d'une manière convenable la zone d'émission à gauche $E^-(a)$ et sa trace $e^-(a)$, aussi bien que les ensembles S^- et T^-. Ces notions permettent de formuler des théorèmes concernant les courbes asymptotiques à gauche, ou bien issues de l'ensemble b et aboutissant à l'ensemble a, tout à fait analogues à ceux que nous venons d'énoncer. La théorie a été illustrée de quelques exemples.

L'exemple (10,3) montre qu'en appliquant les théorèmes (5,2) ou (9,1), ou encore d'autres, on peut dans certaines cas constater qu'il existe des courbes asymptotiques à droite d'une famille du type G^- ou G_*^-.

Dans le dernier chapitre, j'introduis un nouveau formalisme, basé sur une sorte de déformation continue d'un ensemble, appelée balayage, qui se définit de la façon suivante:

Supposons que R' soit un sous-ensemble de l'ensemble R et A un sous-ensemble de l'ensemble $U + R'$. Nous dirons que la fonction $\Gamma(\alpha,s)$ est une fonction de balayage du type G_* si les conditions suivantes sont remplies:

1* La fonction $\Gamma(\alpha,s)$ est définie pour des valeurs de l'argument α qui sont sous-ensembles de l'ensemble A et pour des valeurs quelconques du paramètre s, ses valeurs étant sous-ensembles de l'ensemble A.

2* $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ pour $s \leqslant t_1$ et, si le point $(t_1,x_1) \in R'$, $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ pour tout s.

3* Si (t_1,x_1) n'appartient pas à R' et $s > t_1$, alors $\Gamma((t_1,x_1),s) \subset W\{t = s\} + R'\{t_1 < t < s\}$, où $W\{t = s\}$ designe l'ensemble des points (t,x) de l'ensemble W tels que $t = s$ et $R'\{t_1 < t < s\}$ désigne l'ensemble des points $(t,x) \in R'$ tels que $t_1 < t < s$.

4* $\Gamma(\alpha,s) = \sum_{(t,x)\in\alpha} \Gamma((t,x),s)$.

5* Si l'ensemble α est compact, l'ensemble $\Gamma(\alpha,s)$ est aussi compact et, en outre, il existe un nombre s_* tel que $\Gamma(\alpha,s_*) \subset R'$ et que pour $s \geqslant s_*$ on ait $\Gamma(\alpha,s) = \Gamma(\alpha,s_*)$.

6* Si l'ensemble α est connexe, l'ensemble $\Gamma(\alpha,s)$ est aussi connexe.

7* $\Gamma(\Gamma(\alpha,s_1),s_2) = \Gamma(\alpha,s_2)$ pour $s_1 \leqslant s_2$.

8* La fonction $\Gamma(\alpha,s)$ est uniformément continue par rapport à s dans l'ensemble des sous-ensembles compacts de l'ensemble A, c'est-à-dire: pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble compact $\alpha \subset A$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|s_1 - s_2| < \delta$, on ait $\Gamma(\alpha,s_1) \subset K(\Gamma(\alpha,s_2),\varepsilon)$, où $K(\gamma,\varepsilon)$ désigne l'entourage de rayon ε de l'ensemble γ.

9* La fonction $\Gamma(\alpha,s)$ est semi-continue supérieurement dans le sens de l'inclusion par rapport à α dans l'ensemble de tous les sous-ensembles compacts de l'ensemble A, c'est-à-dire: si $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ est une suite descendante d'ensembles compacts, contenus dans l'ensemble A et non vides, et si $\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha$, alors on a, pour tout s, $\prod_{i=1}^{\infty} \Gamma(\alpha_i,s) \subset \Gamma(\alpha,s)$.

Dans les mêmes hypothèses concernantes les ensembles R' et A, nous dirons qu'une fonction $\Gamma(\alpha,s)$ est une fonction de balayage du type G_*, si elle satisfait aux conditions 1*, 3* - 9* et, au lieu de 2*, à la condition suivante: 2** $\Gamma((t_1,x_1),s) = (t_1,x_1)$ pour $s \leqslant t_1$ et, si $(t_1,x_1) \in R'$, on a $(t_1,x_1) \in \Gamma((t_1,x_1),s) \subset R'$.

Des fonctions des types G ou G_* nous dirons qu'elles balayent l'ensemble A dans lui-même sur R'. Nous dirons que la fonction $\Gamma(\alpha,s)$, du type G ou G_*, balaye l'ensemble a sur R' dans l'ensemble C, s'il existe un ensemble A tel que la fonction $\Gamma(\alpha,s)$ le balaye dans lui-même sur R' et si, en outre, $a \subset A \subset C$.

Je démontre que, si la famille F est du type G_*, si l'ensemble $b \subset W$ et l'ensemble $a \subset U + S$ et s'il n'existe pas de fonction $\Gamma(\alpha,s)$ du type G_* balayant l'ensemble a sur S dans $U + S - b$, alors il existe une courbe asymptotique de la famille F issue de l'ensemble a, ou bien un élément de la famille F joignant l'ensemble a à l'ensemble b. Si l'on remplace G_* par G et S par T, le théorème restera vrai.

Ces théorèmes englobent certains cas particuliers où les théorèmes mentionnés auparavant ne s'appliquent plus directement. Le balayage du type G^- (ou G_*^-) correspondant à une famille du type G^- (resp. G_*^-) se définit d'une façon analogue. Si l'on voulait envisager un balayage dans le cas où il s'agirait d'une famille du type F la définition convenable devrait être bien différente des précédentes et assez compliquée, et je ne crois pas nécessaire de m'en occuper.

Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej
Matematyka - Fizyka Nr 1
Gliwice 1961

E r r a t a

Str.	Wiersz od góry od dołu	Jest	Ma być
6	4g	$K(y_1,r)$ jest	$K(y_1,r)$ o środku y_1 i promieniu r jest
7	8g	F	F^*
11	3g	F	$\mathcal{F}$
13	4g	$\mathcal{E}(\tau,\xi)$	$E(\tau,\xi)$
18	26g	(6,1) i (6,1)	(6,1) i (6,2)
19	15g	i (6,4).	i przyjętego założenia Z_3F.
21	1g	I.Front $W\{t < t\}$.	I.Front $W\{t \leqslant \bar{t}\}$.
21	2g	Q_1 E(a)	$Q_1 \in E(a)$
21	3g	a że Q T(t)	a że $Q \in T(\bar{t})$
25	19g	$Q \in \mathcal{E}(P)$	$Q \in E(P)$
33	11d	(o1,2)	(11,2)
36	16g	na R.	na R'.
39	10d	na pewnym elemencie	na pewnym elemencie rodziny F
41	18g	typu F	typu $\mathcal{F}$