

JÓZEF SZPILECKI

O PEWNEJ MODYFIKACJI WAHADŁA FIZYCZNEGO

Streszczenie. W pracy przedyskutowano metodę wyznaczenia długości zredukowanej dla specjalnego wahadła z ruchomym punktem zawieszenia. Graficzna metoda daje możliwość sprawdzenia poprawności założeń teoretycznych i pomiarów. W teoretycznej części przedyskutowano możliwe błędy metody. Dla porównania podano gromadę krzywych zależności okresów typowego wahadła rewersyjnego od położenia masy ruchomej oraz wytłumaczenie matematyczne ich zachowania się.

1. Wstęp

Jedną z głównych trudności, występujących przy pomiarze przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła fizycznego jest trudność wyznaczenia jego długości zredukowanej. Istnieje powszechnie znana konstrukcja wahadła, w której pomiar ten daje się wykonać prosto i dokładnie: jest to wahadło rewersyjne. Pomiar jest w "zasadzie" prosty, ponieważ główna trudność tego pomiaru polega na ustawieniu ruchomych mas wahadła w ten sposób, by otrzymać jednakowe okresy wahań przy zawieszeniu w dwu punktach A i B. Ponieważ uzyskanie tej równości metodą prób może niekiedy sprawiać trudności, szuka się równości okresów metodą graficzną, kreśląc dwie krzywe [1] zależności okresu $T_A = T_A(x)$, $T_B = T_B(x)$ od położenia x jednej z ruchomych mas wahadła. Punkty wspólne obu krzywych dają rozwiązanie problemu.

Jak wynika z przytoczonej serii pomiarów, wykonanych przez autora w r. 1943 w Katedrze Fizyki Politechniki Lwowskiej przy pomocy typowego wahadła rewersyjnego, przy różnych położeniach ciężarków ruchomych, istnieją tu trzy możliwości: albo są dwa przecięcia, albo jedno albo nie ma przecięcia wcale.

Prof. dr Tadeusz Malarski, opracowując teorię wahadła rewersyjnego zauważył, że w celu wyznaczenia długości zredukowanej wahadła fizycznego nie potrzebne są dwie krzywe zależności okresu od położenia masy, wystarczy zaś w zupełności jedna. W ten sposób metoda wyznaczenia długości zredukowanej wahadła fizycznego przy pomocy wahadła rewersyjnego nie jest jedyna. Przedmiotem niniejszego artykułu jest opisanie tej równie prostej metody oraz omówienie ewentualnych jej błędów.

Ponieważ teoria wymaga wahadła, w którym zmieniałaby się odległość osi zawieszenia od środka ciężkości, przy stałym momencie bezwładności wahadła, potrzebna jest do tego specjalna konstrukcja wahadła.

U [2] znajdujemy opis tego typu wahadła. Pręt wahadła posiada tu szereg otworów, pozwalających zmieniać punkt zawieszenia. Wada przyrzędu polega na tym, że przesuwanie osi odbywa się tam skokowo.

Aby mieć możliwość ciągłej regulacji położenia osi wahadła, zaproponowano prototyp wahadła, złożonego z pręta z dwu przesuwalnymi w sposób ciągły masami dodatkowymi i przesuwalnymi w sposób ciągły położeniami dwu punktów zawieszenia. Prototypy te wykonano w Zakładzie Optyki i Mechaniki Precyzyjnej Politechniki Śląskiej w dwu wariantach, oznaczonych niżej A i B. W pierwszym wszystkie części składowe z wyjątkiem śrub mocujących były wykonane w kształcie walca. Taka konstrukcja pozwalała wyznaczyć również teoretycznie wielkości charakterystyczne wahadła, których wyznaczenie sprawia przy innych kształtach wahadła zwykle duże trudności. Wariant B różnił się od poprzedniego kształtem mas przesuwalnych, które posiadały kształt graniastokąpa.

• Przy pomocy powyższych wahadeł prototypowych wykonano szereg pomiarów pod kierownictwem autora i mgr Z. Balówny. W celu zilustrowania artykułu wybrano z tego materiału najlepszą krzywą, wykreśloną na podstawie pomiarów studenta Edwarda Otto. Na tym samym rysunku podał również autor artykułu zasadę metody sprawdzenia poprawności krzywej. Materiał części drugiej stanowi uzupełnienie matematyczne rozważań części pierwszej. W szczególności przedyskutowano tam źródła błędów metody.

