ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 74 Matematyka - Fizyka z.2 1963

BRONISŁAW SZLĘK

KINEMATYCZNE OKREŚLENIE WEKTORA ROTACJI POLA WEKTOROWEGO

Rotacja pola wektorowego stałego w czasie ma pewną interpretację fizyczną podaną np. w [1]. Celem tej pracy jest ukazanie analogicznej interpretacji rotacji pola wektorowego zależnego od czasu. Osiąga się to przez przyjęcie innej definicji rotacji. Okaże się, że ta nowa definicja jest równoważna definicji klasycznej, według której

$$(1)\qquad \operatorname{rot} \overrightarrow{W} = \left\{ \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}, \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}, \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right\} .$$

Będziemy więc rozważać pole wektorowe $\overrightarrow{W}(t, x_1, x_2, x_3)$ określone i klasy C^1 w całej trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Uważajmy wektory $\overrightarrow{W}$ za prędkości ośrodka materialnego umieszczonego w tej przestrzeni. Określimy ruch podyktowany przez pole $\overrightarrow{W}$ wektora jednostkowego zaczepionego w pewnym, tym samym w czasie ruchu, punkcie fizycznym P_o ośrodka materialnego. Następnie wykażemy, że istnieje ortogonalna trójka wektorów zaczepiona w z góry zadanym punkcie P_o pola, która w chwili początkowej t_o porusza się ruchem sztywnym. Określimy wektor rotacji pola wektorowego w punkcie P_o i chwili t_o jako podwójną prędkość obrotową wymienionej trójki wektorów w chwili początkowej t_o. Okaże się, że tak określona rotacja wyraża się wzorem (1).

I. Weźmy w przestrzeni trójwymiarowej 3 wektory jednostkowe $\overset{\nu}{\vec{p}}(t)$ wzajemnie prostopadłe w chwili t_o i tworzące prawoskrętną trójkę $T(t)$ zaczepioną w punkcie P_o, tzn.

$$\left|\overset{\nu}{\vec{p}}(t)\right| = 1 \qquad \nu = 1, 2, 3$$

$$\overset{\nu}{\vec{p}}(t) \cdot \overset{\mu}{\vec{p}}(t) = 0 \quad \text{dla } t = t_o \quad \text{i } \nu \neq \mu$$

Oznaczmy kąt między wektorami $\overset{\nu}{\vec{p}}(t)$ i $\overset{\mu}{\vec{p}}(t)$ przez $\varphi_{\nu\mu}(t)$

Definicja

Ruch trójki wektorów nazywamy sztywnym, jeżeli długości tych wektorów i kąty między nimi nie ulegają zmianie w czasie.

Mówimy, że ruch trójki $T(t)$ jest w chwili $t = t_o$ ruchem sztywnym, jeżeli prędkości zmiany kątów między tymi wektorami są równe 0 w chwili $t = t_o$ czyli jeśli

$$\dot{\psi}_{\nu\mu}(t_o) = 0 \quad \text{dla} \quad \nu \neq \mu \;; \; \nu,\mu = 1, 2, 3$$

Lemat 1

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby ruch trójki $T(t)$ był sztywny w chwili t_o jest, aby

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\left[\overset{\nu}{\dot{p}}(t)\cdot\overset{\mu}{p}(t)\right] = 0 \quad \text{dla} \quad t = t_o, \; \nu \neq \mu \quad \nu,\mu = 1, 2, 3$$

Dowód. Jeżeli ruch trójki $T(t)$ jest sztywny w chwili $t = t_o$ to $\dot{\psi}_{\nu\mu}(t_o) = 0$, a więc

$$\frac{d}{dt}\left[\overset{\nu}{p}(t)\cdot\overset{\mu}{p}(t)\right]_{t=t_o} = -\dot{\psi}_{\nu\mu}(t_o)\sin\psi_{\nu\mu}(t_o) = 0$$

Odwrotnie, jeśli zachodzi (2) to wobec tego, że $\sin\psi_{\nu\mu}(t_o) \neq 0$ dla $\nu \neq \mu$ wynika, że $\dot{\psi}_{\nu\mu}(t_o) = 0$ dla $\nu \neq \mu$ więc ruch jest sztywny.

