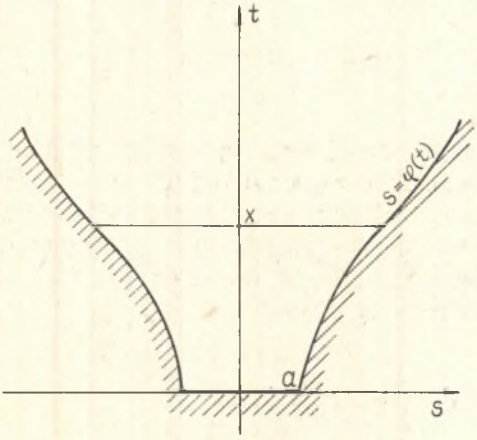
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 94 Matematyka-Fizyka z.4 1963

BRONISŁAW SZLĘK

WYZNACZANIE POPRZECZNEGO PRZEKROJU KORYTA PIASKOWNIKA O PRAWIE STAŁYM OBCIĄŻENIU HYDRAULICZNYM

I. Zadaniem piaskownika poziomego jest wyłapywanie z przepływających przezeń ścieków ziaren piasku lub innych zawiesin mineralnych, o średnicach większych lub równych pewnej przyjętej i ustalonej liczbie. Oznacza to, że zatrzymywane są ziarna o tej samej prędkości opadania. Jak wynika z prawa Allen Hanzena [1] obciążenie hydrauliczne $\frac{Q}{\Omega}$ powinno być wówczas stałe przy dowolnym napełnieniu koryta piaskownika. Q oznacza dopływ cieczy w m^3/sek, Ω - pole powierzchni zwierciadła cieczy wypełniającej piaskownik w m^2.



Rys.1

Rozważmy piaskownik o długości h i szerokości dna 2a (rys.1) Oznaczmy funkcję określającą kształt piaskownika $s = \varphi(t)$, zaś funkcję rozkładu prędkości cieczy w przekroju poprzecznym koryta $v(s,t)$. Przy tych oznaczeniach

$$Q = \int_0^x \int_{-\varphi(t)}^{\varphi(t)} v(s,t)\, ds\, dt$$

$$\Omega = 2\, h\, \varphi(x)$$

i zagadnienie wyznaczenia kształtu koryta o stałym obciążeniu hydraulicznym sprowadza się do rozwiązania równania całkowego

$$\frac{\int_0^x \int_{-\varphi(t)}^{\varphi(t)} v(s,t)\, ds dt}{2\, h\varphi(x)} = \text{const.} = c \qquad (1)$$

gdzie szukaną funkcją jest $s = \varphi(t)$ zaś $v(s,t)$ jest znane.

Równanie (1) wyprowadzono przy założeniu, że osadzający się piasek nie zmienia głębokości piaskownika. Oznacza to istnienie specjalnej komory gromadzącej piasek lub ciągłe usuwanie osadu.

Problem rozwiązalności równania (1) rozpatrzymy przy założeniu, że funkcja rozkładu prędkości cieczy jest stała, tzn. $v(s,t) = v_1$. Wówczas równanie (1) przyjmie postać

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(t)\, dt \qquad (2)$$

gdzie λ jest stałą dodatnią.

O szukanej funkcji $\varphi(t)$ zakładamy, że jest ciągła oraz

$$\varphi(t) > 0 \qquad \text{dla} \qquad t > 0 \qquad (3)$$

Równanie (2) jest równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju i jego jedynym rozwiązaniem ograniczonym jest funkcja $\varphi(t) \equiv 0$ [2]. Oczywiście funkcja ta nie jest interesująca ze względów technicznych. Skoro jednak nie jest możliwe znalezienie rozwiązania równania (2) z założeniem (3) to szukamy takich funkcji, dla których iloraz

$$K\left[\varphi(x)\right] = \frac{\varphi(x)}{\int_0^x \varphi(t)\, dt} \qquad (4)$$

różniłby się od liczby λ dowolnie mało. Funkcje takie pozwalają zbudować piaskownik o prawie stałym obciążeniu hydraulicznym.

W tym celu rozważymy pomocnicze równanie różniczkowe oraz pewne pomocnicze równanie całkowe.