2. Metoda wyznaczania długości zredukowanej

2.1. Teoria

Możemy napisać w innej postaci wzór na okres wahadła fizycznego

$$T = 2\pi \sqrt{B/D} \quad (1)$$

gdzie

T - okres wahadła,

$B = B_0 + M R_S^2$ - moment bezwładności wahadła względem osi obrotu,

$D = M g R_S$ - moment kierujący wahadła,

B_0 - moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości, równoległej do osi obrotu,

M - masa wahadła,

R_S - odległość środka ciężkości od osi obrotu,

g - przyspieszenie ziemskie,

a mianowicie w postaci

$$T^2 = 4\pi^2 (B_0/M g R_S + R_S/g) \quad (2)$$

Jeżeli rozpatrujemy T^2 jako funkcję R_S widzimy, że posiada ona minimum.

Występuje ono dla

$$(R_{S \min}^2) = B_0/M \text{ i wynosi } T_{\min} = 2\pi \sqrt{(2/g) \sqrt{B_0/M}} \quad (3)$$

W rozumowaniu przyjmuje się, że wielkości B_0 , g , M są stałe. Warunek stałości B_0 nie daje się jednak zrealizować przy przesuwnej masie. Należy więc zastosować metodę zawieszonych przesuwnych. Zaproponowana w katedrze konstrukcja, wskutek konieczności umocowania wahadła na pierścieniu metalowym przesuwalnym, wprowadza pewną małą zmianę B_0 . Oczywiście jest rzeczą konstruktora tak dobrać masy, by błąd ten był jak najmniejszy.

Z równania (2) otrzymujemy następujące oczywiste związki między rozwiązaniami równania ze względu na R_s przy T jako parametrze

$$R_{s,1} + R_{s,2} = T^2 g/4\pi^2 \quad (4)$$

$$R_{s,1} \cdot R_{s,2} = B_0/M$$

Z pierwszego wzoru wynika, że lewa strona pierwszego równania przedstawia długość zredukowaną wahadła, przynależną do okresu T . Długość ta zmienia się oczywiście z okresem T . Rozwiązania równania (2) na R_s są rzeczywiste i różne, jeżeli spełniona jest nierówność

$$(gT^2/4\pi^2)^2 > 4 B_0/M \quad (5)$$

więc jeżeli jest

$$T > T_{\min} \quad (6)$$

którą to wartość wyliczamy z równania (3).

2.2. Sposób wykonania pomiaru i wykres

Przy wszystkich częściach składowych wahadła, umocowanych na stałe, zmieniano jedynie położenie osi zawieszenia wahadła, mierząc każdorazowo okres.

Tabela 1 przedstawia taką serię wyników pomiarów.

Tabela 1

Wyniki pomiarów dla wahadła A

R_s cm	T sec	T^2 sec ²	R_s cm	T sec	T^2 sec ²
95,5	2,175	4,71	50,5	1,92	3,68
90,5	2,15	4,52	45,5	1,885	3,55
85,5	2,105	4,41	40,5	1,91	3,64
80,5	2,065	4,24	37,0	1,92	3,68
75,5	2,04	4,16	24,0	2,065	4,24
70,5	2,01	4,04	20,0	2,16	4,66
65,5	1,985	3,93	15,0	2,355	5,52
60,5	1,955	3,80	10,0	2,77	7,67
55,5	1,94	3,76	5,0	3,625	13,10

Tabela 2

Obliczenie przyspieszenia ziemskiego
na podstawie wybranych pomiarów

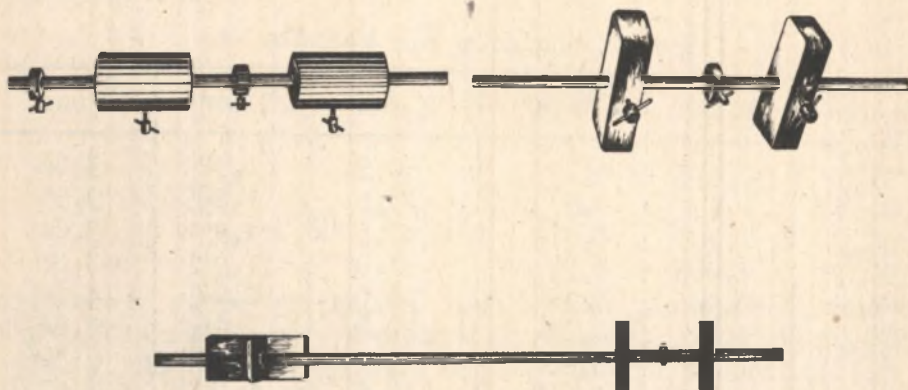
T^2 sec ²	R'_s cm	R''_s cm	g cm/sec ²	średnie g cm/sec ²
4,70	19,7	95,5	983,8	980
4,24	24,0	80,5	976,7	
4,04	28,0	70,5	976,8	
4,80	33,0	60,5	975,4	
3,68	39,5	50,5	985,6	

