ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 74 Matematyka - Fizyka z.2 1963

JÓZEF WĄSOWSKI

WYZNACZANIE WARTOŚCI POCZĄTKOWYCH POCHODNYCH CAŁEK UKŁADÓW LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Podano sposób wyznaczenia wartości początkowych pochodnych całek układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Sposób ten różni się od metody klasycznej tym, że w celu znalezienia wartości początkowych pochodnych jednej szukanej funkcji nie trzeba wyznaczać wartości początkowych pochodnych pozostałych niewiadomych funkcji.

1. Wyznaczanie wartości początkowych szukanych całek układu r.r. liniowych w przypadku zerowych wartości początkowych

Niech będzie dany układ r.r.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} x'_k + b_{ik}) = f_i \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{1.1}$$

gdzie $f_i \equiv f_i(t)$, $i = 1,2,\ldots n$, są dowolnymi funkcjami ciągłymi posiadającymi pochodne ciągłe dostatecznie dużych rzędów w przedziale I, zawierającym punkt zero; $x_i \equiv x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots n$, są szukanymi całkami; a_{ik} i b_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots n$, są stałymi współczynnikami.

O układzie (1.1) zakładamy, że wyznacznik

$$|a_{ik}| \neq 0 \tag{1.2}$$

Sprowadzając układ r.r. (1.1) do r.r. odpowiednio wyższych rzędów [1], otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)} \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{1.3}$$

gdzie stałe A_k, $k = 1,2,\ldots n$, oraz B_{ijk}, $i,j = 1,2,\ldots n$, $k = 0,1,\ldots(n-1)$, są całkowitymi funkcjami stałych a_{ik} oraz b_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots n$, przy czym warunek (1.2), ($|a_{ik}| = A_n$) gwarantuje, że równania (1.3) są jedynymi które są spełnione przez każdą funkcję x_i, $i = 1,2,\ldots n$, spełniającą układ r.r. (1.1).

Przyjmijmy dla układu (1.1) wartości początkowe

$$x_i(0) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{1.4}$$

Odnośnie wartości $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,2,\ldots$ udowodnimy następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 1

Wartości $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,2,\ldots$ rozwiązań układu (1.1) o warunkach początkowych (1.4), a zatem i rozwiązań r.r. (1.3), wyrażają się wzorami

$$x_i^{(p)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{p} Q_{ijq}\, f_j^{(p-q)}(0), \qquad i = 1, 2,\ldots n,$$

$$p = 0,1,2,\ldots \tag{1.5}$$

gdzie

$$Q_{ijo} = 0 \tag{1.5a}$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[B_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk}\, A_{(n-q+k)}\right] \tag{1.5b}$$

$$i,j = 1,2,\ldots n, \quad q = 1,2,\ldots$$

przy czym $x_i^{(o)}(0) = x_i(0)$, $i = 1,2,\ldots n$; $A_{(v+k)} = 0$ dla $v+k \neq 0,1,2,\ldots n$, oraz $B_{ijv} = 0$ dla $v \neq 0,1,\ldots(n-1)$.

D o w ó d

Całkując n-razy układ r.r. (1.1) w granicach od 0 do t i biorąc pod uwagę warunki początkowe (1.4), otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\int_0^t x_k\, dt^{n-1} + b_{ik}\int_0^t x_k\, dt^n\right) = \int_0^t f_i\, dt^n; \quad i=1,2,\ldots n \tag{1.6}$$

gdzie $\int_0^t f_i\, dt^q = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{q-1}} f(\tau_q)d\tau_q$ i analogicznie jeśli chodzi o $\int_0^t x_i\, dt^q$, $i,q = 1,2,\ldots n$.

