ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 74 Matematyka - Fizyka z.2 1963

JÓZEF WĄSOWSKI

O PEWNYM SPOSOBIE ROZWIĄZYWANIA LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

W oparciu o metodę klasyczną, podano sposób znalezienia całki jednorodnego i niejednorodnego równania różniczkowego o stałych współczynnikach, spełniającej z góry podane warunki początkowe. Różni się on tym od podawanej w literaturze metody klasycznej, że nie wymaga każdorazowego dodatkowego wyznaczania stałych z podanych warunków początkowych.

1. Jednorodne liniowe r.r. o stałych współczynnikach.

Niech będzie dane r.r.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{(k)} = 0 \tag{1.1}$$

gdzie A_k, $k = 0,1,\dots n$, są to stałe współczynniki; $x \equiv x(t)$ jest funkcją szukaną.

W r.r. (1.1) zakładamy

$$A_n \neq 0 \tag{1.1a}$$

Przyjmijmy dla r.r. (1.1) następujące warunki początkowe

$$x^{(p)}(t_0) = x_p(t_0);' \quad p = 0,1,\dots(n-1) \tag{1.2}$$

Aby znaleźć całkę r.r. (1.1) spełniającą warunki początkowe (1.2), rozpatrzmy r.r.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^{(j)} \qquad (1.3)$$

gdzie

$$\Phi_j = \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \cdot \Psi_q \qquad j = 1,2,\ldots n \qquad (1.3a)$$

W r.r. (1.3) współczynniki stałe A_k, $k = 0,1,\ldots n$, są tymi samymi, które występują w r.r. (1.1); funkcje Ψ_j, $j = 1,2,\ldots n$, są funkcjami ciągłymi w dowolnym przedziale.

W r.r. (1.3) zakładamy (1.1a) oraz warunki początkowe (1.2).

Do r.r. (1.3) dochodzimy w następujący sposób.

Przecałkujmy n razy r.r. (1.1) w granicach od t_o do t, nie wykonując wskazanych całkowań.

Otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \int_{t_o}^{t} x(\tau)d\tau^{n-k} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=q}^{n} A_k \int_{t_o}^{t} x^{(k-q)}_{(t_o)} d\tau^{n-q}$$

gdzie

$$\int_{t_o}^{t} x(\tau)d\tau^k \overset{df}{=} \int_{t_o}^{t} d\tau_1 \int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_o}^{\tau_{k-1}} x(\tau_k)d\tau_k$$

Zamiast tak scałkowanego r.r. (1.1) piszemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \int_{t_o}^{t} x(\tau)d\tau^{n-k} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=q}^{n} A_k \int_{t_o}^{t} \Psi_{k-q}(\tau)d\tau^{n-k} \qquad (1.3')$$

gdzie

$$\Psi_j = \Psi_j(t); \quad j = 1,2,\ldots n$$

jak poprzednio.

Po n-krotnym obustronnym zróżniczkowaniu (1.3') i uwzględnieniu (1.3a) otrzymujemy (1.3).

W celu znalezienia całki ogólnej r.r.(1.3) stosujemy znaną metodę klasyczną uzmiennienia stałych [1], [2], otrzymując

$$x = \frac{1}{A_n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_{t_0}^{t} W_r(\tau) \cdot \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^{(j)}(\tau)d\tau + \sum_{r=1}^{n} K_r \varphi_r \tag{1.4}$$

Tutaj

$$W_r = \frac{D_r}{D}, \qquad r = 1,2,\dots n \tag{1.4a}$$

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \\ \varphi'_1, \varphi'_2, \dots \varphi'_n \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}, \varphi_2^{(n-1)}, \dots \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad D_r = \begin{vmatrix} \varphi_1, \dots \varphi_{r-1}, & 0, & \varphi_{r+1}, \dots \varphi_n \\ \varphi'_1, \dots \varphi'_{r-1}, & 0, & \varphi'_{r+1}, \dots \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \dots \varphi_{r-1}^{(n-1)}, & b, & \varphi_{r+1}^{(n-1)}, \dots \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$r = 1,2,\dots n \tag{1.4b}$$

gdzie φ_r, $r = 1,2,\dots n$, są całkami szczególnymi r.r.(1.3) gdy $\sum\limits_{r=1}^{n} \Phi_j^{(j)} \equiv 0$, o wyznaczniku Wrońskiego różnym od zera, a K_r, $r = 1,2,\dots n$, są to stałe, które w metodzie klasycznej [1], [2], wyznacza się z warunków początkowych (1.2), dla każdego konkretnego przypadku oddzielnie.