Tabela 3

Dane konstrukcyjne dotyczące wahadeł

A. Wahadło cylindryczne żelazne (rys.1)

Element	Długość mm	Średnica zewn.	Średnica wewn.	Masa g
		mm		
Pręt	1552	12		1350
Pierścień przesuwny	12	30	12	65
Masa przesuwna	80	55	12	1420



Rys.1. Ogólny widok wahadła B. Szczegóły konstrukcyjne waha-
dek A i B. Rysunek obrócone o kąt 90°

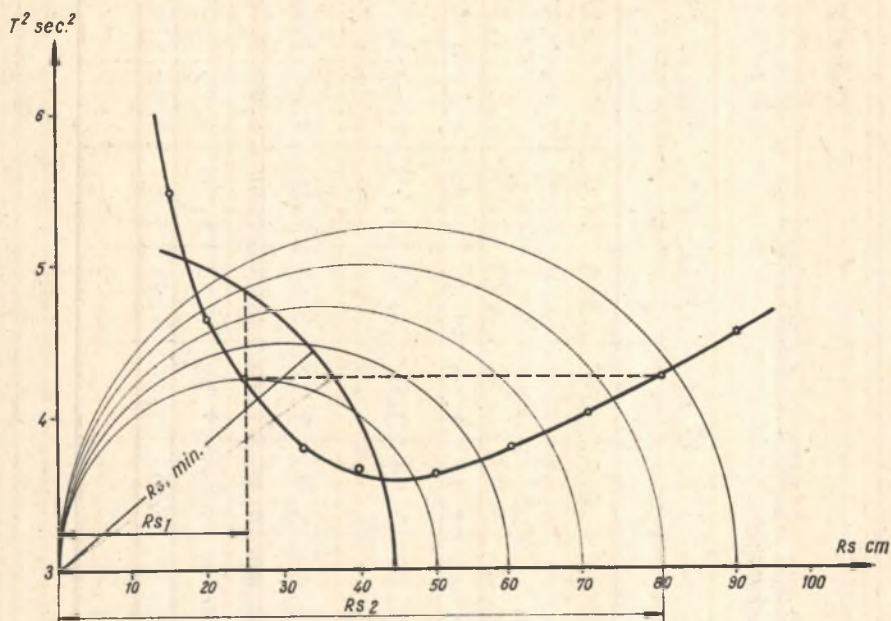
B. Żelazne wahadko cylindryczne z masami przesuwnymi w
kształcie graniastosłupa (rys.1)

Element	Długość mm	Średnica mm	Szerokość mm	Grubość mm	Masa g
Pręt	1489	15			2070
Pierścień przesuwny	9	15 41			85
Masa prze- suwna	60		142,5	30	1800

2.3. Uwagi dotyczące wykresu (rys.2)

Na rysunku 2 widzimy poza krzywą zależności T^2 od R_s jeszcze szereg okręgów. Zostały one wrysowane dla sprawdzenia poprawności założeń, dotyczących poprzedniego wyprowadzenia oraz poprawności pomiarów. Metoda pozwala również wyznaczyć wielkość $R_{s,\min}$.

Oczywiście wyniki są poprawne, jeżeli ta ostatnia wartość jest stała, czyli na rysunku koniec odpowiedniego wektora leży na okręgu. Poszczególne punkty tego okręgu wyznaczamy następująco: Do danej wartości T wyznaczamy obie



Rys.2. Krzywa zależności T^2 od R_s i metoda sprawdzenia jej dokładności

wartości R_{s1} i R_{s2} prowadząc kreskowaną prostą równoległą do osi R_{s2} . Kreślimy okrąg o średnicy R_{s2} , następnie zaś w odległości R_{s1} prostą równoległą do osi T^2 do przecięcia z okręgiem. Metoda oparta jest na jednej z konstrukcji średniej geometrycznej.