Wprowadzając nowe funkcje

$$v_i = \int_0^t x_i\, dt^n \; ; \quad F_i = \int_0^t f_i\, dt^n \tag{1.7}$$

gdzie

$$v_i^{(k)}(0) = 0; \; F_i^{(k)}(0) = 0; \; i = 1,2,\ldots n, \; k = 0,1,\ldots(n-1) \tag{1.7a}$$

przy czym $v_i^{(o)}(0) = V_i(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, możemy napisać (1.6) w postaci

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\, v_k' + b_{ik}\, v_k) = F_i; \; i = 1,2,\ldots n \tag{1.8}$$

Sprowadzając układ (1.8) do r.r. wyższych rzędów [1], otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k\, v_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} \cdot F_j^{(k)}; \; i = 1,2,\ldots n \tag{1.9}$$

Tutaj współczynniki A_i i B_{ijk}, $i = 1,2,\ldots n$, są tymi samymi, które występują w (1.3), ponieważ nie zależą one wcale od funkcji występującej po prawej stronie (1.8), a

tylko od współczynników a_{ik} i b_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots n$, które są takie same w (1.8) jak i w (1.1).

Podstawiając do (1.9) z powrotem funkcje v_i oraz F_i, $i = 1,2,\ldots n$, ze wzoru (1.7), oraz kolejne ich pochodne, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^t x_i \, dt^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} \int_0^t f_j \, dt^{n-k}, \quad i = 1,2,\ldots n \tag{1.10}$$

gdzie

$$\left(A_k \int_0^t x_i \, dt^{n-k}\right)_{k=n} = A_n \, x_i; \quad i = 1,2,\ldots n$$

Różniczkując (1.10) kolejno 1,2,... razy, otrzymujemy

$$\sum_{k=n-1}^{n} A_k X_i^{(k-n+1)} + \sum_{k=0}^{n-2} A_k \int_0^t X_i \, dt^{n-k-1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-1}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-n+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-2} B_{ijk} \int_0^t f_j \, dt^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=n-2}^{n} A_k X_i^{(k-n+2)} + \sum_{k=0}^{n-3} A_k \int_0^t X_i \, dt^{n-k-2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-2}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-n+2)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-3} B_{ijk} \int_0^t f_j \, dt^{n-k-2}$$

.....

$$\sum_{k=2}^{n} A_k X_i^{(k-2)} + \sum_{k=0}^{1} A_k \int_0^t X_i \, dt^{2-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-2)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} B_{ijk} \int_0^t f_j \, dt^{2-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X_i^{(k-1)} + \sum_{k=0}^{0} A_k \int_0^t X_i \, dt^{1-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{0} B_{ijk} \int_0^t f_j \, dt^{1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k+1)}$$

.....

.....

$$i = 1,2,\ldots n$$

Stąd, zakładając $t = 0$, otrzymujemy

$$\sum_{k=n-1}^{n} A_k X_i^{(k-n+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-1}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-n+1)}(0)$$

$$\sum_{k=n-2}^{n} A_k X_i^{(k-n+2)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-2}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-n+2)}(0)$$

.....

$$\sum_{k=2}^{n} A_k X_i^{(k-2)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-2)}(0)$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X_i^{(k-1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k-1)}(0) \qquad (1.11)$$

$$i = 1,2,\ldots n$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)}(0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k+1)}(0)$$

.....

.....

Rozwiązując powyższy układ równań (1.11) przez kolejne podstawianie i uwzględniając (1.4), otrzymujemy (1.5), (1.5a) i (1.5b), c.b.d.d.

2. Wyznaczanie wartości początkowych szukanych całek układu r.r. w przypadku wartości początkowych różnych od zera

Niech będzie dany układ r.r.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} X_k' + b_{ik} X_k) = 0; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.1}$$

gdzie a_{ik}, b_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots n$, oraz $X_i \equiv X_i(t)$, $i = 1,2,\ldots n$, jak w układzie r.r. (1.1) i gdzie zakładamy, że

$$|a_{ik}| \neq 0 \tag{2.2}$$

Po sprowadzeniu układu (2.1) do r.r. wyższych rzędów, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)} = 0; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.3}$$

gdzie stałe A_k; $k = 1,2,\ldots n$, jak w układzie (1.3), a warunek (2.2), $(|a_{ik}| = A_n)$ gwarantuje, że równania (2.3) są jedynymi, które są spełnione przez każdą funkcję x_i; $i = 1,2,\ldots n$, spełniającą układ (2.1).

