ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 94 Matematyka-Fizyka z.4 1963

KAROL PETHE

OSZACOWANIE MODUŁU WSPÓŁCZYNNIKA b_3 FUNKCJI ŚREDNIOJEDNOKROTNYCH ZEWNĄTRZ KOŁA JEDNOSTKOWEGO

W pracy "Oszacowanie modułu współczynnika b_n funkcji analitycznych średniojednokrotnych z zewnątrz koła jednostkowego", oddanej do druku do "Prac matematycznych", rozważałem funkcje średniojednokrotne o środku zero, w sensie Biernackiego, z zewnątrz koła jednostkowego, mając tam rozwinięcie

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

i otrzymałem oszacowanie (nieostre) na $|b_n|$. Dla $n = 3$ oszacowanie to wynosi $|b_3| \leqslant 0{,}548$.

W tej pracy rozważam podklasę funkcji wyżej wymienionych o współczynnikach rzeczywistych i dla nich otrzymuję (także nieostre) oszacowanie $|b_3| \leqslant 0{,}538$.

Rozważamy klasę funkcji analitycznych o współczynnikach rzeczywistych średniojednokrotnych o środku zero[1], których rozwinięcie w szereg Laurenta w obszarze $|z| > 1$ ma postać

$$f(z)\ z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \tag{1}$$

Korzystać będziemy z następujących twierdzeń:

TWIERDZENIE 1. Jeżeli funkcja

$$f(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots,$$

jest analityczna w obszarze $|z| > 1$ z wyłączeniem bieguna $w\ |z| = \infty$ i średniojednokrotna o środku zero w tym obszarze, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leqslant 1 \tag{2}$$

TWIERDZENIE 2. Jeżeli funkcja

$$\varphi(z) = c_{-p}z^p + c_{-p+1}z^{p-1} + \ldots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots = \sum_{n=-p} \frac{c_n}{z^n}$$

jest analityczna w obszarze $|z| > 1$ z wyłączeniem bieguna $w\ |z| = \infty$ i średnio p-krotna o środku zero w tym obszarze, to

$$\sum_{n=-p}^{\infty} n\,|c_n|^2 \leqslant 0.$$

Twierdzenie 2 zastosujemy do kwadratu funkcji $f(z)$, który na mocy twierdzenia M. Biernackiego[2] jest funkcją średnio 2-krotną o środku zero dla $|z| > 1$. Mamy więc w tym przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,|c_{n-1}|^2 \leqslant 2. \tag{3}$$

Grube oszacowanie modułu współczynnika b_3 otrzymuje się z nierówności (2), pomijając po jej lewej stronie wszystkie nieujemne wyrazy oprócz trzeciego. Oszacowanie to ma postać:

$$|b_3| \leqslant 1/\sqrt{3} = 0{,}577.$$

Lepsze oszacowanie modułu b_3, a mianowicie $|b_3| \leqslant 0{,}538$, można uzyskać, wykorzystując łączenie nierówności (2) i (3).

Rozważmy w tym celu nierówności

$$b_1^2 + 2b_2^2 + 3b_3^2 + 4b_4^2 + 5b_5^2 + 7b_7^2 \leq 1, \tag{4}$$

$$(b_1^2 + 2b_3)^2 + 3(b_3^2 + 2b_1b_5 + 2b_2b_4 + 2b_7)^2 \leq 1, \tag{5}$$

otrzymane z (2) i (3) przez pominięcie po lewych stronach obu nierówności pewnej nieujemnej sumy wyrazów[5]. Znalezienie z tych nierówności najlepszego oszacowania modułu b_3 sprowadza się do znalezienia największej wartości, jaką może przybierać ten moduł przy wszelkich układach liczb b_1, b_2, b_4, b_5, b_7 z zachowaniem warunków (4) i (5).

Z nierówności (4) i (5) wynika oczywisty lemat.