2.4. Uwagi dotyczące typowego wahadła rewersyjnego

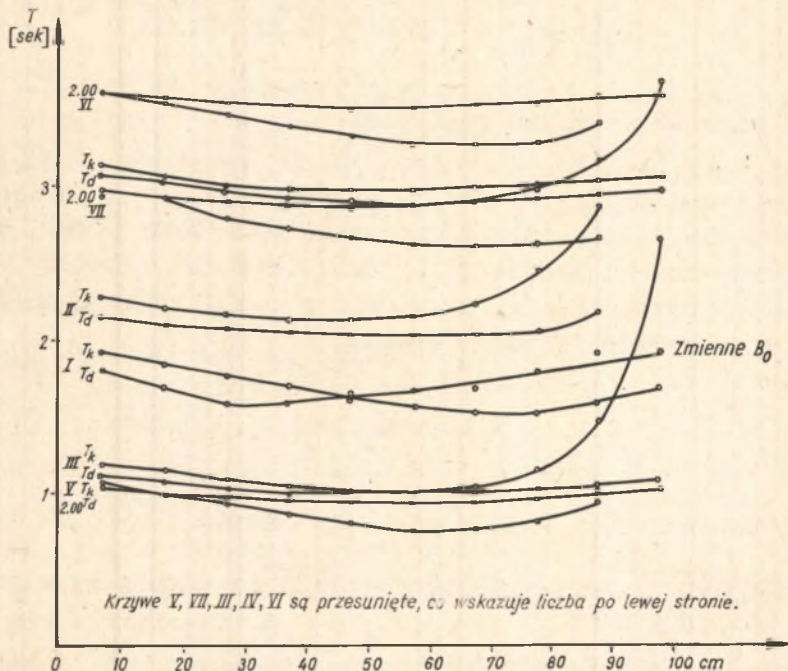
Aby rozstrzygnąć problem czy możliwe jest zawsze znalezienie długości zredukowanej wahadła rewersyjnego, co jak wiadomo, wymaga takiego ustawienia mas, by okresy wahań zmierzony przy dwu punktach zawieszenia były równe, autor wykonał pod koniec wojny (1943) w Katedrze Fizyki Politechniki Lwowskiej serię pomiarów, z której wynika, że możliwe są takie ustawienia mas ruchomych, gdy występują dwa przecięcia krzywych zależności okresu, odnoszącego się do pojedynczego punktu zawieszenia, od położenia ruchomej masy, ale jest też możliwy tylko jeden taki punkt i wreszcie przy pewnym ustawieniu mas krzywe nie przecinają się wcale, wskutek cze-

Tabela 4

Pomiary zależności okresów wahań typowego wahadła rewersyjnego
od położenia mas ruchomych

m_1	135,35 cm	130,35 cm	125,35 cm	120,35 cm	115,35 cm	110,35 cm	105,35 cm								
m_2	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	T_k sec	T_d sec	
7,35 cm	1,80	1,91	2,14	2,28	2,11	2,17	2,07	2,12	2,03	2,06	2,00	2,00	1,95	1,96	
17,35	1,69	1,83	2,10	2,20	2,07	2,13	2,04	2,05	1,99	1,98	1,96	1,93	1,92	1,92	
27,35	1,59	1,76	2,07	2,16	2,03	2,08	2,00	1,97	1,97	1,93	1,93	1,85	1,89	1,90	
37,35	1,59	1,69	2,05	2,13	2,02	2,03	1,98	1,93	1,94	1,86	1,92	1,78	1,88	1,73	
47,35	1,64	1,62	2,04	2,13	2,01	2,01	1,98	1,90	1,94	1,80	1,90	1,73	1,87	1,67	
57,35	1,69	1,57	2,04	2,15	2,01	2,00	1,98	1,88	1,94	1,77	1,91	1,68	1,88	1,62	
67,35	1,69	1,53	2,05	2,24	2,02	2,05	1,99	1,89	1,96	1,77	1,93	1,68	1,90	1,60	
77,35	1,80	1,53	2,06	2,44	2,04	2,17	2,01	1,98	1,98	1,82	1,94	1,70	1,91	1,61	
87,35	1,92	1,59	2,18	2,87	2,06	2,47	2,04	2,17	2,01	1,96	1,97	1,81	1,95	1,67	
97,35	1,92	1,68	-	-	2,09	3,66	2,06	2,70	2,04	-	2,00	-	1,98	-	

go zagadnienie wyznaczenia długości zredukowanej wahadła nie jest rozwiązalne. Wyniki te ilustrują rozważania teoretyczne części drugiej. W tabeli 4 i na rysunku 3 podane są wyniki pomiarów, w tabeli 5 podane dane dotyczące wahadła.