II. Weźmy równanie różniczkowe

$$\psi'(t) = \lambda\psi(t) \tag{5}$$

z warunkiem początkowym

$$\psi(0) = a \tag{6}$$

Równanie to wraz z warunkiem początkowym a = 0 jest równoważne równaniu (2), jeżeli tylko założyć dodatkowo różniczkowalność $\varphi(t)$. Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$\psi(t) = a.e^{\lambda t} \tag{7}$$

dla której stosunek (4) jest równy

$$K\left[a.e^{\lambda x}\right] = \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{e^{\lambda x}}} \tag{8}$$

Ponieważ iloraz ten nie zależy od szerokości dna "a" więc nie zależy również od niej opadanie cząstek piasku. Z (8) wynika, że wyrażenie (4) dla funkcji (7) zmierza do λ gdy $x \to +\infty$ i nierówność $K\left[a\ e^{\lambda x}\right] - \lambda < \varepsilon$ zachodzi dla

$$x > \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} + 1\right) = x_{\varepsilon} \tag{9}$$

Oznacza to, że dla funkcji (7) iloraz (4) jest dowolnie bliski λ, gdy tylko x jest dostatecznie duże, przy czym stałą "a" możemy przyjąć dowolnie.

Jeżeli założyć dodatkowo, że dopływ cieczy Q do piaskownika jest zawsze większy lub równy pewnej wielkości $2 v_1 \alpha$ tzn.

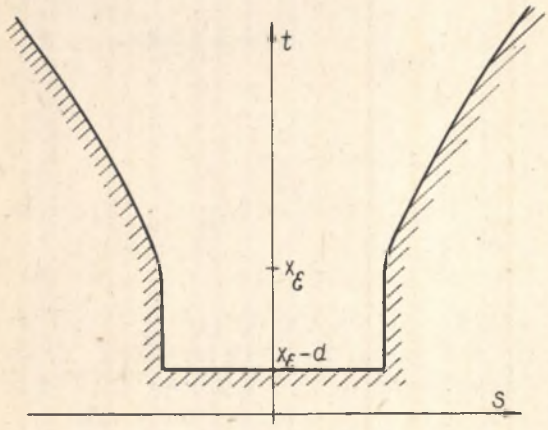
$$\int_0^x \varphi(t)\, dt \geqslant \alpha \tag{10}$$

to wtedy funkcję $\varphi(t)$ można określić na przykład następująco:

$$\varphi(t) = \begin{cases} ae^{\lambda x_\varepsilon} & \text{dla} \quad x_\varepsilon - d \leqslant t \leqslant x_\varepsilon \\ ae^{\lambda t} & \text{dla} \quad t \geqslant x_\varepsilon \end{cases} \tag{11}$$

Dla określenia liczby "a" przyjmujemy, na podstawie (10) równość $\int_0^{x_\varepsilon} ae^{\lambda t}\, dt = \alpha$ skąd

$$a = \alpha\varepsilon \tag{12}$$



Rys.2

Liczbę d wyznaczamy z równości $dae^{\lambda x_\varepsilon} = \alpha$ czyli

$$d = \frac{1}{\lambda + \varepsilon} \tag{13}$$

Ostatecznie szukana funkcja może mieć kształt

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha(\lambda + \varepsilon) & \text{dla} \quad x_\varepsilon - d \leqslant t \leqslant x_\varepsilon \\ \alpha\varepsilon e^{\lambda t} & \text{dla} \quad t \geqslant x_\varepsilon \end{cases} \tag{14}$$

Jej wykres i kształt koryta piaskownika podaje rys.2.

III. Można podać jeszcze inne kształty piaskowników, w których stosunek (4) jest bliższy liczby λ niż ma to miejsce w rozważanym powyżej przypadku.

Rozważmy w tym celu zamiast równania (2) inne równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju, a mianowicie

$$\psi(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \psi(u)\,du \tag{15}$$

gdzie $f(t)$ jest daną funkcją całkowalną, chwilowo jeszcze nie zdefiniowaną. Należy ją tak dobrać, aby wyrażenie (4) dla rozwiązania równania (15) różniło się dowolnie mało od liczby λ.

Równanie (15) ma rozwiązanie (zob. [2])

$$\psi(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \mathcal{N}(t,y,\lambda)\, f(y)\,dy \tag{16}$$

gdzie

$$\mathcal{N}(t,y,\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-y)^n}{n!} = e^{\lambda(t-y)} \tag{17}$$

czyli

$$\psi(t) = f(t) + \lambda\int_0^t e^{\lambda(t-y)} f(y)\,dy \tag{18}$$

Z (15) wynika, że stosunek (4) dla funkcji (18) jest równy

$$\frac{\psi(x)}{\int_0^x \psi(u)\,du} = \lambda + \frac{f(x)}{\int_0^x \psi(u)\,du} \tag{19}$$