Obecnie całkujemy (1.4) przez części, otrzymując

$$x = \frac{1}{A_n} \sum_{q=1}^{n} (-1)^{q-1} \left[\sum_{r=1}^{n} \varphi_r W_r^{(q-1)} \cdot \left(\sum_{j=q}^{n} \Phi_j^{(j-q)} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A_n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot W_r^{(j)}(\tau) \Phi_j(\tau) d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_r \varphi_r \tag{1.5}$$

Tutaj

$$P_r = K_r - \frac{1}{A_n}\sum_{q=1}^{n}(-1)^{q-1} \cdot W_r^{(q-1)}(t_o)\sum_{j=q}^{n}\Phi_j^{(j-q)}(t_o)$$

$$r = 1,2,\dots n \tag{1.5a}$$

W dalszym ciągu podstawiamy (1.5) do r.r.(1.3) otrzymując po uporządkowaniu według pochodnych Φ_j; $j = 1,2,\dots n$, następującą tożsamość

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{\xi=n+2-j}^{n}\sum_{q=\xi}^{n}\sum_{k=q}^{n}(-1)^{q+\xi}\cdot\binom{k}{q}\cdot\frac{A_k}{A_n}\Big(\sum_{r=1}^{n}\varphi_r W_r^{(q-\xi)}\Big)^{k-q)}\cdot\Phi_j^{(\xi+j-1)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\xi=0}^{n}\sum_{q=0}^{\xi}\sum_{k=q}^{n}(-1)^{q+\xi+j-1}\binom{k}{q}\frac{A_k}{A_n}\Big(\sum_{r=1}^{n}\varphi_r W_r^{(q-\xi+j-1)}\Big)^{k-q)}\Phi_j^{(\xi)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\xi=0}^{n}\sum_{q=\xi+1}^{n}\sum_{k=q}^{n}(-1)^{j}\cdot\binom{q-1}{\xi}\cdot\frac{A_k}{A_n}\cdot\Big(\sum_{r=1}^{n}\varphi_r^{(k-q)}W_r^{(j)}\Big)^{(q-\xi-1)}P_j^{(\xi)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Phi_j^{(j)} \tag{1.6}$$

Tutaj z uwagi na przyjęty sposób zapisu wzorów (1.6), wszystkie sumy o pochodnych ujemnych są równe zeru.

Jak widać, po prawej stronie tożsamości (1.6), przy pochodnych funkcyj Φ_j, $j = 1,2,\dots n$, występują współczynniki stałe, równe jedności.

Współczynniki zatem występujące po lewej stronie tożsamości (1.6) przy odpowiednich pochodnych Φ_j, $j=1,2,\dots n$, muszą być również współczynnikami stałymi równymi jedności.

Współczynniki natomiast występujące po lewej stronie tożsamości (1.6) przy takich funkcjach Φ_j, $j = 1,2,\dots,n$ i ich pochodnych, które nie występują po stronie prawej tożsamości (1.6) muszą być równe zeru.

Powyższe wynika stąd, że tożsamość (1,6) musi być spełniona dla dowolnej funkcji Φ_j, $j = 1,2,\dots n$, ciągłej w dowolnym przedziale J.

Z tożsamości zatem (1.6) wynikają dla $j = n, (n-1),\dots 2,1$, $\xi = n, (n-1),\dots 2,1$, następujące związki

$$
\begin{aligned}
&(-1)^j \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} w_r^{(j)} = 0, && p+j \le n-2 \\
&(-1)^j \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} w_r^{(j)} = 1, && p+j = n-1 \qquad (1.7) \\
&(-1)^j \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} w_r^{(j)} = Q_\xi, && p+j = n+\xi-1
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
Q_\xi = -\frac{1}{A_n} \sum_{q=1}^{\xi} A_{n-q} \cdot Q_{\xi-q}, \qquad Q_o = 1 \qquad (1.7a)
$$