Lemat 2

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby ruch trójki $T(t)$ był w chwili $t = t_o$ ruchem sztywnym jest, aby istniał dokładnie jeden wektor $\vec{\omega}$ taki, że

$$(3) \quad \overset{\nu}{\dot{p}}(t_o) = \vec{\omega} \times \overset{\nu}{p}(t_o) \quad \nu = 1, 2, 3$$

Wektor $\vec{\omega}$ nazywamy prędkością kątową trójki wektorów $T(t)$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że ruch trójki $T(t)$ jest sztywny w chwili $t = t_o$. Rozważmy jeszcze trójkę wektorów $\overset{1}{\vec{r}}(t)$, $\overset{2}{\vec{r}}(t)$, $\overset{3}{\vec{r}}(t)$ spełniających warunki:

1^o $|\overset{\nu}{\vec{r}}(t)| = 1, \quad \nu = 1, 2, 3,$

2^o $\overset{\nu}{\vec{r}}(t) \cdot \overset{\mu}{\vec{r}}(t) = 0 \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, \quad \nu \neq \mu, \quad t = t_o$

3^o $\overset{\nu}{\vec{r}}(t_o) = \overset{\nu}{\vec{p}}(t_o) \quad \nu = 1, 2, 3$

4^o $\overset{\nu}{\dot{\vec{r}}}(t_o) = \overset{\nu}{\dot{\vec{p}}}(t_o) \quad \nu = 1, 2, 3$

5^o wektory $\overset{\nu}{\vec{r}}(t)$ są stale zaczepione w tym samym punkcie P_o i poruszają się ruchem sztywnym dla $t \geqslant t_o$.

Trójka wektorów $\overset{\nu}{\vec{r}}(t)$ stanowi układ sztywny i jak wykazano w [2] i [3] istnieje dla niej jednoznacznie określony wektor $\vec{\omega}(t)$ taki, że

$$\overset{\nu}{\dot{\vec{r}}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \overset{\nu}{\vec{r}}(t) \quad \text{dla} \quad t \geqslant t_o \tag{4}$$

Związek (4) zachodzi w szczególności dla $t = t_o$ co wobec warunków 3^o i 4^o daje (3).

Jeśli natomiast spełnione są warunki (3) to mnożąc pierwszy z nich przez $\overset{2}{\vec{p}}(t_o)$ otrzymujemy

$$\overset{1}{\dot{\vec{p}}}(t_o) \cdot \overset{2}{\vec{p}}(t_o) = \left[\vec{\omega} \times \overset{1}{\vec{p}}(t_o)\right] \overset{2}{\vec{p}}(t_o) = \overset{1}{\vec{p}}(t_o) \times \overset{2}{\vec{p}}(t_o) \cdot \vec{\omega} = \overset{3}{\vec{p}}(t_o) \cdot \vec{\omega}$$

Podobnie

$$\overset{2}{\dot{\vec{p}}}(t_o) \cdot \overset{1}{\vec{p}}(t_o) = \left[\vec{\omega} \times \overset{2}{\vec{p}}(t_o)\right] \overset{1}{\vec{p}}(t_o) = \overset{2}{\vec{p}}(t_o) \times \overset{1}{\vec{p}}(t_o) \cdot \vec{\omega} = -\overset{3}{\vec{p}}(t_o) \cdot \vec{\omega}$$

Z ostatnich dwóch równości dostajemy

$$\overset{1}{\dot{\vec{p}}}(t_o) \cdot \overset{2}{\vec{p}}(t_o) + \overset{2}{\dot{\vec{p}}}(t_o) \cdot \overset{1}{\vec{p}}(t_o) = 0$$

Analogicznie wykazuje się słuszność pozostałych zależności (2). Stąd i z lematu 1, wynika, że ruch jest sztywny.

