

JÓZEF SZPILECKI

TEMPERATUROWE OSCYLACJE RELAKSACYJNE W UKŁADACH LINIOWYCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono oscylacje temperatury, występujące w układzie n ciał, z których jedno (czujnik, przyrząd pomiarowy) ustawione jest na pewną nominalną wartość T . Chodziło o oscylacje około tej wartości, gdy krzywe opisujące proces zmiany temperatur są postaci (1). Wyrażenia opisujące oscylacje doprowadzono do postaci podobnej, jak w układzie jednoskładnikowym, przy założeniu, że amplituda oscylacji jest mała.

1. Wstęp

W pracy [1] rozpatrywano oscylacje temperaturowe relaksacyjne w układzie n ciał, wymieniających ciepło między sobą i z otoczeniem i wywołane załączaniem i wyłączaniem w odpowiednich chwilach t_{s-1} źródła ciepła, znajdującego się w jednym z ciał układu. Przy założeniu, że zagadnienie jest opisane liniowymi równaniami można napisać rozwiązanie dla dowolnego procesu (indeks s podaje numer procesu)

$$v_i^s = \sum_{k=1}^n A_{ik} \epsilon_k(s) e^{\alpha_k t} + \theta_i(s) \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots$$

Współczynniki $\epsilon_k(s)$ podają "historię" procesu i wynikają z założenia ciągłości funkcji temperatury w chwilach t_{s-1} , $s-1 = 0, 1, 2, \dots$

A_{ik} - oznaczają stałe,

α_k - stałe rzeczywiste ujemne,

$\theta_i(s)$ - oznaczają wartości stanu ustalonego.

Jedną z trzech metod rozpatrywania własności oscylacji temperatur, powstałych przez kolejne załączanie i wyłączanie źródła ciepła, rozpatrywanych w [1] jest przedmiotem niniejszego artykułu. Metoda polega na tym, że wraz z wyrażeniem na dowolną obraną temperaturę v_n rozpatruje się $n-1$ równań powstałych przez różniczkowanie równania $v_n = f(t)$ ze względu na zmienną t . Każde z tych równań zawiera liniową kombinację funkcji wykładniczych. Otrzymany w ten sposób układ równań można rozwiązać ze względu na jedną z tych funkcji np. $e^{\alpha_k t}$. Otrzymane wyrażenie jest postaci następującej

$$e^{\alpha_k t} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n}(s) (v_n(s) - \theta_n(s)) t_{s-1}^{(m)} \quad (2)$$

Stałe $E_{m+1,k,n}(s)$ wyrażają się za pośrednictwem stałych A_{ik} , α_k , $\epsilon_k(s)$ dla $k=1 \dots n$ [1]. Występujące przy stałych indeksy oznaczają: m - wskaźnik sumowania, k - podaje numer funkcji wykładniczej, n - podaje numer obranej funkcji temperatury, s - oznacza numer kolejnego procesu, (m) oznacza m -tą pochodną, (0) oznacza funkcję nieróżniczkowaną.

Z rozważań, przeprowadzonych w [1] wynika, że funkcje typu równania (1) dla ciał nieposiadających źródła ciepła posiadają, od pierwszej krzywej ostygania począwszy, ekstrema. Tej samej wartości temperatury odpowiadają zatem dwie wartości czasu. Z tego powodu indeks t_0 , t_{s-1} przy temperaturze i jej pochodnych podaje dla jakiej chwili należy wyrażenie obliczyć. W przypadku funkcji odnoszącej się do źródła ciepła taka niejednoznaczność powstaje wskutek opóźnień urządzenia regulacyjnego, wskutek czego nominalna temperatura przekraczana jest w obu kierunkach.

Cechą charakterystyczną tego rodzaju przedstawienia własności procesów oscylacji jest to, że liczba wyrazów w równaniu (2) jest równa liczbie składników układu, więc rośnie z tą ilością. Tak jest teoretycznie. W praktyce jednak jak pokazują rozważania przeprowadzone w [1] liczba członów jest

nieznaczna, gdyż pochodne wyższych rzędów posiadają małe wartości i mogą być pominięte.