$\xi = 1,2,\dots n, \qquad p = 0,1,\dots n, \qquad j = 1,2,\dots n$

Różniczkując (1.5), $p = 0,1,\dots(n-1)$ razy i uwzględniając przy każdym różniczkowaniu (1.7), dostajemy

$$
x^{(p)} = \frac{1}{A_n} \sum_{\xi=0}^{p} \sum_{q=n+\xi-p}^{n} Q_\xi \Phi_q^{(q-n+p-\xi)} + \frac{1}{A_n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j w_r^{(j)} \cdot \Phi_j \, d\tau +
$$

$$
+ \sum_{r=1}^{n} P_r \varphi_r^{(p)}, \qquad p = 0,1,\dots(n-1) \qquad (1.8)
$$

Obecnie wracając do (1.3a) wyrażamy funkcje ψ_q, $q = 0,1,\ldots(n-1)$ przez funkcje Φ_j, $j = 1,2,\ldots n$. Otrzymujemy

$$\psi_p = \frac{1}{\Lambda_n}\sum_{\xi=0}^{p} Q_\xi \cdot \Phi_{n-p+\xi}, \quad p = 0,1,\ldots(n-1) \tag{1.9}$$

Uwzględniając (1.9) w (1.8) dostajemy

$$x^{(p)} = \psi_p + \frac{1}{\Lambda_n}\sum_{\xi=0}^{p}\ \sum_{q=n+\xi-p+1}^{n} Q_\xi \Phi_q^{(q-n+p-\xi)} +$$

$$+ \frac{1}{\Lambda_n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r^{(p)}\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j W_r^{(j)}\Phi_j \cdot d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_r \varphi_r^{(p)}, \quad p=0,1,\ldots(n-1) \tag{1.10}$$

Aby otrzymać całkę r.r. (1.1) spełniającą warunki początkowe (1.2), wystarczy założyć

$$\psi_p \equiv x_p(t_0) = \mathrm{const.}, \qquad p = 0,1,\ldots(n-1) \tag{1.11}$$

Wówczas r.r. (1.3) staje się identyczne z r.r. (1.1), a ponieważ warunki początkowe (1.2) są te same dla r.r. (1.1) co i dla r.r. (1.3) to i całka r.r. (1.3) staje się identyczna z całką r.r. (1.1).

Uwzględniając (1.11) w (1.10) i zakładając $t = t_0$, otrzymujemy następujących n równań

$$\sum_{r=1}^{n} P_r \varphi_r^{(p)}(t_0) = 0, \qquad p = 0,1,\ldots(n-1)$$

Ponieważ wyznacznik Wrońskiego jest z założenia różny od zera, zatem

$$P_r = 0, \qquad r = 1,2,\ldots n \tag{1.12}$$

Uwzględniając (1.11) oraz (1.12) we wzorze (1.10), otrzymujemy dla $p = 0$, przy oznaczeniu $x_o(t) = x(t_o)$

$$x = x(t_o) + \frac{1}{A_n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r\int_{t_o}^{t}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \cdot w_r^{(j)}(\tau) \cdot \Phi_j(\tau)d\tau \qquad (1.13)$$

gdzie zgodnie z (1.3a) po uwzględnieniu tam (1.11)

$$\Phi_j(t) = \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \cdot x(t_o), \qquad j = 1,2,\ldots n \qquad (1.13a)$$

Uzyskany wynik (1.13) można doprowadzić do jeszcze prostszej formy. Wykonując mianowicie wskazane całkowania, dostajemy

$$x = x(t_o) + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \cdot \Big(\sum_{r=1}^{n}\varphi_r w_r^{(j)}\Big)\Phi_j(t) -$$

$$- \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \Big(\sum_{r=1}^{n} w_r^{(j-1)}(t_o)\Phi_j(t_o)\Big) \cdot \varphi_r(t)$$

Uwzględniając tutaj (1.7) dla $p + j \leq n - 1$, $p = 0$, $j = 1,2,\ldots n$, oraz (1.13a), otrzymujemy ostatecznie

$$x = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left\{\left[\sum_{r=1}^{n} w_r^{(j-1)}(t_o)\right]\left[\sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \cdot x_q(t_o)\right]\right\} \cdot \varphi_r(t) \qquad (1.14)$$

Jest to całka r.r. (1.1) spełniająca warunki początkowe (1.2); φ_r, $r = 1,2,\ldots n$, są całkami szczególnymi r.r. (1.1) a $x_q(t_o)$, $q = 0,1,\ldots(n-1)$, są założonymi z góry dowolnymi wartościami początkowymi, zgodnie z wzorem (1.2).