Przyjmijmy dla układu (2.1) wartości początkowe

$$x_i(0) = x_{oi}; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.4}$$

Rozpatrzmy z kolei układ r.r.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} x_k' + b_{ik} x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \varphi_k'; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.5}$$

gdzie a_{ik} i b_{ik}; $i,k = 1,2,\ldots n$, są tymi samymi stałymi współczynnikami, które występują w (2.1) a $\varphi_k \equiv \varphi_k(t)$; $k = 1,2,\ldots n$, są funkcjami różniczkowalnymi dostateczną ilość razy w przedziale I.

Dla układu r.r. (2.5) przyjmujemy te same warunki początkowe (2.4) co dla układu r.r. (2.1).

Układ r.r. (2.5) tworzymy w następujący sposób.

Przecałkujmy układ r.r. (2.1) w granicach od 0 do t. Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\, x_k + b_{ik}\int_0^t x_k(\tau)d\tau\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(0); \quad i = 1,2,\ldots n$$

Utwórzmy teraz nowy układ równań

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\, x_k + b_{ik}\int_0^t x_k(\tau)d\tau\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \psi_k; \qquad i = 1,2,\ldots n$$

Różniczkując powyższy układ równań, otrzymujemy (2.5).

Sprowadźmy obecnie układ r.r.(2.5) do r.r, wyższych rzędów [1].

Dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\, \psi_j^{(k)}; \qquad i = 1,2,\ldots n \qquad (2.6)$$

Tutaj współczynniki A_k, $k = 0,1,\ldots n$, są tymi samymi, które występują w (2.3), a współczynniki stałe C_{ijk}; $i,j = 1,2,\ldots n$, $k = 0,1,\ldots n$, są całkowitymi funkcjami stałych a_{ik} i b_{ik}; $i,k = 1,2,\ldots n$, przy czym obowiązuje tu również warunek (2.2), ($|a_{ik}| = A_n$).

Dla układu r.r. (2.5) przyjmujemy warunki początkowe (2.4).

Odnośnie wartości początkowych $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,\ldots$ udowodnimy następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 2

Wartości $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,2,\ldots$ rozwiązań układu (2.1) o warunkach początkowych (2.4), a zatem i rozwiązań równań (2.3), wyrażają się wzorami [2]

$$x_i^{(p)}(0) = \sum_{j=1}^{n} Q_{ijp}\, x_{oj}; \quad i = 1,2,\ldots n; \quad p = 0,1,2,\ldots \tag{2.7}$$

gdzie

$$Q_{ijo} = \frac{C_{ijn}}{A_n}; \quad C_{ijn} = A_n \text{ gdy } i = j = 1,2,\ldots n \qquad C_{ijn} = 0 \text{ gdy } i \neq j = 1,2,\ldots n \tag{2.7a}$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[C_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk} \cdot A_{n-q+k}\right] \tag{2.7b}$$

$i,j = 1,2,\ldots n;$ $\quad q = 1,2,\ldots$

przy czym $x_i^{(o)}(0) \equiv x_i(0)$, $i = 1,2,\ldots n$; $A_{(v+k)} = 0$ dla $(v+k) = 0,1,\ldots n$, oraz $C_{ijv} = 0$ dla $v = 0,1,\ldots(n-1)$.

D o w ó d

Oznaczając krótko

$$\int_0^t x_i(t)dt^q \overset{df}{=} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int^{\tau_{q-1}} x_i(\tau_q)d\tau_q; \quad q,i = 1,2,\ldots n$$

przecałkujemy układ r.r. (2.5), uwzględniając (2.4). Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\int_0^t x_k(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left[\varphi_k(t) - \varphi_k(0) + x_{ok}\right];$$

$$i = 1,2,\ldots n$$

Oznaczając

$$\Phi_j(t) = \psi_j(t) - \psi_j(0) + x_{oj}; \quad j = 1,2,\ldots n \tag{2.8}$$

napiszemy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\int_0^t x_k(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \Phi_k(t) \tag{2.9}$$