Związek (3) pozwala obliczyć współrzędne wektora $\bar{\omega}$. Mnożąc skalarnie równość wektorową (3) przez wektor $\overset{\nu+1}{p}(t_0)$ i uwzględniając równości $\overset{\nu}{p}(t_0)x\overset{\nu+1}{p}(t_0) = \overset{\nu+2}{p}(t_0)$ otrzymujemy

$$(5) \qquad \overset{\nu}{\dot{p}}(t_0)\overset{\nu+1}{p}(t_0) = \overset{\nu+2}{p}(t_0).\bar{\omega} \qquad \nu = 1,\ 2,\ 3$$

Umówmy się dodatkowo, że wskaźnik 4 oznacza to samo co wskaźnik 1, wskaźnik 5 równoważny jest wskaźnikowi 2 itd. czyli np. $\overset{4}{p}(t_0) = \overset{1}{p}(t_0)$. Umowę tę stosujemy we wszystkich dalszych rozważaniach.

Z (5) wynika, że $\overset{2}{\dot{p}}(t_0)\overset{3}{p}(t_0)$, $\overset{3}{\dot{p}}(t_0)\overset{1}{p}(t_0)$, $\overset{1}{\dot{p}}(t_0)\overset{2}{p}(t_0)$ są składowymi wektora $\bar{\omega}$ w układzie $\overset{1}{p}(t_0)$, $\overset{2}{p}(t_0)$, $\overset{3}{p}(t_0)$. Zatem

$$(6) \qquad \bar{\omega} = \sum_{\nu}\left[\overset{\nu}{\dot{p}}(t_0)\overset{\nu+1}{p}(t_0)\right]\overset{\nu+2}{p}(t_0)$$

W tej sumie oraz we wszystkich dalszych, wskaźnik sumowania przyjmuje wartości 1, 2, 3. Dla uproszczenia zapisów nie będziemy jednak zaznaczać granic sumowania.

Obliczmy współrzędne wektora $\bar{\omega}$ w przyjętym, ustalonym układzie $0\,x_1\,x_2\,x_3$. Jeśli $\overset{\nu}{p}(t_0)$ ma w układzie $0\,x_1 x_2 x_3$ współrzędne $\overset{\nu}{p}_1$, $\overset{\nu}{p}_2$, $\overset{\nu}{p}_3$ to z (6) wynika, że współrzędna o numerze λ wektora $\bar{\omega}$ w układzie $0\,x_1\,x_2\,x_3$ wyraża się wzorem

$$(7) \qquad \omega_\lambda = \sum_{\nu}\left[\overset{\nu}{\dot{p}}(t_0)\,.\,\overset{\nu+1}{p}(t_0)\right]\overset{\nu+2}{p}_\lambda$$

II. Rozważmy teraz pole wektorowe klasy C^1 w całej przestrzeni trójwymiarowej

$$(8) \qquad \vec{W}(t,x_1,x_2,x_3) = \left\{A^1(t,x_1,x_2,x_3),\ \ A^2(t,x_1,x_2,x_3),\ \ A^2(t,x_1x_2,x_3)\right\}$$

Traktujmy wektory $\vec{W}$ jako prędkości punktów materialnych ośrodka fizycznego (np. cieczy) umieszczonego w tej przestrzeni. Niech równania ruchu dowolnego punktu $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ tego ośrodka mają postać

$$(9) \qquad \frac{dx_i}{dt} = A^i(t, x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

Układ ten posiada rozwiązanie ogólne klasy C^2 (zob. [4])

$$(10) \qquad x_i = \varphi^i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

spełniające warunki

$$(11) \qquad \varphi^i(t_o, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Krzywa (10) jest torem ruchu tego punktu, który w chwili t_o zajmował pozycję (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (stąd warunek (11)). Wielkości ξ_1, ξ_2, ξ_3 są cechami identyczności poruszającego się punktu i nie zmieniają się w czasie.

Jeżeli rozważyć dowolną krzywą K klasy C^1 w przestrzeni

$$(12) \qquad K: \quad \xi_i = \alpha_i(s) \qquad i = 1, 2, 3$$

to równania (10) podają ruch tej krzywej w przestrzeni. Równanie takiej krzywej w chwili t otrzymamy wstawiając (12) do (10).

$$(13) \qquad K(t): \quad x_i = \varphi^i(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)); \quad i = 1, 2, 3$$

Określimy teraz ruch podyktowany przez pole prędkości (8) dowolnego wektora jednostkowego $\bar{p}(t)$, który w chwili $t = t_o$ zajmował pozycję $\bar{p}(t_o) = \bar{p}_o$ i był zaczepiony w punkcie $\bar{P}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$. W tym celu konstruujemy dowolną krzywą klasy C^1, na której ten wektor $\bar{p}_o$ jest zaczepiony i jest do niej styczny w punkcie $\bar{P}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$.