2. Niejednorodne liniowe r.r. o stałych współczynnikach i zerowych warunkach początkowych

Niech będzie dane r.r.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{(k)} = F \tag{2.1}$$

gdzie A_k, $k = 0,1,\ldots n$ oraz $x \equiv x(t)$ jak w (1.1), a $F \equiv F(t)$ jest daną funkcją ciągłą w dowolnym przedziale J.

W r.r. (2.1) zakładamy (1.1a) oraz zerowe warunki początkowe, tzn.

$$x^{(p)}(t_o) = 0, \quad k = 0,1,\ldots(n-1) \tag{2.2}$$

Szukając całki ogólnej r.r. (2.1) otrzymujemy stosując znaną metodę klasyczną uzmiennienia stałych [1], [2]

$$x = \frac{1}{A_n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r\int_{t_o}^{t} W_r(\tau)\,.\,F(\tau)d\tau + \sum_{r=1}^{n} Q_r\,\varphi_r \tag{2.3}$$

Tutaj $W_r = \frac{D_r}{D}$, $r = 1,2,\ldots n$, jak we wzorach (1.4a) i (1.4b), gdzie φ_r, $r = 1,2,\ldots n$, są całkami szczególnymi r.r. (2.1) gdy $F \equiv 0$, o wyznaczniku Wrońskiego różnym od zera.

Różniczkując (2.3), $p = 0,1,\ldots(n-1)$ razy i uwzględniając przy każdym różniczkowaniu pierwszy z wzorów (1.7), otrzymujemy

$$x^{(p)} = \frac{1}{A_n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r^{(p)}\int_{t_o}^{t} W_r(\tau)\,.\,F(\tau)d\tau + \sum_{r=1}^{n} Q_r\,\varphi_r^{(p)},$$

$$p = 0,1,\ldots(n-1)$$

Zakładając tutaj $t = t_o$ i uwzględniając (2.2) dostajemy n równań

$$\sum_{r=1}^{n} Q_r \varphi_r^{(p)}(t_o) = 0, \quad p = 0,1,\ldots(n-1)$$

z których z uwagi na to, że wyznacznik Wrońskiego jest z założenia różny od zera, otrzymujemy

$$Q_r = 0 \quad , \qquad r = 1,2,\ldots n$$

Uwzględniając powyższe w (2.3) dostajemy

$$x = \frac{1}{\Lambda_n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_{t_o}^{t} W_r(\tau) \cdot F(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

Jest to całka r.r. (2.1) spełniająca zerowe warunki początkowe (2.2).

3. Liniowe niejednorodne r.r. o stałych współczynnikach i dowolnych warunkach początkowych

Niech będzie dane r.r.

$$\sum_{k=o}^{n} A_k x^{(k)} = F \tag{3.1}$$

gdzie A_k, $k = 1,2,\ldots n$, oraz $x \equiv x(t)$ jak w (1.1), a $F \equiv F(t)$ jak w (2.1).

W r.r. (3.1) zakładamy (1.1a) oraz warunki początkowe (1.2).

Szukana całka r.r. (3.1), spełniająca warunki początkowe (1.2) jest oczywiście sumą całek (1.14) i (2.4), tzn.

$$x = \frac{1}{A_n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r\int_{t_0}^{t}W_r(\tau)\cdot F(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}W_r^{(j-1)}(t_o)\right]\cdot\left[\sum_{q=0}^{n-j}A_{q+j}\cdot x_q(t_o)\right]\right\}\cdot\varphi_r(t) \quad (3.2)$$

gdzie wszystkie występujące wielkości jak we wzorach (1.14) i (2.4).

4. Wzory praktyczne

Wzór (3.2) możemy dalej przekształcić, znajdując $W_r^{(j-1)}(t_o)$ r, j = 1,2,...n, przy czym założymy $t_o = 0$, co jest prawie regułą w zastosowaniach praktycznych.

Rozpatrzmy przypadek obejmujący wszystkie możliwe pierwiastki równania charakterystycznego

$$\sum_{k=0}^{n}A_k s^k = 0 \qquad (4.1)$$

r.r. (3.1), gdzie A_k, k = 0,1,...n, jak w (1.1) i gdzie obowiązuje (1.1a).