Całkując powyższy układ równań jeszcze (n-1) razy, tzn. układ r.r. (2.5) n-razy, w granicach od 0 do t, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\int_0^t x_k(t)dt^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\int_0^t x_k(t)dt^{n} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\int_0^t \Phi_k(t)dt^{n-1};$$

$$i = 1,2,\ldots n \tag{2.10}$$

Wprowadzając nowe funkcje

$$v_i(t) = \int_0^t x_i(t)dt^n; \quad F_j(t) = \int_0^t \Phi_j(t)dt^n; \quad i,j = 1,2,\ldots n \tag{2.11}$$

gdzie

$$v_i^{(k)}(0) = 0; \quad F_j^{(k)}(0) = 0; \quad i,j = 1,2,\ldots n;$$

$$k = 0,1,\ldots(n-1) \tag{2.11a}$$

oraz $v_i^{(o)}(0) = v_i(0)$, $F_j^{(o)}(0) = F_j(0)$ możemy napisać (2.10) w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, v_k'(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, v_k(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, F_k'(t), \quad i=1,2,\ldots n \tag{2.12}$$

Sprowadzając układ r.r. (2.12) do r.r. wyższych rzędów [1], otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \, v_i^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} \, F_j^{(k)}; \quad i = 1,2,\ldots n \qquad (2.13)$$

gdzie A_k; $k = 0,1,\ldots n$; C_{ijk}; $i,j,k = 1,2,\ldots n$, są tymi samymi współczynnikami, które występują w (2.6), ponieważ nie zależą one wcale od funkcji występującej po prawej stronie (2.5), a tylko od współczynników a_{ik} i b_{ik}; $i,k = 1,2,\ldots n$, które są takie same w (2.12) jak i w (2.5).

Podstawiając do (2.13) z powrotem funkcje $v_i(t)$ oraz $F_j(t)$ $i,j = 1,2,\ldots n$, z wzoru (2.11), oraz kolejne ich pochodne, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^t x_i(t)dt^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} \int_0^t \Phi_j(t)dt^{n-k}; \quad i = 1,2,\ldots n \qquad (2.14)$$

gdzie

$$\left(\int_0^t x_i(t)dt^{n-k}\right)_{k=n} \equiv x_i(t); \quad \left(\int_0^t \Phi_j(t)dt^{n-k}\right)_{k=n} \equiv \Phi_j(t);$$

$$i,j = 1,2,\ldots n$$

Przepisując (2.14) i różniczkując kolejno 1,2,...-razy, dostajemy

$$\sum_{k=n}^{n} A_k X_i^{(k-n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \int_0^t X_i dt^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-n)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{ijk} \int_0^t \Phi_j \, dt^{n-k}$$

$$\sum_{k=n-1}^{n} A_k X_i^{(k-n+1)} + \sum_{k=0}^{n-2} A_k \int_0^t X_i \, dt^{n-k-1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-1}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-n+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_{ijk} \int_0^t \Phi_j \, dt^{n-k-1}$$

.....

$$\sum_{k=2}^{n} A_k X_i^{(k-2)} + \sum_{k=0}^{1} A_k \int_0^t X_i \, dt^{2-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-2)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} C_{ijk} \int_0^t \Phi_j \, dt^{2-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X_i^{(k-1)} + \sum_{k=0}^{0} A_k \int_0^t X_i \, dt^{1-k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{0} C_{ijk} \int_0^t \Phi_j \, dt^{1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k+1)}$$

.....

.....

$$i = 1, 2, \ldots n$$

Stąd, zakładając $t = 0$

$$\sum_{k=n}^{n} A_k X_i^{(k-n)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-n)}(0)$$

$$\sum_{k=n-1}^{n} A_k X_i^{(k-n+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-1}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-n+1)}(0)$$

.....

$$\sum_{k=2}^{n} A_k X_i^{(k-2)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-2)}(0)$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X_i^{(k-1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k-1)}(0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k)}(0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{ijk} \Phi_j^{(k+1)}(0)$$

.....

.....

$i = 1,2,\ldots n$

Wprowadzając tutaj z powrotem wartości funkcji $\Phi_j(t)$, $j = 1,2,\ldots n$, i jej pochodnych ze wzoru (2.8), dla $t = 0$, dostajemy

$$\sum_{k=n}^{n} A_k X_i^{(k-n)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ijn} X_{oj}$$

$$\sum_{k=n-1}^{n} A_k X_i^{(k-n+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij(n-1)} X_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k-n+1)}(0)$$

$$\sum_{k=n-2}^{n} A_k X_i^{(k-n+2)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij(n-2)} X_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-1}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k-n+2)}(0)$$

.....

$$\sum_{k=2}^{n} A_k X_i^{(k-2)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij2} X_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=3}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k-2)}(0)$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X_i^{(k-1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij1} X_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k-1)}(0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X_i^{(k)}(0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ijo} X_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k)}(0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k X^{(k+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{ijk} \varphi_j^{(k+1)}(0)$$

.....