Definicja

Ruch wektora jednostkowego stycznego w punkcie o cechach $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ do krzywej K, gdy porusza się ona według równań (10) nazywamy ruchem podyktowanym przez pole (8) wektora jednostkowego, który w chwili t_o zajmował położenie $\bar{p}_o$.

Twierdzenie 1

Ruch wektora jednostkowego, podyktowany przez pole prędkości (8) nie zależy od wyboru krzywej stycznej K.

Twierdzenie 2

Istnieją 3 krzywe przechodzące przez dowolny punkt $P_o(\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o)$ wzajemnie do siebie prostopadłe oraz takie, że jeżeli krzywe te poruszają się według równań (10), to trójka wektorów jednostkowych stycznych do tych krzywych w punkcie o cechach identyczności $\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o$ porusza się w chwili początkowej t_o ruchem sztywnym.

Dowód twierdzenia 2

Poszukiwanie krzywych, o których mowa w twierdzeniu, zaczniemy od wyprowadzenia pewnych pomocniczych zależności.

Rozważmy 3 krzywe C_j o równaniach parametrycznych

$$(14) \qquad C_j: \qquad \xi_i = \overset{j}{\alpha}_i(s_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

gdzie funkcje $\overset{j}{\alpha}_i(s_j)$ są klasy C^1.

Załóżmy, że krzywe te przechodzą przez punkt $P_o(\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o)$ przy wspólnej wartości parametru $s_j = 0$. Niech krzywe te będą do siebie ortogonalne

$$(15) \qquad \sum_i \overset{j}{\alpha}{}'_i \, \overset{k}{\alpha}{}'_i = 0 \qquad j,k = 1, 2, 3 \qquad j \neq k$$

Przypuśćmy, że każda z nich jest sparametryzowana w sposób naturalny, tzn.

(16) $$\sum_i (\overset{j}{\alpha}{}_i')^2 = 1 \qquad j = 1, 2, 3$$

Oznaczając

(17) $$\overset{j}{\alpha}{}_i' = \overset{j}{p}_i \qquad i,j = 1, 2, 3$$

możemy związki (15) i (16) zapisać krótko

(18) $$\sum_i \overset{j}{p}_i \overset{k}{p}_i = \delta_{jk} \qquad j,k = 1, 2, 3$$

gdzie $\delta_{jk} = 0$ dla $j \neq k$ zaś $\delta_{jk} = 1$ dla $j = k$.
Niech każda z krzywych C_j porusza się według równać (10). Zatem równanie jej obrazu w chwili t ma postać

(19) $$C_j(t):\ x_i = \varphi^i\left[t, \overset{j}{\alpha}_1(s_j), \overset{j}{\alpha}_2(s_j), \overset{j}{\alpha}_3(s_j)\right];\ i,j=1,2,3$$

Oznaczmy przez $\overset{j}{w}(t)$ wektor styczny do krzywej $C_j(t)$ w chwili t w punkcie $P_o(t)$ (tzn. w punkcie, który jest obrazem punktu $P_o(\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o)$ przez przekształcenie (10)). Obliczmy współrzędną o numerze k wektora $\overset{j}{w}(t)$

(20) $$\left[\overset{j}{w}(t)\right]_k = \sum_l \varphi^k_{\xi l} \overset{j}{p}_l$$