Niech więc równanie charakterystyczne (4.1) posiada n_1-krotny pierwiastek s_1, n_2-krotny pierwiastek s_2,...,n_v-krotny pierwiastek s_v, razem pierwiastków n, tzn. $n_1+n_2+...+n_v = n$.

Skorzystamy tu z wzoru (48), [3], tom II, § 138, str.811 i przynależnego do niego wzoru (25), str.804.

Wprowadzamy nowe oznaczenia, a mianowicie odnośnie wzoru (48): τ zamiast t; t zamiast x; s_q gdzie q = 1,2,...v, zamiast a,b,...c; n_q gdzie q = 1,2,...v, zamiast α, β, ...λ, ; K_{qk} gdzie k = 1,2,...n_q, a q = 1,2,...v, zamiast $(A_1, A_2, ...A_\alpha)$, $(B_1, B_2, ...B_\beta)$, $(C_1, C_2, ...C_\gamma)$;

$F(\tau)$ zamiast $\varphi(t)$; oraz odnośnie wzoru (25): $A(s)$ zamiast $F(r)$.

Uwzględniając tylko całkę szczególną występującą w cytowanym wzorze, otrzymujemy zakładając $t_0 = 0$

$$x = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \int_{t_0}^{t} \frac{F(\tau)}{(r-1)!} \cdot K_{q(n_q-r+1)} \cdot (t-\tau)^{r-1} \cdot e^{s_q(t-\tau)} d\tau$$

gdzie

$$K_{qi} = - K_{q1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{A_{(s_q)}^{(n_q+k)}}{(n_q+k)!} \cdot K_{q(i-k)}; \quad i = 2,3,\dots n_q, \quad q = 1,2,\dots v$$

$$K_{q1} = \frac{n_q!}{A^{(n_q)}_{(s_q)}}$$

Jest to całka szczególna r.r. (2.1) o zerowych warunkach początkowych, tzn. gdy $x^{(p)}(0) = 0$, $p = 0,1,\dots(n-1)$, w przypadku rozpatrywanych przez nas pierwiastków równania charakterystycznego (4.1).

Wydzielając w wyżej podanym wzorze funkcje $\varphi_r = t^{r-1} e^{s_q t}$; $r = 1,2,\dots n$, $q = 1,2,\dots v$, przed znak całki, otrzymujemy

$$x = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \varphi_r \int_{0}^{t} \frac{F(\tau)}{(r-1)!} \sum_{\xi=0}^{n_q-r} (-1)^{\xi} \cdot K_{q(n_q-\xi-r_q+1)} \cdot \tau^{\xi} \cdot e^{-s_q \tau}$$

Wzór powyższy przedstawia tę samą całkę szczególną r.r. (2.1) o zerowych warunkach początkowych $x^{(p)}(0) = 0$, $p = 0,1,\dots(n-1)$, co i wzór (2.4) po założeniu tam $t_0 = 0$.

Porównując je, otrzymamy

$$W_r(t) = \frac{A_n}{(r_q-1)!}\sum_{q=1}^{v}\sum_{\xi=0}^{n_q-r_q}(-1)^{\xi}\cdot\frac{1}{\xi!}\cdot K_{q(n_q-\xi-r_q+1)}\cdot\tau^{\xi}\cdot e^{-s_q t}$$

gdzie

$r = r_1,\ (n_1+r_2),\ (n_1+n_2+r_3),\ \ldots\ (n_1+n_2+\ldots+n_{v-1}+r_v)$

$r_q = 1,2,\ldots n_q;\qquad q = 1,2,\ldots v$

Różniczkując $p = 0,1,\ldots(n-1)$ razy $W_r(t)$, $r = 1,2,\ldots n$, otrzymujemy

$$W_r^{(p)}(t) = \frac{A_n}{(r_q-1)!}\sum_{q=1}^{v}\sum_{\xi=0}^{n_q-r_q}(-1)^{p+\xi}\cdot\frac{1}{\xi!}\cdot\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}s_q^{p-k}\cdot$$

$$\cdot K_{q(n_q-k-\xi-r_q+1)}t^{\xi}e^{-s_q t} \tag{4.3}$$

gdzie

$p = 0,1,\ldots(n-1)$

$r = r_1,\ (n_1+r_2),\ (n_1+n_2+r_3),\ldots(n_1+n_2+\ldots+n_{v-1}+r_v)$

$r_q = 1,2,\ldots n_q,\ q = 1,2,\ldots v.$

Zakładając $t = 0$ w (4.2) dostajemy

$$W_r^{(p)}(0) = A_n\sum_{q=1}^{v}(-1)^p\frac{1}{(r_q-1)!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\cdot K_{q(n_q-r_q-k+1)} \tag{4.3a}$$

gdzie p, r, r_q i q jak w (4.2).