LEMAT 1. Jeżeli nierówności (4) i (5) zachodzą dla pewnych $b_1, b_2, \dots, b_7$, to zachodzą one również dla $b_1, \dots, \mathring{b}_{6-i}, b_{6-i+1}, \dots, \mathring{b}_7$ takich, że

$$\mathring{b}_7 + b_i\mathring{b}_{6-i} = b_7 + b_ib_{6-i} \qquad (i = 1,2)$$

$$(6-i)\,\mathring{b}_{6-i}^2 + 7\mathring{b}_7^2 \leq (6-i)b_{6-i}^2 + 7b_7^2.$$

Stąd wynika, że nierówności (4) i (5) będą także zachodziły jeśli uczynimy, ażeby przy warunku

$$b_2b_4 + b_7 = \text{const} \tag{6}$$

wyrażenie

$$4b_4^2 + 7b_7^2$$

było minimalne.

Przy oznaczeniu

$$Q(b_4, b_7) = 4b_4^2 + 7b_7^2 + \lambda(b_2 b_4 + b_7)$$

mamy

$$\frac{\partial Q}{\partial b_4} = 8b_4 + \lambda b_2 = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_7} = 14b_7 + \lambda = 0,$$

stąd

$$8b_4 - 14b_7 b_2 = 0,$$

$$b_4 = \frac{7}{4} b_7 b_2 \tag{7}$$

Podstawiając (7) do (4) i (5), dostajemy

$$b_1^2 + 2b_2^2 + 3b_3^2 + 5b_5^2 + 7b_7^2 \left(1 + \frac{7}{4} b_2^2\right) \leqslant 1,$$

$$(b_1^2 + 2b_3)^2 + 3\left[b_3^2 + 2b_1 b_5 + 2b_7 \left(1 + \frac{7}{4} b_2^2\right)\right]^2 \leqslant 1,$$

gdzie współczynniki b_1, b_2, b_5, b_7 są dowolne.

Oznaczmy dalej

$$b_7 \left(1 + \frac{7}{4} b_2^2\right) = \tilde{b}_7$$

wtedy ostatnie dwie nierówności przyjmą postać

$$b_1^2 + 2b_2^2 + 3b_3^2 + 5b_5^2 + \frac{7\,\tilde{b}_7^2}{1 + \frac{7}{4}\,b_2^2} \leq 1 \tag{8}$$

$$(b_1^2 + 2b_3)^2 + 3\,(b_3^2 + 2b_1b_5 + 2\,\tilde{b}_7)^2 \leq 1 \tag{9}$$

Maksymalne $|b_3|$ spełniające przy ustalonych b_1, b_5, b_7 nierówności (8) i (9) otrzymuje się wtedy, gdy wyrażenie

$$2b_2^2 + \frac{7\,\tilde{b}_7^2}{1 + \frac{7}{4}\,b_2^2}$$

jest minimalne.

Znajdujemy więc minimum funkcji jednej zmiennej $y(b_2^2)$

$$y(b_2^2) = 2b_2^2 + \frac{7\,\tilde{b}_7^2}{1 + \frac{7}{4}\,b_2^2} \tag{10}$$

LEMAT 2. Funkcja $y(b_2^2)$ osiąga minimum dla $b_2^2 = 0$.

D o w ó d. Istotnie, w przeciwnym przypadku funkcja $y(b_2^2)$ osiągałaby minimum w tym punkcie, dla którego

$$\frac{dy(b_2^2)}{db_2^2} = 0$$

Zauważmy, że musiałaby zachodzić nierówność

$$|\tilde{b}_7| < \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

gdyby bowiem $|\tilde{b}_7| \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{7}$, to pochodna

$$\frac{dy(b_2^2)}{db_2^2} = 2 - \frac{49\,\tilde{b}_7^2}{4(1+\frac{7}{4}\,b_2^2)^2}$$

miałaby jeden i tylko jeden pierwiastek

$$b_2^2 = \frac{4}{7}\left(\frac{7}{2\sqrt{2}}\,|\tilde{b}_7| - 1\right). \tag{11}$$