Obrane przedstawienie oscylacji ma tę właściwość, że równania podające czasy końcowe poszczególnych procesów posiadają w przypadku układu n-składnikowego i małych oscylacji podobną postać jak w znanym przypadku układu jednoskładnikowego.

2. Rozpatrywanie oscylacji

Oscylacje w rozpatrywanym układzie powstają w ten sposób, że w pewnych chwilach (uzależnionych np. od czujnika regulatora) jest źródło ciepła załączane lub wyłączane. Nominalne chwile wyłączania i załączania oznaczono jak wyżej przez t_{s-1} . $s-1 = 0, 1, 2, \dots$ Ze względu na istnienie w układach opóźnień przy załączaniu i wyłączaniu źródła, spowodowanych bezwładnością elementów układu, chwile te są przesunięte wobec nominalnych o czasy τ_s , $s = 1, 2, \dots$

Nominalną temperaturą przełączania nazywamy temperaturę z góry określoną T osiąganą przez jedno z ciał (czujnik). Odpowiadającą tej temperaturze chwilę nazywamy nominalną.

2.1. Układ jednoskładnikowy

Przypadek ten jest znany ponieważ bardzo często otrzymanymi w tym przypadku równaniami opisujemy przybliżenie procesy rzeczywiste.

Na nominalne czasy przełączania otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha t_1} &= 1 - (T - \theta(2)) / (\theta(1) - \theta(2)) \\
 e^{\alpha t_{2s}} &= 1 / (1 + \Delta T_{2s-1} / (T - \theta(2))) \\
 e^{\alpha t_{2s+1}} &= 1 / (1 - \Delta T_{2s} / (T - \theta(1)))
 \end{aligned} \tag{3}$$

Czasy opóźnień wyznaczamy z następujących równań

$$e^{\alpha\tau_1} = 1 + \Delta T_1 / (T - \theta(1))$$

$$e^{\alpha\tau_{2s}} = 1 - \Delta T_{2s} / (T - \theta(2)) \quad (4)$$

$$e^{\alpha\tau_{2s+1}} = 1 + \Delta T_{2s+1} / (T - \theta(1))$$

$$s = 1, 2, \dots$$

W równaniach (3) i (4) ΔT_i , $i = 1, 2, \dots$ oznaczają różnice temperatur spowodowane przez opóźnienia τ_i (różnica między temperaturą nominalną i temperaturą w chwili załączania lub wyłączenia).

Otrzymane tak wyrażenia (3) mogą być doprowadzone do postaci podobnej do równań (4), przy założeniu, że ΔT_i są tak małe, że uwzględniamy tylko ich pierwsze potęgi.

W celu doprowadzenia tych równań do postaci analogicznej jak w układzie n składnikowym, należy posłużyć się przekształceniem

$$(\theta(1) - T)^{(1)} / (\theta(1) - \theta(2)) = \alpha e^{\alpha\tau_1} \quad (5)$$

2.1.1. Własności oscylacji

1. Ze względu na założenie, rozpatrywane oscylacje występują około przyjętej nominalnej wartości temperatury T , są one możliwe jedynie w przypadku istnienia opóźnień ΔT_i .

2. Jeżeli parzyste (nieparzyste) opóźnienia temperatury są równe, są też równe odpowiednie czasy przełączania nieparzyste (parzyste). Wynika stąd na ogół krzywa oscylacji niesymetryczna i tylko w szczególnym przypadku może mieć kształt symetryczny.

3. Równanie odpowiadające pierwszej krzywej ogrzewania posiada postać odmienną od pozostałych, które w przypadku równych opóźnień temperatury przybierają wszystkie (dla parzystych indeksów i wszystkie dla nieparzystych indeksów) jednakową postać. Wynika stąd przy założeniu równych opóźnień dla poszczególnych procesów możliwość istnienia stanu ustalonego od pierwszego ostygnięcia począwszy.

2.2. Układ n składnikowy n = 2,3,....

Dalsze rozważania przeprowadzono w przypadku ciała, nie posiadającego źródła ciepła. Dla ciał posiadających źródła energii obliczenia przebiegają analogicznie z tą jedynie różnicą, że krzywe temperatur nie posiadają ekstremów i oscylacje bez opóźnień są niemożliwe.