Uwzględniając (4.2) i (4.3a) we wzorze (3.2) (gdzie $t_o = 0$) i biorąc pod uwagę, że dla $(n_q - r - k + 1) \leq 0$ jest $K_{q(n_q-r-k+1)} = 0$, gdzie $q = 1,2,\ldots v$, dostajemy

$$x = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \int_{t_0}^{t} \frac{K_{q(n_q-r+1)}}{(r-1)!} F(\tau) \cdot (t-\tau)^{r-1} \cdot e^{s_q(t-\tau)} d\tau \; +$$

$$+ \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{k=0}^{n_q-r} \frac{K_{q(n_q-r-k+1)}}{(r-1)!\, k!} B^{(k)}_{(s_q)} t^{r-1} e^{s_q t} \tag{4.4}$$

Tutaj

$$K_{qi} = - K_{q1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{A^{(n_q+k)}(S_q)}{(n_q+k)!} \cdot K_{q(i-k)}; \quad i = 2,3,\ldots n_q,$$

$q = 1,2,\ldots v$

$$K_{q1} = \frac{n_q!}{A^{(n_q)}(S_q)}, \qquad q = 1,2,\ldots v$$

$$A(s) = \sum_{k=0}^{n} A_k S^k = A_n \prod_{q=1}^{n_q} (S-S_q) \tag{4.4a}$$

$$B(S) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k S^k$$

$$B_k = \sum_{q=0}^{n-k-1} A_{q+k+1} \cdot X_q(0), \qquad k = 0,1,\ldots(n-1)$$

$K_{q(n_q-r-k+1)} = 0$ dla $n_{q-r-k+1} \leq 0$, $q = 1,2,\ldots v$.

5. Przykłady

Znaleźć całkę r.r.

$$2x^{(7)} - 28x^{(5)} + 98x''' - 72x' = 10$$

spełniającą następujące warunki początkowe

$$x(0) = x'''(0) = x^{(5)}(0) = 0;\ x'(0) = x'''(0) = x^{(4)}(0) =$$
$$= x^{(6)}(0) = 1$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne

$$A(S) = 2S^7 - 28S^5 + 98S^3 - 72S = 0$$

posiada pierwiastki

$$S_1 = 1,\ S_2 = -1,\ S_3 = 2,\ S_4 = -2,\ S_5 = 3,\ S_6 = -3,\ S_7 = 0$$

Wzór zatem (4.4), gdzie

$F(\tau) = 10 = \mathrm{const}$

$n_q = 1,\ q = 1,2,\ldots 7;\ r = 1$

$A_7 = 2,\ A_5 = -28,\ A_3 = 98,\ A_1 = -72,\ A_6 = A_4 = A_2 = 0$

przyjmuje postać

$$x = \sum_{q=1}^{7} \int_0^t F(\tau) \cdot K_{11}\, e^{S_q(t-\tau)} d\tau + \sum_{q=1}^{7} K_{11} \cdot B(S_q)\, e^{S_q t}$$

gdzie

$$K_1 = \frac{1}{A'(S_q)}, \qquad q = 1,2,\ldots 7$$

Wobec tego

$$x = \sum_{q=1}^{7} \frac{e^{S_q t}}{A'(S_q)} \int_0^t F(\tau) e^{-S_q \tau} d\tau + \sum_{q=1}^{7} \frac{B(S_q)}{A'(S_q)} e^{S_q t}$$