Podstawiając (11) do (10), otrzymujemy

$$y(b_2^2) = 4\sqrt{2}\,|\tilde{b}_7| - \frac{8}{7}$$

i dalej, wobec $|\tilde{b}_7| \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{7}$, otrzymujemy, że

$$y(b_2^2) = 4\sqrt{2}\,|\tilde{b}_7| - \frac{8}{7} \geqslant 4\sqrt{2}\,\frac{2\sqrt{2}}{7} - \frac{8}{7} = \frac{8}{7} > 1,$$

co przeczy nierówności (8).

Gdy $|\tilde{b}_7| < \frac{2\sqrt{2}}{7}$, otrzymujemy

$$\frac{dy(b_2^2)}{db_2^2} = 2 - \frac{49\,\tilde{b}_7^2}{4(1+\frac{7}{4}\,b_2^2)^2} \geqslant 2 - \frac{49\,\tilde{b}_7^2}{4} > 2 - \frac{49.8}{4.49} = 2-2=0$$

cdn.

Stąd wniosek, że moduł współczynnika b_3 osiąga swój kres górny tylko wtedy, gdy $b_2^2 = 0$ oraz $\tilde{b}_7 = b_7$.

Nierówności (8) i (9) przyjmą teraz postać

$$b_1^2 + 3b_3^2 + 5b_5^2 + 7b_7^2 \leqslant 1, \tag{12}$$

$$(b_1^2 + 2b_3)^2 + 3(b_3^2 + 2b_1b_5 + 2b_7)^2 \leqslant 1 \tag{13}$$

Znalezienie z tych nierówności najlepszego oszacowania $|b_3|$ sprowadza się do znalezienia największej wartości, jaką może przybierać ten moduł przy wszelkich układach liczb b_1, b_5, b_7.

Z lematu 1 wynika, że $|b_3|$ osiągnię swą maksymalną wartość jeżeli przy warunku

$$b_1b_5 + b_7 = \text{const.} \tag{14}$$

wyrażenie

$$5b_5^2 + 7b_7^2$$

będzie minimalne

Stosując metodę mnożników Langrange'a otrzymujemy

$$b_5 = \frac{7}{5} b_7 b_1 \tag{15}$$

Podstawiając (15) do (12) i (13), dostajemy

$$b_1^2 + 3b_3^2 + 7b_7^2 \left(1 + \frac{7}{5} b_1^2\right) \leqslant 1, \tag{12'}$$

$$(b_1^2 + 2b_3)^2 + 3\left(b_3^2 + 2b_7 \left(1 + \frac{7}{5} b_1^2\right)\right)^2 \leqslant 1 \tag{13'}$$

gdzie współczynniki b_1, b_7 są dowolne.

Z kształtu nierówności (13)' wynika:

LEMAT 3. Kres górny wartości $|b_3|$ spełniający nierówności (12)' i (13)' jest osiągnięty przy

$$b_3 < 0$$
$$b_7 \leqslant 0.$$

LEMAT 4. Niech b_3^* oznacza kres górny modułu współczynnika b_3 przy wszelkich układach $\{b_1, b_7\}$ spełniających wraz z b_3 nierówności (12)' i (13)'. Przy wszelkich b_1, b_7 spełniających wraz z b_3 (12)' i (13)' mamy

$$b_1^2 + 3b_3^{*2} + 7b_7^2\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right) = 1, \tag{16}$$

$$\left(b_1^2 + 2b_3^*\right)^2 + 3\left[b_3^{*2} + 2b_7\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right)\right]^2 = 1 \tag{17}$$

D o w ó d. Rozważmy trzy wypadki. Oczywiście przypadek obu ostrych nierówności jest niemożliwy.