Rys.3. Zależność okresów typowego wahadła rewersyjnego od położenia ruchomych mas

Tabela 5

Dane konstrukcyjne, dotyczące wahadła rewersyjnego

Element	Długość cm	Położenia pryzmatów względem końców pręta cm	Masa g
Pręt	139,7		926,2
Pryzmat I		10	
Pryzmat II		30,3	
Masa I			1073,2
Masa II			1086,2

W tabeli 4 oznaczono położenie górnej masy m_1 , położenie dolnej masy m_2 . T_k odnosi się do pryzmatu I.

3. Obliczenia niektórych wielkości

3.1. Oszacowanie wpływu masy przesuwnego zawieszenia na położenie środka ciężkości

Jeżeli masę wahadła oznaczymy przez M , położenie środka ciężkości względem jednego z końców pręta przez a i podobne wielkości dla pierścienia zawieszenia oznaczymy przez M_5 i a_5 , wtedy zmiana położenia środka ciężkości wahadła Δa spowodowana przesunięciem masy M_5 o Δa_5 , wyznaczona jest przy pomocy następującego równania

$$M \Delta a = M_5 \Delta a_5 \quad (7)$$

W przypadku wahadeł A i B stosunek $\Delta a / \Delta a_5$ wynosił 1,5%.

3.2. Wpływ przesunięcia zawieszenia na moment bezwładności wahadła

Położenie środków ciężkości poszczególnych części wahadła oznaczamy przez a_i , $i = 1, \dots, 5$, ich masy przez M_i , ich momenty bezwładności względem osi przez własne środki ciężkości przez B_i .

Masę całkowitą oznaczamy przez M , położenie jej środka ciężkości przez a , moment bezwładności odniesiony do środka ciężkości a , bez uwzględnienia przesunięcia wynosi

$$B = \sum_{i=1}^5 B_i + \sum_{i=1}^5 M_i (a_i - a)^2 \quad (8)$$

Jeżeli masę M_5 (zawieszenie wahadła) przesuniemy o Δa_5 , zmieni to na podstawie relacji (7) położenie środka ciężkości wahadła o Δa . Zmieniony moment bezwładności po pewnych przekształceniach wynosi

$$B + \Delta B = B + 2M_5 \Delta a_5 (a_5 - a) + (\Delta a_5)^2 M_5 \quad (9)$$

Przyrost ΔB zeruje się dla $\Delta a_5 = 0$ oraz $\Delta a_5 = 2(a - a_5)$, ekstremum odpowiada wartości $\Delta a_5 = a - a_5$. Ponieważ wielkość $a - a_5$ jest wielkością wyjściową w obliczeniu, przez odpowiedni jej dobór możemy wpływać na przyrost ΔB .

3.3. Uwzględnienie poprawki (9) we wzorze (2)

Oznaczamy

$$R_s = a + \Delta a - a_5^2 - \Delta a_5^2 = R'_s + \Delta a_5 (M_5 - M) / M \quad (10)$$

przy czym

a_5' - położenie osi zawieszenia, przesunięte względem środka ciężkości a_5 o h . Zmiany tej wielkości oznaczono przez $\Delta a_5'$,

$R'_s = a - a_5' + h$ - stała składowa, zależna od położenia początkowego.