We wzorze (20) wartość parametru s_j równa się 0. Oznaczmy jeszcze

(21) $$\overset{j}{p}(t) = \text{wers } \overset{j}{w}(t)$$

Z (20) otrzymujemy wartość k-tej współrzędnej dla wektora (21)

$$\left[\vec{p}^{\,j}(t)\right]_k = \frac{\sum\limits_{l} \varphi^{k}_{\S l} \cdot p^{j}_{l}}{\left[\sum\limits_{m}\left(\sum\limits_{l} \varphi^{m}_{\S l} \cdot p^{j}_{l}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Stąd otrzymujemy

$$\left[\dot{\vec{p}}^{\,j}(t)\right]_k = \left\{\left[\sum_{l} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^{k}_{\S l}) p^{j}_{l}\right]\left[\sum_{m}\left(\sum_{l} \varphi^{m}_{\S l}\, p^{j}_{l}\right)^2\right] - \right.$$

$$(22) \qquad \left. -\left[\sum_{l} \varphi^{k}_{\S l}\, p^{j}_{l}\right]\left[\sum_{m}\left(\sum_{l} \varphi^{m}_{\S l}\, p^{j}_{l}\right)\sum_{l} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^{m}_{\S l})\, p^{j}_{l}\right]\right\} :$$

$$: \left[\sum_{m}\left(\sum_{l} \varphi^{m}_{\S l}\, p^{j}_{l}\right)^2\right]^{3/2}$$

Interesować się będziemy tylko wektorami $\vec{p}^{\,j}(t_o)$ i $\dot{\vec{p}}^{\,j}(t_o)$. W tym celu obliczymy wartości $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^{k}_{\S l})$ i $\varphi^{k}_{\S l}$ w punkcie P_o. Ponieważ φ^{k} są klasy C^2 więc $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^{k}_{\S l}) = \frac{\partial}{\partial_{\S l}}(\varphi^{k}_{t})$. Z (10) i (9) wynika, że

$$\left[\varphi^{k}_{t}\right]_{P_o}(t) = A^{k}\left[t, \varphi^{1}(t, \S_1, \S_2, \S_3),\right.$$

$$\left.\varphi^{2}(t, \S_1, \S_2, \S_3),\ \varphi^{3}(t, \S_1, \S_2, \S_3)\right]$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial_{\S l}}(\varphi^{k}_{t})_{P_o} = \frac{\partial}{\partial_{\S l}} A^{k}(t_o, \S_1, \S_2, \S_3) = (A^{k}_{x_l})_{P_o}$$

i ostatecznie

$$(23) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^{k}_{\xi_l}\right)_{P_o} = \left(A^{k}_{x_l}\right)_{P_o}$$

Dla obliczenia $(\varphi^{k}_{\xi_l})_{P_o}$ przyjmujemy wartość $t = t_o$. Otrzymujemy

$$(24) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\varphi^{k}\right)_{P_o} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}\varphi^{k}(t_o, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial}{\partial \xi_l}(\xi_k) = \delta_{kl}$$

Ze wzorów (22), (23), (24) i (18) dostajemy

$$(25) \qquad \overset{j}{\bar{p}}_k(t_o) = \sum_l A^{k}_{x_l}\overset{j}{\bar{p}}_l - \overset{j}{\bar{p}}_k \sum_m \sum_l A^{m}_{x_l}\overset{j}{\bar{p}}_m \overset{j}{\bar{p}}_l$$

Ponadto

$$(26) \qquad \overset{j}{\bar{p}}(t_o) = (\overset{j}{p}_1, \overset{j}{p}_2, \overset{j}{p}_3) \qquad j = 1, 2, 3$$

Chcemy wykazać istnienie krzywych i wektorów, o których mowa w twierdzeniu 2. Według lematu 1, trzeba wykazać istnienie takich krzywych, dla których zachodzi (2). Wykorzystując wzory (25), (26) i (18) możemy związek (2) zapisać w postaci

$$(27) \qquad \sum_k \sum_l \left(A^{k}_{x_l} + A^{l}_{x_k}\right) p^{\nu}_{k} \cdot p^{\mu}_{l} = 0 \quad \text{dla } \nu \neq \mu$$

Jeżeli przyjąć oznaczenia

$$(28) \qquad A^{k}_{x_l} + A^{l}_{x_k} = a_{kl}$$

to (27) zapisujemy w postaci

$$\sum_k \sum_l a_{kl} \overset{\nu}{p}_k \overset{\mu}{p}_l = 0 \quad \text{dla} \quad \nu \neq \mu \tag{29}$$

