ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 94 Matematyka-Fizyka z.4 1963

JÓZEF SZPILECKI

WYZNACZANIE AMPLITUDY OSCYLACJI WYKŁADNICZYCH O NIECIĄGŁEJ STYCZNEJ

Streszczenie. Rozpatrzono w pracy periodyczne ustalone oscylacje, których krzywa złożona jest z krzywych wykładniczych (1) i (2), przy czym ekstrema odpowiadają chwilom początkowym częściowych krzywych. Zdefiniowano amplitudę oscylacji na dwa sposoby i znaleziono zależność amplitudy od rzędnej odniesienia a oraz czterech chwil czasu Δt_1 do Δt_4, odpowiadających wartościom ekstremalnych krzywych. Wynik może być praktycznie wykorzystany przy projektowaniu przyrządów, w których oscylacje pewnej wielkości winny mieć z góry określoną amplitudę.

1. Wstęp

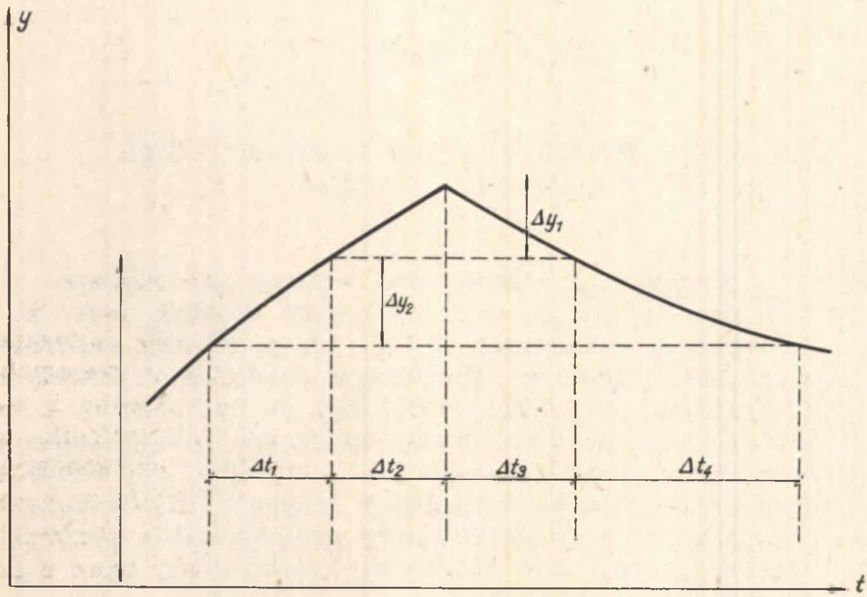
W pracy rozpatrywany jest stan ustalony oscylacji, których krzywa składa się z dwu odcinków krzywych, przy czym w punkcie przecięcia tych krzywych zachowana jest ciągłość funkcji, pierwsza zaś pochodna jest nieciągła.

Jako krzywe opisujące poszczególne odcinki przyjmujemy (rys.1)

$$y = a + A\,(1-e^{\alpha t}) \tag{1}$$

$$y = A_1\, e^{\alpha t} \tag{2}$$

gdzie t oznacza zmienną niezależną (czas), a, A, A_1, α są to wielkości stałe, stała α jest rzeczywista ujemna.



Rys.1. Kształt krzywej i wielkości, definiujące ją

Jeżeli krzywą (1) rozpatrujemy w odstępie czasu $(-\Delta t_1, \Delta t_2)$, krzywą (2) w odstępie czasu $(0, \Delta t_3 + \Delta t_4)$ oraz oznaczymy rzędną krzywej (1), odpowiadającą chwili $t = 0$ przez y_o, dla krzywej zaś (2) przez y_2 (wartość y_o jest osiągana dla $t = \Delta t_3$), jeżeli wreszcie rzędne odpowiadające skrajnym wartościom krzywych oznaczymy przez $y_1 = a - \Delta y_2$ oraz $y_2 = a + \Delta y_1$, wtedy na wyznaczenie stałych otrzymujemy następujące równania:

$$
\begin{aligned}
y_o &= a \\
y_1 &= a + A\left(1 - e^{-\alpha \Delta t_1}\right) \\
y_2 &= a + A\left(1 - e^{\alpha \Delta t_2}\right) \\
y_o &= A_1\, e^{\alpha \Delta t_3} \\
y_2 &= A_1 \\
y_1 &= A_1\, e^{\alpha(\Delta t_3 + \Delta t_4)}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$x = e^{\alpha}$$

$$(a + \Delta y_1)/a = 1/B > 1$$

wtedy korzystając z równań (3) znając B, możemy z równania

$$B = x^{\Delta t_3} \tag{5}$$

wyznaczyć x, więc też wykładnik α.
Z wartości B, oraz α możemy wyznaczyć A/a oraz A_1.
Jak widać z przedstawionego rozumowania, do wyznaczenia obu krzywych potrzebne są następujące wielkości: B, Δt_3, Δt_2. Wynika stąd, że aby wszystkie warunki (3) mogły być spełnione, muszą być między wielkościami Δy_2, Δt_1, Δt_4 i podanymi wyżej spełnione pewne związki.
Dalszy tok rozumowania jest następujący: zdefiniowano amplitudę oscylacji