Obliczając z równania (10) Δa_5 i podstawiając do równania (2), w którym w miejsce B_0 podstawiono $B + \Delta B$, otrzymujemy po przekształceniach

$$R_{s1} + R_{s2} = \left[1 + (M_5/M)(M_5/(M_5 - M))^2 \right]^{-1} \left[gT^2/4\pi^2 + \right. \\ \left. + 2M_5 (a_5 - a)/(M_5 - M) + (M_5/M)(M_5/(M_5 - M))^2 2 R'_s \right] \quad (11)$$

$$R_{s1} R_{s2} = (B_0/M) \left[1 + (M_5/M)(M_5/(M_5 - M))^2 \right]^{-1}$$

przy czym

$$B_0 = B - 2 M_5 M (a_5 - a) R'_s / (M_5 - M) + M_5 (M/(M_5 - M))^2 R_s^2$$

Zmieniona długość zredukowana wynosi

$$\left[1 + (M_5/M)(M_5/(M_5-M))^2 \right]^{-1} \left[R_{s1} + R_{s2} + \right. \\ \left. + 2M_5 (a_5 - a)/(M_5 - M) - (M_5/M)(M/(M_5 - M))^2 \cdot 2 R'_s \right] \quad (12)$$

Jest rzeczą widoczną, że w przypadku $M_5/M \rightarrow 0$, wyrażenia (11) i (12) przechodzą wyraźnie w (4).

3.4. Równanie na wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia krzywych okresów $T_A = T_A(x)$ oraz $T_B = T_B(x)$ (zmienny moment bezwładności)

W tym przypadku zmienne jest położenie a_4 jednej z mas ruchomych M_4 , położenie punktów zawieszenia jest niezmienne. Zmiana położenia masy M_4 wywołuje przesuwania się środka ciężkości wahadła a .

Oznaczając długość zredukowaną wahadła przez l oraz

$$B_0 = B - 2(a_4 - a) M R'_s + (M^2/M_4)(R'_s)^2 \quad (13)$$

$$R_s = a - a_5' + \Delta a = R'_s + (M_4/M) \Delta a_4$$

$$R'_s = a - a_5'$$

otrzymujemy z warunku równości okresów wahadła rewersyjnego

$$B_0 + \Delta B = M R_s (1 - R_s) \quad (14)$$

równanie na wyznaczenie punktów wspólnych krzywych okresów

$$T_A = T_A(s) \quad \text{oraz} \quad T_B = T_B(x)$$

$$\left((M+M_4)/M_4 \right) R_s^2 + R_s \left[2(a_4 - a) - 1 \right] + B_0/M = 0 \quad (15)$$

Z jego postaci wynika możliwość istnienia dwu, jednego lub żadnego pierwiastka rzeczywistego na R_s . Wpływamy na to caeteris paribus wielkością a_4 -a.

4. Uwaga końcowa

Opublikowanie niniejszej notatki wydawało się celowe, ponieważ autor przeglądając odnośną literaturę [3-6] aż do najnowszej włącznie nie znalazł żadnej wzmianki o próbach tego rodzaju.

LITERATURA

- [1] M.GROTOWSKI - Wykłady fizyki t.I, Zakł. im. Ossolińskich Lwów 1937, str.133.
- [2] A.SCHUSTER i H.LEES - Ćwiczenia praktyczne z fizyki, Warszawa 1923, str.137.
- [3] M.HALAUMBRENNER - Ćwiczenia praktyczne z fizyki, Kurs średni, PWZS, W-wa 1960.
- [4] W.I.IWERONOWA - Fiziczeskij praktikum, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1951.
- [5] Ju.M.POPKO, L.A.KNIAZIEWICZ - Rukowodstwo k praktikumu po fizike, Gos. Ucz. Ped. Izd. Moskwa 1959.
- [6] A.ZAWADZKI, H.HOFMOKL - Laboratorium fizyczne, PWN: W-wa 1961.

О НЕКОТОРОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

С о д е р ж а н и е

В работе рассматривается метод получения приведённой длины физического маятника с подвижным подвесом.

Графический метод дает возможность контролировать правильность оснований метода и измерений.

В теоретической части работы рассматриваются возможные ошибки метода.

Для сравнения дана тоже фамилия кривых зависимости периода типического поворотного маятника от место положения подвижной массы и математическое объяснения их поведения.

SOME MODIFICATIOIS OF THE PHYSICAL PENDULUM

S u m m a r y

In the paper a method of determining the reduced length is discussed that is given for a special pendulum with a movable hang point.

With the use of the graphical method it is possible to control the correctness of the foundations of the method and the measurements.

In the theoretical part of the paper the possible errors of the method are discuted.

For comparison a set of curves is given, showing the dependence of the periods of the typical reversible pendulum on the position of the mobile mass, as well as the mathematical explanation of their behaviour.