W przypisach wprowadzono dokładne wzory opisujące oscylacje. Ze względu na ich złożoność przyjęto następnie założenie, że $\tau_s, \Delta T_s$ są tak małe, że uwzględniamy tylko ich pierwsze potęgi.

Bardzo ważną cechą tak otrzymanych wyrażeń jest fakt, że występujące w formułach wyrażenia

$$\frac{\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2s+1)} (T - \theta_{n(2s+1)})_{t_{2s+1}}^{(m)}}{\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2s+1)} (T - \theta_{n(2s+1)})_{t_0}^{(m)}} = \eta_{n(2s+1)} \quad (6)$$

są niezależne od "historii" przełączania procesu oscylacji, skąd przy równości opóźnień oraz ustalonego kształtu krzywych ogrzewania i ostygnięcia możliwość istnienia stanu ustalonego od pierwszego ostygnięcia począwszy.

Podobne do (6) wyrażenia otrzymujemy również dla procesów o numerze parzystym.

Przybliżone wyrażenia na czasy nominalne przełączania są następujące:

$$e^{\alpha_k t_{2s+1}} = \eta_{n(2s+1)} (1 - \alpha_k \Delta T_{2s} / (T - \theta_{n(2s+1)})_{t_0})^{(1)} \quad (7)$$

$$e^{\alpha_k t_{2s+2}} = \eta_{n(2s+2)} (1 - \alpha_k \Delta T_{2s+1} / (T - \theta_{n(2s+2)}))$$

Na wyznaczenie opóźnień otrzymujemy

$$e^{\alpha_k \tau_{2s+1}} = 1 + \alpha_k \Delta T_{2s+1} / (T - \theta_{n(2s)})_{t_{s+1}}^{(1)} \quad (8)$$

$$e^{\alpha_k \tau_{2s+2}} = 1 - \alpha_k \Delta T_{2s+2} / (T - \theta_{n(2s+2)})_{t_{2s+2}}^{(1)}$$

Przy wyprowadzeniu wykorzystuje się następujące relacje wiążące wielkości odnoszące się do kolejnych procesów:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1, k, n(2s+1)} (T - \Delta T_{2s} - \theta_{n(2s+1)})_{t_0}^{(m)} = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1, k, n(2s)} (T - \Delta T_{2s} - \theta_{n(2s)})_{t_{2s} + \tau_{2s}}^{(m)} + 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1, k, n(2s+2)} (T + \Delta T_{2s+1} - \theta_{n(2s+2)})_{t_0}^{(m)} = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1, k, n(2s+1)} (T + \Delta T_{2s+1} - \theta_{n(2s+1)})_{t_{2s+1} + \tau_{2s+1}}^{(m)} - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Z dyskusji przeprowadzonej w [1] wynikają następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \alpha_k < 0 & \qquad \Delta T_i > 0 & (11) \\ (T - \theta_{n(2s)})_{t_{2s}}^{(1)} < 0 & \qquad (T - \theta_{n(2s+1)})_{t_{2s+1}}^{(1)} > 0 \\ (T - \theta_{n(2s)})_{t_0}^{(1)} > 0 & \qquad (T - \theta_{n(2s+1)})_{t_0}^{(1)} < 0 \end{aligned}$$

2.2.1. Porównania wzorów (3), (4) oraz (7), (8)

1. Porównanie wzorów odnoszących się do układu jednoskładnikowego z analogicznymi dla układu n składnikowego pokazuje duże ich podobieństwo. Wzory układu n składnikowego różnią się współczynnikiem $\tau_{n(s)}$, pochodzącym stąd, że krzywe posiadają ekstrema i mimo równości funkcji ich pochodne nie są sobie odpowiednio równe. Drugą przyczyną są opóźnienia procesów przełączania.

2. Mimo dużej pogładowości przedstawienia, ma ono tę wadę, że wymaga dla każdego czasu przełączenia znajomości funkcji temperatury i jej pochodnych, co jest specjalnie przy rozpatrywaniu stanów nieustalonych sprawą kłopotliwą. Zadanie daje się rozwiązać na przykład metodą podaną w [2].