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 = 2\bar{A} \tag{6}$$

Następnie zostały wyprowadzone dwa związki, pozwalające obliczyć amplitudę oscylacji $\bar{A}$ za pośrednictwem a, B oraz stosunków czasów. Związki te wykazują, że aby uzyskać wyniki uzgodnione odstępy czasu Δt_i, $i = 1,..4$ muszą spełniać pewne związki. Znając przynależne do danej amplitudy wielkości można wyznaczyć stałe, charakteryzujące krzywe (1) i (2). Ze względu na złożoną postać zależności amplitudy $\bar{A}$ od wielkości B, problem rozwiązujemy graficzne.

2. Pierwszy związek na wyznaczenie amplitudy

Z równań (3) otrzymujemy następujące zależności

$$-\Delta y_2 = A(1 - e^{\alpha \Delta t_1}) \qquad\qquad (7)$$

$$\Delta y_1 = A(1 - e^{\alpha \Delta t_2})$$

$$y_2/a = (a + \Delta y_1)/a = 1/B = e^{-\alpha \Delta t_3}$$

$$y_1/a = (a - \Delta y_2)/a = e^{\alpha \Delta t_4}$$

Z dwu ostatnich równań przez eliminacje wielkości x, określonej przez równanie (4) otrzymujemy

$$\left[(a - \Delta y_2)/a\right]^{1/\Delta t_4} = \left[a/(a + \Delta y_1)\right]^{1/\Delta t_3} \qquad (8)$$

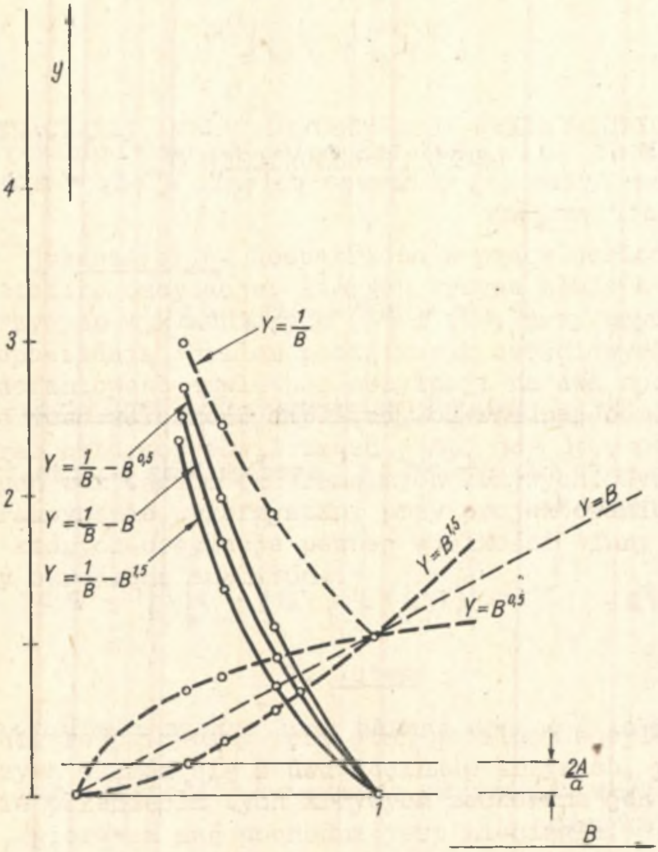
Wprowadzając tu związek (6) otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$2\bar{A}/a = 1/B - B^{\Delta t_4/\Delta t_3} \qquad (9)$$

Celem graficznego rozwiązania równania (9) obliczamy wartości funkcji stojącej z prawej strony, budując ją z dwu funkcji:

$$1/B \text{ i } B^{\Delta t_4/\Delta t_3}$$

Wykładnik ostatniej funkcji może przybierać wartości $\gtreqless$ 1. Ponieważ chodzi o znalezienie ogólnego charakteru krzywych, przyjęto dowolnie ten stosunek równy, 1, 1,5 i 0,5. Z kolei wyliczono kilka orientacyjnych wartości dla każdej z krzywych, na podstawie tego na rysunku 2 wyrysowano odnośne krzywe. Jeżeli teraz na rysunku poprowadzimy prostą równoległą do osi B w odległości 2 $\bar{A}$/a znajdujemy wartości B, przynależne do wielkości 2 $\bar{A}$/a.



Rys.2. Wykres pomocniczy do rozwiązania graficznego równania (9)

Jak z rysunku 2 wynika, odpowiadające punktom przecięcia wartości B są mniejsze od 1. Największe są one w przypadku $\Delta t_4 / \Delta t_3 < 1$, najmniejsze w przypadku spełnienia przeciwnej nierówności.