Zgodnie z wzorami (4.4a) obliczamy

$$B_0 = \sum_{q=0}^{6} A_{q+1} x^{(q)}(0) = 72$$

$$B_1 = \sum_{q=0}^{5} A_{q+2} x^{(q)}(0) = 98$$

$$B_2 = \sum_{q=0}^{4} A_{q+3} x^{(q)}(0) = -26$$

$$B_3 = \sum_{q=0}^{3} A_{q+4} x^{(q)}(0) = -28$$

$$B_4 = \sum_{q=0}^{2} A_{q+5} x^{(q)}(0) = 2$$

$$B_5 = \sum_{q=0}^{1} A_{q+6} x^{(q)}(0) = 2$$

$$B_6 = \sum_{q=0}^{0} A_{q+7} x^{(q)}(0) = 0$$

Zatem

$$B(S) = 2S^5 + 2S^4 - 28S^3 - 26S^2 + 98S + 72$$

Obliczamy

$$A'(s) = 14s^6 - 56s^4 + 196s^2 - 72$$

$A'(s_1) = A'(s_2) = 96$, $A'(s_3) = A'(s_4) = -240$, $A'(s_5) = A'(s_6) =$
$= 1440$, $A'(s_7) = -72$, $B(s_1) = 120$, $B(s_2) = -24$, $B(s_3) =$
$= 36$, $B(s_4) = -36$, $B(s_5) = 24$, $B(s_6) = -24$, $B(s_7) = 72$

Podstawiając powyższe wartości do wzoru na x, otrzymujemy

$$x = \left(\frac{5}{48}e^t - \frac{5}{48}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{2t} + \frac{1}{48}e^{-2t} + \frac{1}{432}e^{3t} - \frac{1}{432}e^{-3t} - \frac{1}{72}t\right) + \left(\frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{20}e^{2t} + \frac{3}{20}e^{-2t} + \frac{1}{60}e^{3t} - \frac{1}{60}e^{-3t} - 1\right)$$

$$x = \frac{65}{48}e^t - \frac{17}{48}e^{-t} - \frac{41}{240}e^{2t} + \frac{41}{240}e^{-2t} + \frac{41}{2160}e^{-3t} - \frac{1}{72}t - 1$$

Przykład 5.2

Znaleźć całkę r.r.

$$x^{(6)} - 12x^{(5)} + 60x^{(4)} - 160x''' + 240x'' - 192x' + 64x = e^{2t}$$

spełniającą następujące warunki początkowe

$$x'(0) = x''(0) = 0, \quad x(0) = x'''(0) = -1, \quad x^{(4)}(0) = x^{(5)}(0) = 1$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne

$$A(S) = S^6 - 12S^5 + 60S^4 - 160S^3 + 240S^2 - 192S + 64 = 0$$

posiada jeden pierwiastek sześciokrotny

$$S_1 = 2$$

Wzór zatem (4.4) gdzie

$F(\tau) = e^{2\tau}$; $n_1 = 6$, $n_q = 0$ dla $q = 2,3,\ldots 6$

$A_6 = 1$, $A_5 = -12$, $A_4 = 60$, $A_3 = -160$, $A_2 = 240$,

$A_1 = -192$, $A_0 = 64$

przyjmuje postać

$$x = \sum_{r=1}^{6} e^{2t} \int_0^t \frac{K_{1(7-r)}}{(r-1)!} \cdot (t-\tau)^{r-1} d\tau +$$

$$+ \sum_{r=1}^{6} \sum_{k=0}^{6-r} \frac{K_{1(7-r-k)}}{(r-1)!\, k!} \cdot B^{(k)}(S_1)\, t^{r-1}\, e^{2t}$$

Wszystkie jednak stałe K_{1i} dla $i > 1$ są równe tutaj zeru, ponieważ pochodne $A^{(n_1+k)}(S_1)$ dla $k = 0,1,\ldots 5$, są równe zeru.

Wobec tego

$$x = \frac{1}{5!} e^{2t} \int_0^t K_{11} (t-\tau)^5 d\tau + K_{11} \sum_{k=0}^{5} \frac{B^{(k)}(S_1)}{(5-k)!k!} t^k e^{2t}$$

Obliczamy z wzorów (4.4a)

$$K_{11} = \frac{n_1!}{A^{(6)}(s_1)};$$

$$B(s) = -s^5 + 12s^4 - 60s^3 + 159s^2 - 227s + 121$$

$$B(s_1) = -17, \quad B'(s_1) = -7, \quad B''(s_1) = 14, \quad B'''(s_1) = -24,$$

$$B^{(4)}(s_1) = 48, \quad B^{(5)}(s_1) = -120.$$

Podstawiamy powyższe wartości do wzoru na x, otrzymując

$$x = \left(\frac{1}{720}t^6 - \frac{17}{120}t^5 - \frac{7}{24}t^4 + \frac{7}{6}t^3 - 2t^2 + 2t - 1\right)e^{2t}$$