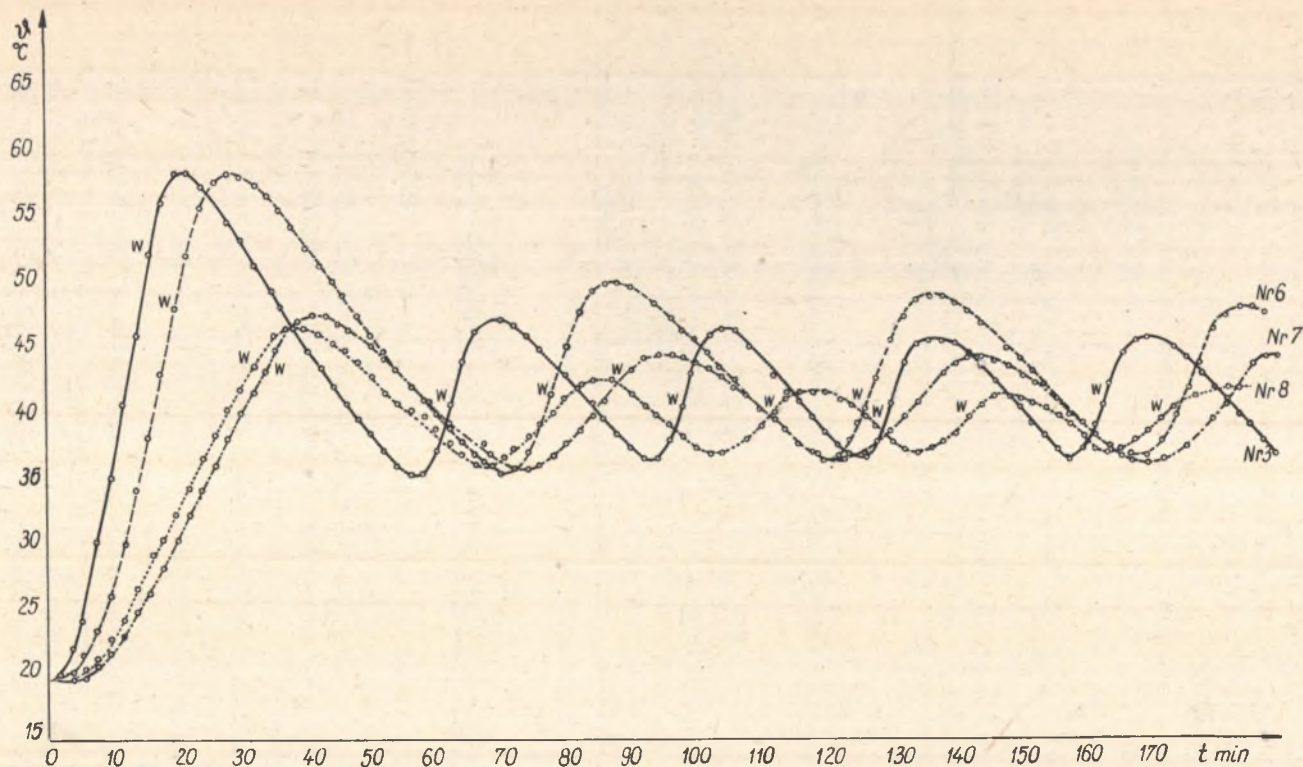
3. Własności oscylacji w przypadku zmienionych warunków w układzie

Metoda daje się stosować bez większych zmian do innych przypadków, rozpatrywanych w [1] i odpowiadających zmienionym założeniom dotyczącym warunków początkowych (układ w stanie początkowym nie znajduje się w równowadze), temperatury otoczenia (temperatura otoczenia zmienna z czasem) i mocy źródła ciepła (moc źródła zmienna z czasem).