Istnienie wektorów, o których mowa w twierdzeniu jest ostatecznie równoważne rozwiązalności układu równań (29) względem $\overset{i}{p}_j$. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli w punkcie P_o znikają wszystkie a_{kl}, to (29) jest spełnione przez dowolne wartości $\overset{i}{p}_j$. Oznacza to, że każda trójka krzywych przechodzących przez punkt P_o i wzajemnie prostopadłych, porusza się w chwili początkowej ruchem sztywnym. Załóżmy teraz, że nie wszystkie a_{kl} znikają, czyli

$$\sum_k \sum_l (A^k_{x_l})^2 > 0 \tag{30}$$

Szukamy dalej wektorów $\overset{i}{\vec{p}}\{\overset{i}{p}_1, \overset{i}{p}_2, \overset{i}{p}_3\}$ spełniających (29) przy założeniu (30). Rozważmy w tym celu dwa wektory:

$$\overset{\mu}{\vec{p}} = \left\{\overset{\mu}{p}_1, \overset{\mu}{p}_2, \overset{\mu}{p}_3\right\}$$

$$\overset{\nu}{\vec{q}} = \left\{\sum_l a_{1l} \overset{\nu}{p}_l, \sum_l a_{2l} \overset{\nu}{p}_l, \sum_l a_{3l} \overset{\nu}{p}_l\right\}$$

Zgodnie z (29) ich iloczyn skalarny zeruje się:

$$\overset{\mu}{\vec{p}} \, \overset{\nu}{\vec{q}} = \sum_k \overset{\mu}{p}_k \sum_l a_{kl} \overset{\nu}{p}_l = \sum_k \sum_l a_{kl} \overset{\nu}{p}_l \overset{\mu}{p}_k = 0 \tag{31}$$

Jeśli ν uważać za ustalone, to (31) oznacza, że $\overset{\nu}{\vec{q}}$ jest prostopadły do wszystkich $\overset{\mu}{\vec{p}}$ dla $\nu \neq \mu$. Wynika stąd równoległość wektorów $\overset{\nu}{\vec{p}}$ i $\overset{\nu}{\vec{q}}$. Istnieje zatem taka liczba σ_ν, że $\overset{\nu}{\vec{q}} = \sigma_\nu \cdot \overset{\nu}{\vec{p}}$ skąd

$$\sigma_\nu \overset{\nu}{p}_k = \sum_l a_{kl} \overset{\nu}{p}_l \tag{32}$$

Oznacza to, że wektor $\overset{v}{p}$ jest kierunkiem charakterystycznym formy $\sum_k \sum_l a_{kl} x_k x_l$, natomiast σ_v jest pierwiastkiem charakterystycznym tej formy. Ze związków (32) wynika, że

$$\sum_l \sigma_v \delta_{kl} \overset{v}{p}_l = \sum_l a_{kl} \overset{v}{p}_l$$

czyli

$$\sum_l (a_{kl} - \sigma_v \delta_{kl}) \overset{v}{p}_l = 0. \tag{33}$$

Ponieważ $\overset{v}{p}$ mają być niezerowe, więc

$$\operatorname{Det} (a_{kl} - \sigma_v \delta_{kl}) = 0 \tag{34}$$

Jeżeli wziąć układ liczb $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ spełniających (34) to układ (33) ma rozwiązanie niezerowe spełniające (29). W ten sposób dowód twierdzenia jest zakończony.

Twierdzenie to jest również słuszne dla dowolnej n wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Dowód twierdzenia 1

Prawdziwość twierdzenia 1, wynika ze związku (22), gdyż jego prawa strona jest taka sama dla dowolnej krzywej przechodzącej przez dany punkt P_o i stycznej w tym punkcie do wektora p_o.

III. Twierdzenie drugie zapewnia istnienie dla pola wektorowego (8) trójki ortogonalnych wektorów poruszającej się w chwili początkowej t_o ruchem sztywnym. Trójka ta posiada pewną prędkość obrotową $\bar{\omega}$ w chwili t_o.

Definicja

Wektorem rotacji pola wektorowego (8) w punkcie P_o i chwili t_o nazywamy podwójną prędkość kątową w chwili początkowej t_o ortogonalnej trójki wektorów jednostkowych zaczepionych w P_o i oznaczamy ją symbolem rot $\bar{W}$.