.....

$$i = 1,2,\ldots n$$

Stąd, po rozwiązaniu przez kolejne podstawianie

$$X_i(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{ijn}}{A_n} X_{oj}$$

$$X_i^{(p)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{p-1} Q_{ijq} \psi_j^{(p-q)}(0) + \sum_{j=1}^{n} Q_{ijp} X_{oj} \qquad (2.15)$$

$$i = 1,2,\ldots n; \qquad p = 1,2,\ldots$$

Tutaj

$$Q_{ijo} = \frac{C_{ijn}}{A_n}$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[C_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk} \cdot A_{n-q+k}\right] \qquad (2.15a)$$

$$i,j = 1,2,\ldots n; \qquad q = 1,2,\ldots$$

Napiszmy $X_i(0)$ z (2.15) w postaci

$$(C_{iin} - A_n) X_{oi} + \sum_{j \neq i}^{n} C_{ijn} X_{oj} = 0; \qquad i = 1,2,\ldots n$$

Powyższe związki muszą być spełnione przez dowolnie przyjęte wartości na x_{oi}; $i = 1,2,\ldots n$. Wobec tego stąd wynika, że

$$\begin{aligned} C_{ijn} &= A_n \quad \text{gdy} \quad i = j = 1,2,\ldots n \\ C_{ijn} &= 0 \quad \text{gdy} \quad i \neq j = 1,2,\ldots n \end{aligned} \tag{2.16a}$$

Wzory (2.15) łącznie z wzorami (2.15a) i (2.16a) określają wartości początkowe $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$; $p = 0,1,2,\ldots$ i odnoszą się do r.r. (2.6), a zatem i do układu (2.5).

Aby znaleźć wartości początkowe $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,2,\ldots$ całek r.r. (2.3), a zatem i całek r.r. (2.1), wystarczy w (2.5), (2.6) oraz (2.15), założyć

$$\varphi_j(t) \equiv X_{oj} = \text{const}; \qquad j = 1,2,\ldots n \tag{2.17}$$

Ponieważ założyliśmy, że $\varphi_j(t)$; $j = 1,2,\ldots n$, jest funkcją stałą równą wartości początkowej x_{oj}; $j = 1,2,\ldots n$, zatem jej pochodne wynoszą

$$\varphi_j^{(p)}(t) = 0; \quad j = 1,2,\ldots n; \quad p = 0,1,2,\ldots$$

Wówczas r.r. (2.6) stają się identyczne z r.r. (2.3), układ r.r. (2.5) staje się identyczny z układem r.r. (2.1), a zatem wartości początkowe (2.15) staną się wartościami początkowymi rozwiązań r.r. (2.3) i (2.1).

Tak więc zakładając (2.17) w (2.15), dostajemy łącznie z (2.15a) i (2.16a) wzory (2.7), (2.7a) i (2.7b) c.b.d.d.

LITERATURA

[1] W.W.STIEPANOW - Równania różniczkowe. Warszawa 1956. Wydanie polskie opracował i przypisami uzupełnił T.Ważewski.

[2] J.WĄSOWSKI - Zwei Lehrsätze in der Operatorenrechnung. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Akademie-Verlag. Band 41, Heft 1/2, Januar/Februar 1961.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Содержание

В этой работе излагается способ определения начальных условий производных интегралов систем дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэфициентами.

Отличается этот способ от классического метода тем, что, для получения начальных условий производных одной искомой функции, не нужно искать начальных условий производных остальных неизвестных функции.

DIE BESTIMMUNG DER ABLEITUNGSANFANGSWERTE DER INTEGRALE VON LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Art der Bestimmung von Ableitungsanfangswerten der Integrale von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten angegeben.

Diese Methode unterscheidet sich von der in der Literatur bekannten dadurch, dass man beim Herausfinden der Ableitungsanfangswerte einer gesuchten Funktion nicht die Ableitungsanfangswerte der übrigen unbekannten Funktionen zu bestimmen braucht.