4. Krzywe oscylacji otrzymane doświadczalnie

Rys.1 przedstawia kilka krzywych oscylacji temperaturowych, otrzymanych doświadczalnie w termostacie, ogrzewanym grzejnikiem elektrycznym. Krzywe przedstawiają zmienność temperatury jednego ze składników układu (termometru) wywołaną załączeniem i wyłączeniem przy pomocy urządzenia regulacyjnego źródła ciepła. Czasy załączenia i wyłączenia zaznaczono na rysunku Z i W. Pozwala to ocenić wielkość opóźnień. W celu otrzymania dużych wahań zwiększono sztucznie bezwładność układu.

Krzywe, odpowiadające różnym warunkom w układzie, wykazują wyraźną niesymetrię. Ponieważ do odczytu temperatury nie używano urządzenia automatycznego, krzywe obejmują stosunkowo nieznaczną liczbę oscylacji. W tym czasie nie stwierdzono stanu ustalonego, prawdopodobnie wskutek nie



Rys.1. Doświadczalne krzywe oscylacji temperatury

Spowolnienie procesów otrzymano przy pomocy tarcz żelaznych grubości 1 mm umieszczonych na grzejniku termostatu. Krzywa nr 3 otrzymana dla mocy źródła 562 W i jednej tarczy, krzywa nr 6 dla mocy 562 W i dwu tarcz, krzywa nr 7 dla mocy 232 W i dwu tarcz, krzywa nr 8 dla mocy 232 W i jednej tarczy

spełnienia założenia o stałości opóźnień i równości krzywych ogrzewania i ostygnięcia dla kolejnych procesów. Nie jest też spełnione założenie o oscylacjach małej amplitudy. Wreszcie, jak wynika z rozważań podanych w [1], układ był nie liniowy co musiało znaleźć swój wyraz ze względu na duże amplitudy.

LITERATURA

- [1] J. Szpilecki - Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, Rozpr. doktorska Wydz. Mech.-Energet. Pol.Śl. 1959.
- [2] J. Szpilecki - O pewnym graficznym sposobie przedstawienia $y = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t}$ (A_i, α_i stałe) i jego rozwiązaniu ze względu na zmienną niezależną t . Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka, nr 9, str.21. 1962.

PRZYPISY

Badanie oscylacji.

Ze wzoru (2) otrzymujemy dla chwili początkowej $t = 0$

$$1 = \sum_{m=1}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (\theta_{n(0)} - \theta_{n(1)})_{t_0}^{(m)} \quad (P 1)$$

W chwili t_1 jest osiągnięta wartość nominalna $\vartheta_n = T$

$$e^{\alpha_k t_1} = \sum_{m=1}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} \quad (P 2)$$

W chwili wyłączenia $t_1 + \tau_1$ otrzymujemy

$$e^{\alpha_k(t_1 + \tau_1)} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(1)})_{t_1 + \tau_1}^{(m)} \quad (P 3)$$

Przy założeniu o ΔT_1 , że są małymi, wskutek czego w przybliżonych obliczeniach uwzględniamy tylko ich pierwsze potęgi

$$e^{\alpha_k(t_1 + \tau_1)} = \sum_{m=1}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} + \Delta T_1 / (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(1)} \cdot \sum_{m=1}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} \quad (P 4)$$

Z równań (P 2) i (P 3) otrzymujemy przez podzielenie

$$e^{\alpha_k \tau_1} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(1)})_{t_1 + \tau_1}^{(m)} / \left[\sum_{m=0}^{n-1} \left[E_{m+1,k,n(1)} \cdot (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} \right] = 1 + \Delta T_1 \cdot \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} \cdot (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} / (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(1)} \right] / \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} \right] \quad (P 5)$$

Zależność ta daje się uprościć przy wykorzystaniu relacji (P 2), która po zróżniczkowaniu względu czasu i podstawieniu $t = t_1$ przybiera następującą postać

$$\alpha_k e^{\alpha_k t_1} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m+1)} \quad (P 6)$$

skąd

$$e^{\alpha_k t_1} = 1 + \alpha_k \Delta T_1 / (T - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(1)} \quad (P 7)$$

W chwili t_2 osiągnięta jest nominalna temperatura T

$$e^{\alpha_k t_2} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m)} \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} - 1 \right] \quad (P 8)$$