Według przyjętej definicji mamy rot $\bar{W} = 2\bar{\omega}$

<u>Twierdzenie 3</u>

Przyjęta definicja rotacji pola wektorowego (8) jest równoważna klasycznej definicji, tzn. zachodzą wzory

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rot}_{x_1}\vec{W} = 2\omega_1 = A^3_{x_2} - A^2_{x_3}\\
(35)\qquad &\mathrm{rot}_{x_2}\vec{W} = 2\omega_2 = A^1_{x_3} - A^3_{x_1}\\
&\mathrm{rot}_{x_3}\vec{W} = 2\omega_3 = A^2_{x_1} - A^1_{x_2}
\end{aligned}
$$

<u>Dowód</u>

Wyznaczona przez twierdzenie 2 trójka ortogonalnych wektorów $\overset{1}{\vec{p}}(t)$, $\overset{2}{\vec{p}}(t)$, $\overset{3}{\vec{p}}(t)$ porusza się w chwili początkowej t_o ruchem sztywnym a więc według lematu 2 istnieje wektor prędkości kątowej tej trójki $\vec{\omega}$ taki, że zachodzi (3). Współrzędne tego wektora podaje (7). Dla udowodnienia twierdzenia wyrazimy współrzędne wektora $\vec{\omega}$ przez $A^i_{x_j}$. W tym celu obliczamy iloczyn $\overset{\nu}{\dot{\vec{p}}}\,\overset{\nu+1}{\vec{p}}$ występujący w (7). Zgodnie z (25) i (26) mamy, wobec (18)

$$(36)\qquad \overset{\nu}{\dot{\vec{p}}}\,\overset{\nu+1}{\vec{p}} = \sum_j \overset{\nu}{\dot{p}}_j\,\overset{\nu+1}{p}_j = \sum_k\sum_j A^j_{x_k}\cdot \overset{\nu}{p}_k\cdot\overset{\nu+1}{p}_j$$

Podobnie

$$(37)\qquad \overset{\nu}{\vec{p}}\,\overset{\nu+1}{\dot{\vec{p}}} = \sum_k\sum_j A^k_{x_j}\cdot \overset{\nu}{p}_k\cdot\overset{\nu+1}{p}_j$$

Ponieważ ruch rozważanej trójki wektorów jest sztywny, więc zgodnie z lematem 1 zachodzi wzór (2) lub inaczej

$$(38)\qquad \overset{\nu}{\dot{\vec{p}}}\,\overset{\nu+1}{\vec{p}} = \frac{1}{2}\left(\overset{\nu}{\dot{\vec{p}}}\,\overset{\nu+1}{\vec{p}} - \overset{\nu}{\vec{p}}\,\overset{\nu+1}{\dot{\vec{p}}}\right)$$

Wstawiając do prawej strony związku (38) wyrażenia dane wzorami (36) i (37), otrzymujemy

(39) $$\dot{\overset{\nu}{p}}\,\overset{\nu+1}{p} = \frac{1}{2}\sum_k\sum_j \left(A^j_{x_k} - A^k_{x_j}\right)\overset{\nu}{p}_k\,\overset{\nu+1}{p}_j$$

Wprowadźmy oznaczenie

(40) $$b_{jk} = A^j_{x_k} - A^k_{x_j}$$

Oczywiście

(41) $$b_{jk} = -b_{kj} \quad \text{i} \quad b_{jj} = 0$$

Związek (39) przyjmuje zatem postać

(42) $$\dot{\overset{\nu}{p}}\,\overset{\nu+1}{p} = \frac{1}{2}\sum_k\sum_j b_{jk}\,\overset{\nu}{p}_k\overset{\nu+1}{p}_j$$

Wyrażenie to wstawiamy do (7)

(43) $$\omega_\lambda = \frac{1}{2}\sum_\nu\sum_k\sum_j b_{jk}\,\overset{\nu}{p}_k\,\overset{\nu+1}{p}_j\,\overset{\nu+2}{p}_\lambda$$

Wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie

(44) $$C^\lambda_{kj} = \sum_\nu \overset{\nu}{p}_k\,\overset{\nu+1}{p}_j\,\overset{\nu+2}{p}_\lambda$$

i obliczmy różnicę $C^\lambda_{j+1,j} - C^\lambda_{j,j+1}$

(45) $$C^\lambda_{j+1,j} - C^\lambda_{j,j+1} = \sum_\nu \overset{\nu+2}{p}_\lambda\left(\overset{\nu}{p}_{j+1}\overset{\nu+1}{p}_j - \overset{\nu}{p}_j\,\overset{\nu+1}{p}_{j+1}\right)$$

Na podstawie ortogonalności i równoskrętności danej trójki z przyjętym układem współrzędnych, mamy $\overset{\nu}{\bar{p}} \times \overset{\nu+1}{\bar{p}} = \overset{\nu+2}{\bar{p}}$ i związek (45) można zapisać w formie

$$C^{\lambda}_{j+1,j} - C^{\lambda}_{j,j+1} = -\sum_{\nu} \overset{\nu+2}{p}_{\lambda} \overset{\nu+2}{p}_{j-1} = -\delta_{\lambda,j-1} \tag{46}$$

Używając oznaczenia (44) i uwzględniając (41) można związek (43) zapisać

$$\omega_{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{j} b_{j,j+1} \left(C^{\lambda}_{j+1,j} - C^{\lambda}_{j,j+1}\right) \tag{47}$$

co wobec (46) daje ostatecznie

$$\omega_{\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{j} b_{j,j+1} \delta_{\lambda,j-1} \tag{48}$$

Stąd, i na podstawie (40)

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(A^3_{x_2} - A^2_{x_3}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(A^4_{x_3} - A^3_{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(A^1_{x_3} - A^3_{x_1}\right)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(A^5_{x_4} - A^4_{x_5}\right) = \frac{1}{2}\left(A^2_{x_1} - A^1_{x_2}\right)$$

Zgodnie z przyjętą definicją wektora rotacji $(\operatorname{rot} \bar{W} = 2\bar{\omega})$ otrzymaliśmy wzory (35), a więc dowód twierdzenia 3 został zakończony.

LITERATURA

[1] T.TRAJDOS-WRÓBEL - Wstęp do analizy wektorowej, Warszawa 1959, str.136.

[2] S.BANACH - Mechanika, Warszawa 1956.

[3] G.K.SUSŁOW - Mechanika teoretyczna, Warszawa 1960, str. 104-108,

[4] I.PIETROWSKI - Równania różniczkowe zwyczajne, Warszawa 1953, str.76-84.

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА РОТАЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Содержание

В работе подано кинематическую интерпретацию вектора ротации. Для этого рассматривается поле векторов $\vec{W}(t, x_1, x_2, x_3)$ определенное с непрерывной первой производной в целом евклидовом пространстве. Векторы $\vec{W}$ принимаются как векторы скорости какого-то вещества (н. пр. жидкости) помещенного в этом пространстве. Затем доказано, что для любой точки P_0 пространства существует три такие вектора взаимно перпендикулярные и прикрепленные к этой точке, что их движение определенное полем скорости $\vec{W}$ в моменте t_0 твёрдое. Принято определение ротации векторного поля в моменте t_0 и в точке P_0 как двойную угловую скорость этих трёх векторов. После этого доказано, что так определенная ротация выражается класической формулой (1).

THE KINEMATIC DEFINITION OF THE ROTATION OF THE FIELD OF VECTORS

Summary

The aim of this paper is to give the kinematic interpretation of the vector of rotation. For that purpose the field of the vectors $\vec{W}(t, x_1, x_2, x_3)$ has been considered. It is assumed that $\vec{W}$ is defined for the whole euclidean space and that there are continous derivatives of $\vec{W}$. We interprete the $\vec{W}$ as the vectors of velocity of the material substance which is placed in the euclidean space (e. g. of liquid). It has been proved, that for every point P_0 of this space there exist three orthogonal vectors, the starting points of which always coincide with this same point of substance and their movement being in the moment t_0 rigid. The rotation in the point P_0 and for $t = t_0$ is defined as the double angular velocity of that vectors in the moment t_0. Next it is shown that the rotation, defined in this way, is the same as the rotation defined conventionally (formula (1)).