Funkcję $f(t)$ należy więc tak przyjąć, żeby wyrażenie

$$R[f(x)] = \frac{f(x)}{\int_0^x \psi(u)\,du} \tag{20}$$

było dowolnie małe dla $x>0, \lambda>0$. Zakładając, że $f(x)>0$ otrzymujemy z (20) i (18)

$$R[f(x)] = \frac{f(x)}{\int_0^x \left[f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-y)} f(y)\, dy\right] dt} = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{\int_0^x \left[\frac{f(t)}{f(x)} + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-y)} \frac{f(y)}{f(x)} \cdot dy\right] dt}$$

Wynika stąd, że funkcję $f(t)$ należy tak dobrać, aby mianownik $[M\, f(x)]$ związku (21) miał największą wartość. Ograniczmy rozważania do funkcji monotonicznych. Jeżeli rozważyć w przedziale $[0, x]$ dwie funkcje dodatnie

$$g(t) \text{ rosnącą dla } t \in [0, x] \text{ tzn } \frac{g(t)}{g(x)} \leqslant 1$$

i

$$h(t) \text{ malejącą dla } t \in [0, x] \text{ tzn } \frac{h(t)}{h(x)} \geqslant 1$$

to

$$M[g] - M[h] = \int_0^x \left\{\left[\frac{g(t)}{g(x)} - \frac{h(t)}{h(x)}\right] + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-y)} \left[\frac{g(y)}{g(x)} - \frac{h(y)}{h(x)}\right] dy\right\} dt$$

Z określenia $g(t)$ i $h(t)$ wynika, że dla $t \in [0, x]$ zachodzi nierówność

$$\frac{g(t)}{g(x)} - \frac{h(t)}{h(x)} \leqslant 0$$

czyli

$$M\left[g\right] \leqslant M\left[h\right] \tag{23}$$

przy czym równość otrzymuje się dla funkcji stałych. Tak więc R[f] jest mniejsze dla funkcji malejących niż dla funkcji rosnących. Stąd wynika, że w równaniu (15) lepiej jest przyjąć za f(t) funkcję malejącą niż rosnącą, gdyż wówczas, jak wynika z (19), stosunek (4) jest bliższy stałej λ.

Zauważmy, że jeśli przyjąć w (15) f(t) = a (szerokość dna), to równanie to ma rozwiązanie $\psi(t) = a\, e^{\lambda t}$ i otrzymujemy ten sam rezultat co poprzednio.

Sposób ten pozwala znaleźć także inne funkcje, dla których stosunek (4) jest bliski liczby λ. Weźmy np. w (15) $f(t) = a\, e^{-\lambda t}$.
Wówczas z (18) wynika, że

$$\psi(t) = a\,\frac{e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}}{2} = a \cosh \lambda t \tag{24}$$

zaś

$$R\left[a\, e^{-\lambda x}\right] = \frac{2\lambda}{e^{2\lambda x} - 1}$$

i stosunek (4) dla funkcji (24) jest mniejszy od dowolnie małej liczby ε, gdy tylko

$$x > \frac{1}{2\lambda} \ln\left(1 + \frac{2\lambda}{\varepsilon}\right) = x'_{\varepsilon} \tag{25}$$

Porównując wartości x_{ε} i x'_{ε} dane wzorami (9) i (25) zauważamy, że

$$x'_{\varepsilon} < x_{\varepsilon}$$

Oznacza to, że stosunek (4) dla funkcji (24) jest bliższy liczby λ niż analogiczny iloraz dla funkcji (7). Szerokość dna nie ma wpływu na wielkość (20). Można więc przyjąć kształt koryta piaskownika wyznaczony funkcją

$$\varphi(t) = a \cosh \lambda t \tag{26}$$

W przypadku, gdyby zachodził warunek (10) można by przyjąć małą wartość na "a" i w podobny sposób jak poprzednio ustalić następujący kształt przekroju piaskownika:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha\lambda \operatorname{ctgh}\lambda x_\varepsilon' & \text{dla} \quad x_\varepsilon' - d' \leq t \leq x_\varepsilon' \\ \dfrac{\alpha\lambda}{\sinh\lambda x_\varepsilon'} \cosh\lambda t & \text{dla} \quad t \geqslant x_\varepsilon' \end{cases} \tag{27}$$

gdzie $d' = \dfrac{\sinh \lambda x_\varepsilon'}{\lambda}$ zaś x_ε' określone jest równością (25) Piaskownik o tym kształcie jest podobny do podanego na rys.2.