Podobnie dla $t = 0$

$$\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(2)})_{t_0}^{(m)} =$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(1)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(1)})_{t_1}^{(m)} - 1 \quad (P 9)$$

Różniczkowanie relacji (P 8) względem czasu i podstawienie t_2 daje

$$\alpha_k e^{\alpha_k t_2} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m+1)} /$$

$$/ \left[\sum_{m=0}^{n-1} \left[E_{m+1,k,n(1)} \cdot (T + \Delta T_1 - \theta_{n(2)})_{t_0}^{(m)} \right] \right] \quad (P 10)$$

Podobnie dla $t = 0$

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m+1)} / \sum_{m=0}^{n-1} \left[E_{m+1,k,n(2)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (T + \Delta T_1 - \theta_{n(2)})_{t_0}^{(m)} \right] \quad (P 11)$$

Z równania (P 8) otrzymuje się dla ΔT_1 małego

$$e^{\alpha_k t_2} = \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n-1} \left[E_{m+1,k,n(2)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1 - \Delta T_1 \alpha_k / (T - \theta_{n(2)}))_{t_0}^{(1)} \right] \quad (P 12)$$

W przypadku, gdy załączenie następuje z opóźnieniem τ_2 otrzymujemy:

$$e^{\alpha_k (t_2 + \tau_2)} = \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \Delta T - \theta_{n(2)})_{t_2 + \tau_2}^{(m)} \right] /$$

$$\left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(1)})_{t_1 + \tau_1}^{(m)} - 1 \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m)} - \right. \\
 &- \Delta T_2 \sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m+1)} \Big/ \\
 &\left. / (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(1)} \right] \Big/ \left[\sum_{m=0}^{n-1} E_{m+1,k,n(2)} (T + \Delta T_1 - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m)} \right] \quad (P 13)
 \end{aligned}$$

Подобные как в случае уравнения (P 7) получаем

$$e^{\alpha_k \tau_2} = 1 - \Delta T_2 \alpha_k / (T - \theta_{n(2)})_{t_2}^{(m)} \quad (P 14)$$

Подобные получаем общие формулы (7) и (8) данные в тексте работы

Рукопись получила Редакция в апреле 1963 г.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

С о д е р ж а н и е

В работе [1] изучаются температурные колебания в системе, состоящей из n элементов, из которых один снабжен источником теплоты, который в некоторых моментах времени включается или выключается на пример при помощи контактного термометра.

Метод состоит в том, чтобы получить для системы n элементов для описания колебаний математические уравнения аналогичные уравнениям для однокомпонентной системы.

Это можно сделать решая систему n уравнений состоящую из данной функции температуры и $n-1$ ее производных по времени, так чтобы получить экспоненциальные функции. Если запаздания (от инерции регулирующих элементов и других причин) малы, полученные уравнения аналогичны уравнениям для однокомпонентной системы.

Чтобы описать колебания нужны функция температуры и ее $n-1$ производных. Количество этих производных возрастает с числом элементов системы. Практически однако. Это число небольшое, потому что производные убывают с возрастающим порядком и при не очень высокой степени производные ничтожно малы.

Метод был тоже использован в случае измененных начальных условий и измененных предположений о температуре окружения и мощности источника теплоты.

TEMPERATURE RELAXATION OSCILLATIONS IN LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper [1] author has discussed the temperature oscillations in a linear system composed of n bodies, one of which is provided with a heat source being put on and out at certain intervals of time (for example by use of contact thermometer).

One of the methods considered in [1] is reported in this paper. The solution for the temperature of one element of the system is a linear combination of n exponential functions. To solve the equation in the exponential functions, a system of equations is formed, which are composed of the chosen function and of its $n-1$ derivatives; these equations are then solved for the exponentials. When the retardations (caused by the control system as well as by other reasons) are small, it is possible to obtain for the description of the relaxation process expressions similar to those in one-dimensional case.

The exponentials are linear functions of temperature and of their $n-1$ consecutive derivatives. Therefore the number of functions describing the process, increases with n . In reality this number is diminished by the fact, that derivatives of higher order, as is shown by experiment, are small and thus can be disregarded.