Przykład 5.3

Znaleźć całkę r.r.

$$x^{(6)} - 9x^{(5)} + 33x^{(4)} - 63x''' + 66x'' - 36x' + 8x = 0$$

spełniającą następujące warunki początkowe

$$x(0) = x''(0) = x^{(5)}(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x'''(0) = -2,$$

$$x^{(4)}(0) = 3$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne

$$A(s) = s^6 - 9s^5 + 33s^4 - 63s^3 + 66s^2 - 36s + 8 = 0$$

posiada dwa pierwiastki

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 2$$

z których każdy jest potrójny.
Wzór zatem (4.4) gdzie

$F(\tau) \equiv 0, \quad n_1 = n_2 = 3, \quad v = 2$

$A_6 = 1, \quad A_5 = -9, \quad A_4 = 33, \quad A_3 = -63, \quad A_2 = 66, \quad A_1 = -36$

przyjmuje postać

$$x = \sum_{q=1}^{2} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{k=0}^{n_q-r} \frac{K_q(n_q-r-k+1)}{(r-1)!\, k!} \cdot B^{(k)}_{(S_q)} \cdot t^{r-1} \cdot e^{S_q t}$$

Z wzorów (4.4a) obliczamy

$B(S) = S^4 - 9S^3 + 31S^2 - 42S - 27$

$B(S_1) = -46, \quad B'(S_1) = -3, \quad B''(S_1) = 20, \quad B(S_2) = -43,$

$B'(S_2) = 6, \quad B''(S_2) = 2$

$A'''(S_1) = -6, \quad A^{(4)}(S_1) = 72, \quad A^5(S_1) = -360$

$A'''(S_2) = 6, \quad A^{(4)}(S_2) = 72, \quad A^{(5)}(S_2) = 360$

$$K_{11} = \frac{n_1!}{A'''(S_1)} = -1, \quad K_{12} = -K_{11} \frac{A^{(4)}(S_1)}{(n_1+1)!} K_{11} = -3,$$

$$K_{13} = -K_{11} \left[\frac{A^{(4)}(S_1)}{(n_1+1)!} K_{12} + \frac{A^{(5)}(S_1)}{(n_1+2)!} K_{11} \right] = -6$$

$$K_{21} = \frac{n_2!}{A'''(S_2)} = 1, \quad K_{22} = -K_{21}\,\frac{A^{(4)}(S_2)}{(n_2+1)!}\,K_{21} = -3,$$

$$K_{23} = -K_{21}\left[\frac{A^{(4)}(S_2)}{(n_2+1)!}\,K_{22} + \frac{A^{(5)}(S_2)}{(n_2+2)!}\,K_{21}\right] = 6$$

Powyższe wartości podstawiamy do wzoru na x, otrzymując

$$x = \left(-\frac{43}{2}t^2 + 135t - 275\right)e^{2t} + \left(23t^2 + 141t + 275\right)e^t$$

LITERATURA

[1] E.KAMKE - Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig 1944.

[2] W.W.STIEPANOW - Równania różniczkowe. Warszawa 1956. Wydanie polskie opracował i przypisami uzupełnił T.Ważewski.

[3] L.KIEPERT - Grundriss der Integral-Rechnung. Hannower 1920.

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕИНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Содержание

Исходя из классического метода, излагается в этои работе способ нахождения однородного и неоднородного интеграла дифференциального уравнения с постоянными коэфициентами, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Отличается этот способ от известного в литературе классического метода тем, что он не требует за каждим разом обсчитыванния, по заданным начальным условиям, постоянных.

ÜBER EINE GEWISSE ART DER LÖSUN VON LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT KONSTATEN KOEFFIZIENTEN

Zusammenfassung

Im Anschluss an die klassische Methode wurde die Art vom Herausfinden des Integrals der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, das im voraus die gegebenen Anfangswerte erfüllt, angegeben.

Die Art der Auflösung unterscheidet sich von der in der Literatur angegebenen klassischen Methode dadurch, dass die jedesmal hinzufügliche Bestimmung der Konstanten mit den angegebenen Anfangswerten nicht erforderlich ist.