Ostatni przykład nie jest optymalny; można znaleźć wiele innych krzywych, dla których iloraz (4) będzie jeszcze bliższy liczby λ niż w podanych tu dwóch przykładach. Krzywe te można znaleźć z równania (15) przyjmując odpowiednio funkcję $f(t)$

I tak np. jeżeli $f(t) = ae^{-t}$ to $\psi(t) = \dfrac{e^{-t} + \lambda e^{\lambda t}}{1 + \lambda}$;

jeśli $f(t) = \lambda^t$, gdzie $0 < \lambda < 1$ to

$\psi(t) \dfrac{\lambda^t \ln\lambda - \lambda e^{\lambda t}}{\ln\lambda - \lambda}$. Jednakże te dwie ostatnie funkcje $\psi(t)$ są "gorsze" od poprzednich i co równie ważne, są bardziej skomplikowane, a to nie jest bez znaczenia przy praktycznym budowaniu piaskownika.

Powyższe dwa sposoby można również stosować do ogólnego przypadku, gdy prędkości cieczy nie są stałe i gdy dany jest ich rozkład. Wówczas różniczkując względem x równanie (1) otrzymamy

$$\lambda \int_{-\varphi(t)}^{\varphi(t)} v(s,t)ds = \varphi'(t)$$

Skoro $v(s,t)$ jest znane, to wykonując całkowanie otrzymujemy równanie różniczkowe typu $\varphi' = F(\varphi, t)$, z którego można wyznaczyć funkcję $\varphi(t)$.

Jeżeli na przykład rozkład prędkości określa funkcja $v(s,t) = (\varphi^2(t) - s^2)t$ to

$$\varphi(t) = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\lambda a^2 t^2}} \tag{28}$$

gdzie $2a$ jest szerokością dna, zaś $\lambda = \frac{1}{2hc}$

Funkcja (28) jest określona w przedziale $(0, \frac{\sqrt{3}}{2a\sqrt{\lambda}})$ (rozważamy tylko $x > 0$) i stosunek

$$\frac{\varphi(x)}{\int_0^x \int_{-\varphi(t)}^{\varphi(t)} v(s,t)\,ds\,dt}$$

różni się od λ mniej niż o ε jeśli tylko

$$x > \frac{\sqrt{3}}{2a} \frac{\sqrt{\lambda + 2\varepsilon}}{\lambda + \varepsilon} = x'_\varepsilon \text{ tzn. gdy } x''_\varepsilon < x < \frac{\sqrt{3}}{2a\sqrt{\lambda}}.$$

Długość tego przedziału można dowolnie zmieniać przez odpowiedni dobór parametru a.

Można również rozwiązywać bezpośrednio równanie całkowe (1), które po obliczeniu całki wewnętrznej przybierze postać

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x G\left[\varphi(t), t\right] dt$$

Rękopis złożono w Redakcji 12.V.1963 r.

LITERATURA

[1] Edward Kempa - Obliczanie piaskowników o przepływie poziomym, Gaz, woda i technika sanitarna, nr 7 1960, str. 274-279.

[2] Witold Pogorzelski - Równania całkowe i ich zastosowania, t.I, str. 9-14, Warszawa, 1953.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ОСАДНИКА С ПОЧТИ ПОСТОЯННОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

Содержание

Поперечное сечение осадника с постоянной гидравлической нагрузкой вытекает из уравнения (1). В работе рассматривается только тот случай когда $v(s,t)$ постоянное. Тогда палучаем уравнение (2), которое имеет только нулевое решение. Поэтому ищем сечение такого осадника, который имеет гидравлическую нагрузку довольно близкую постоянному числу λ. С этой целью рассматривается уравнение (5) с решением (14) или уравнение (15), которое имеет например решение (26) когда $f(t) = e^{-\lambda t}$. Из уравнения (15) можно найти тоже другие сечения осадника с почти постоянной гидравлической нагрузкой.

RESEARCH OF THE TRANSVERSAL SECTION OF THE SAND-SETTLING TROUGH WITH THE ALMOST CONSTANT HYDRAULIC LOAD

S u m m a r y

Form of the sand-settling with the constant hydraulic load can be found from the equation (1). In the paper is considered only the case if $v(s,t) = \text{const.}$, then the problem is reduced to solving equation (2). Instead of the solution (2) which is $\varphi(t) \equiv 0$, it is considered the solution (5), what gives the section of sand-settling (14) (fig,2). Afterwards was considered equation (15), which allows to find the section of a sand-settling with the hydraulic load, which differs slightly from λ. As the result it was received the curve (26) or (27); these are the examples of many curves which have the quotient (20) distrectionary small if only x is sufficiently great.