1° przypuśćmy, że

$$b_1^2 + 3b_3^{*2} + 7b_7^2\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right) = 1, \tag{16'}$$

$$\left(b_1^2 + 2b_3^*\right)^2 + 3\left(b_3^{*2} + 2b_7\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right)\right)^2 < 1 \tag{17'}$$

Wobec ciągłości lewej strony (17) można tak zmniejszyć $|b_1|$ i $|b_7|$ ($b_1 = b_7 = 0$ nie spełnia (16)' i (17)') oraz powiększyć $|b_3^*|$, ażeby ostra nierówność (17)' oraz równość (16)' zostały zachowane, co wskutek maksymalności $|b_3^*|$ jest niemożliwe.

2^o Przypuśćmy teraz, że przy pewnych b_1, b_7

$$b_1^2 + 3b_3^{*2} + 7b_7^2\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right) < 1, \qquad (16)''$$

$$\left(b_1^2 + 2b_3^*\right)^2 + 3\left(b_3^{*2} + 2b_7\left(1 + \frac{7}{5}b_1^2\right)\right)^2 = 1 \qquad (17)''$$

Możemy tak zwiększyć $|b_1|$, $|b_7|$ i $|b_3^*|$, ażeby wobec lematu 3 równość (17)" oraz nierówność (16)" zostały zachowane, co wskutek maksymalności $|b_3^*|$ jest niemożliwe.

A zatem lemat 4 jest udowodniony. Zadanie będzie teraz polegało już tylko na rozwiązaniu układu równań (16) i (17). Z (16) b_1^2 otrzymujemy

$$b_1^2 = \frac{1 - 3b_3^{*2} - 7b_7^2}{1 + \frac{49}{5}b_7^2}$$

i podstawiając do (17), otrzymamy

$$\left(\frac{1 - 3b_3^{*2} - 7b_7^2}{1 + \frac{49}{5}b_7^2} + 2b_3^*\right)^2 + 3\left\{b_3^{*2} + 2b_7\left(1 + \frac{7(1 - 3b_3^{*2} - 7b_7^2)}{5\left(1 + \frac{49}{5}b_7^2\right)}\right)\right\}^2 = 1.$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$b_3^{*4}(7203b_7^4 - 12348b_7^3 + 6762b_7^2 - 1260b_7 + 300)$$

$$+ b_3^{*3}(-2940b_7^2 - 300) + b_3^{*2}(9604b_7^4 + 7056b_7^3 - 3038b_7^2 + 720b_7 - 50) +$$

$$+ b_3^*(-6860b_7^4 + 280b_7^2 + 100) + (-1176b_7^4 + 888b_7^2) = 0.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $-10b_7 = L$, $-b_3 = 0{,}52 + X$, to po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$X^4(0{,}7203L^4 + 12{,}348L^3 + 67{,}62L^2 + 126L + 30) +$$

$$+ X^3(1{,}4982L^4 + 25{,}6838L^3 + 170{,}0496L^2 + 262{,}08L + 924) +$$

$$+ X^2(2{,}1290L^4 + 12{,}9774L^3 + 125{,}1907L^2 + 132{,}4224L + 904{,}72) +$$

$$+ X(2{,}0899L^4 - 0{,}3937L^3 + 27{,}4835L^2 - 4{,}0176L + 260{,}0895) +$$

$$+ 0{,}5515L^4 - 1{,}005L^3 + 8{,}2876L^2 - 10{,}2557L - 1{,}401 = 0.$$

Ze względu na to, że $|b_3^*| > 1/2^{(4)}$, i wobec nierówności (2) możemy napisać

$$3\,(1/2)^2 + 7b_7^2 \leqslant 1,$$

stąd

$$|b_7| \leqslant \frac{1}{\sqrt{28}} < 0{,}2,$$

a więc wystarczy rozpatrywać L z przedziału (0,2).

Równanie (18) posiada dodatnie rozwiązanie na X (np. gdy $L = 0$), wobec tego dla znalezienia kresu górnego $|b_3|$ interesujemy się tylko dodatnimi pierwiastkami. Dla $0 \leqslant L \leqslant 2$ współczynniki przy X^4, X^3, X^2, X w równaniu (18) są dodatnie; wobec tego dodatnie pierwiastki równania (18) są nie większe od pierwiastków równania

$$BX + A = 0, \tag{19}$$

gdzie

$$B = 2,0899L^4-0,3937L^3+ 27,4835L^2- 4,0176L + 260,0895,$$

$$A = 0,5515L^4-1,0051L^3+ 8,2876L^2 - 10,2557L-1,401.$$

Obliczając więc największą wartość X dla $0 \leqslant L \leqslant 2$ z równania (19) zamiast z (18), otrzymujemy oszacowanie na $|b_3|$.
Obliczenie podane jest w tablicy, która daje

$$X_{max} = 0,0176,$$

a więc $|b_3| \leqslant 0,5376$.

Wartości X obliczone z równania (18) różnią się nieznacznie od wartości X obliczonych z równania (19) dlatego, że pominięte wyrazy są małe.

Tablica

L	A	B	$X = -\frac{A}{B}$
0	-1,401	260,0895	0,00536
0,2	-3,12779	260,38551	0,01201
0,4	-4,22746	262,00813	0,01607
0,6	-4,71650	267,75884	0,01761
0,61	-4,72493	268,06540	0,01762
0,62	-4,73183	268,37824	0,01763
0,63	-4,73718	268,69791	0,01763
0,64	-4,74099	269,02318	0,01762
0,65	-4,74326	269,35479	0,01760
0,66	-4,74399	269,69309	0,01759
0,7	-4,73139	271,11087	0,01745
0,8	-3,32930	275,11934	0,01210
1,0	-3,82269	285,25166	0,01340
1,2	-2,36690	298,49801	0,00792
1,4	-0,15463	315,28089	0,00049

dla $1,4 < L \leqslant 2$, $A > 0$.

LITERATURA

[1] Sur les fonctions en moyenne multivalentes. Bulletin des Sciences mathematiques, 2° serie, 70, mars-avril 1956, str.1

[2] Tamże, str.5 i 8

[3] W pracy: Oszacownie modułu współczynnika b_n funkcji analitycznych średnio jednokrotnych z zewnątrz koła jednostkowego (Prace Matematyczne, w druku) otrzymałem pewne oszacowanie na $|b_n|$, które dla $n = 3$ wynosi $|b_3| \leqslant 0{,}548$.

[4] Wynika to z przykładu funkcji $f(z) = (z^2 + \frac{1}{z^2})^{1/2} = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \ldots$

Rękopis złożono w Redakcji 12.2.63 r.

ОЦЕНКА МОДУЛЯ КОЭФИЦЕНТА b_3 ФУНКЦИИ ОДНОЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ВНЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Содержание

В роботе "Оценка модуля коэфицента b_n функции однолистных в среднем вне единичного круга" возданой в набор "Prace Matematyczne" я рассматривал функции однолистные в среднем о центре 0 в смысле М. Бернаского вне единичного круга. Эти функции имеют разложение

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

и для них я получил нестрогую оценку $|b_n|$, в частьности $|b_3| \leqslant 0{,}548$.

В этой работе я рассматриваю подкласс вышеизложенных функции о деиствительных коэфицентах и для них я получил (тоже нестрогую) оценку $|b_3| \leq 0{,}538$.

AN ESTIMATION OF THE THIRD COEFFICIENT OF FUNCTIONS CIRCUMFERENTIALLY UNIVALENT OUTSIDE THE UNIT DISC

S u m m a r y

In my paper "Oszacowanie modułu współczynnika b_n funkcji analitycznych średnio jednokrotnych z zewnątrz koła jednostkowego" due to appear in "Prace Matematyczne" a bound of $|b_n|$ for functions

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

circumferentially mean univalent outside the unit disc with the origin as centre of univalence has been obtained. In particular $|b_3| \leqslant 0{,}548$. In this paper I obtain an estimation $|b_3| \leqslant 0{,}538$ in the particular case of real b_n.