Z równania (9) widać, że wielkość $\bar{A}$ zależna od a, Δy_1 oraz stosunku $\Delta t_4 / \Delta t_3$.

Rachunek daje się przeprowadzić bezpośrednio, jeżeli przyjmiemy, że wartość B spełniająca równanie (9) może być zapisana w postaci

$$B = 1 - \Delta B \tag{10}$$

gdzie wielkość ΔB jest tak mała, że uwzględniamy przy obliczeniach tylko jej pierwsze potęgi. Wtedy w miejsce równania (9) otrzymujemy

$$2\,\bar{A}/a = B(1 + \Delta t_4/\Delta t_3) \tag{11}$$

3. Drugi związek na wyznaczenie amplitudy

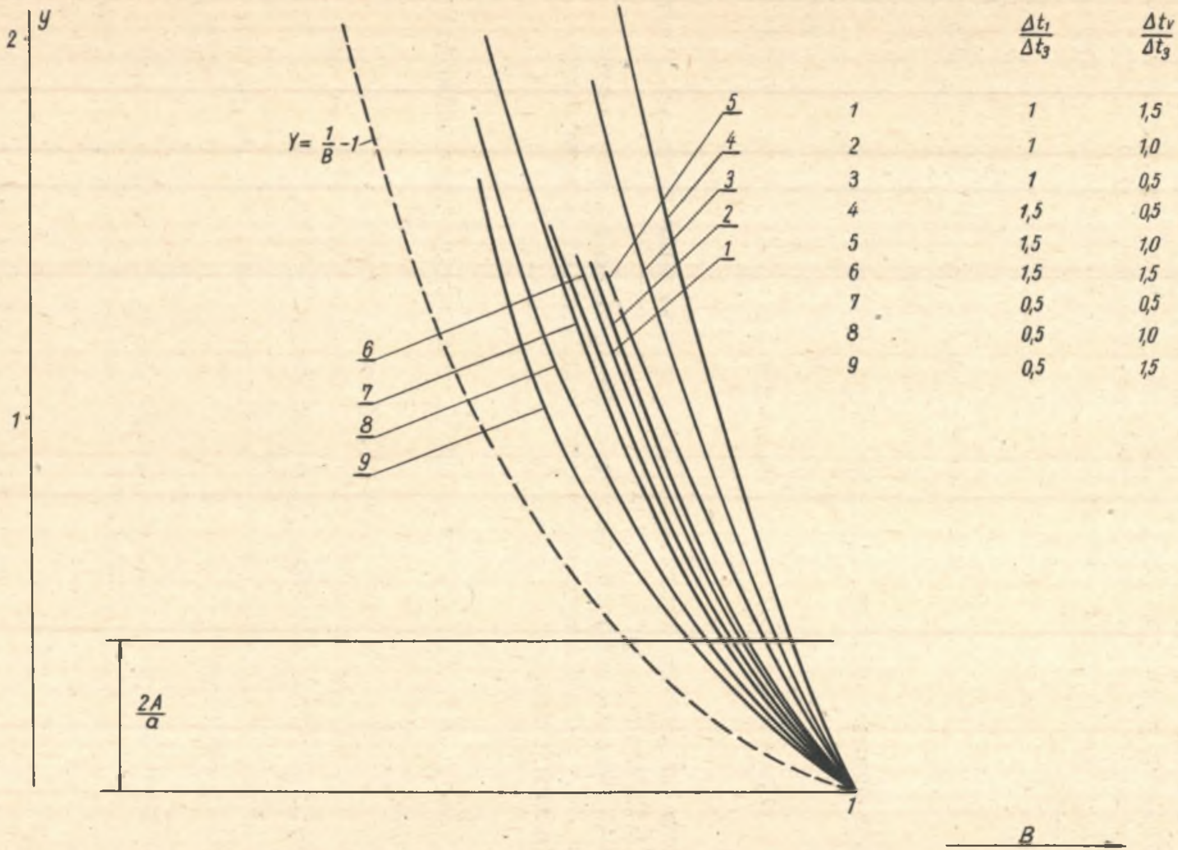
Z pierwszych dwu równań (7) otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$2\,\bar{A}/a = (1/B - 1)(1 + [(1/B)\,\Delta t_1/\Delta t_3 - 1]/[1 - B\,\Delta t_2/\Delta t_3]) \tag{12}$$

Na rysunku 3 podano zasadę graficznego rozwiązania tego równania.

Występujące tam krzywe otrzymano obliczając dla trzech wartości stosunku

$\Delta t_1/\Delta t_3$ i $\Delta t_2/\Delta t_3$, a mianowicie dla wartości $\gtreqless 1$ i przez kombinację każdej wartości z każdą otrzymano kilka rzędnych 9 krzywych przedstawiających ułamek w drugim nawiasie (12), dodając następnie do każdej rzędnej 1 i wreszcie mnożąc otrzymane wartości przez wartości pierwszego nawiasu. Wszystkie krzywe mają przebieg monotoniczny i mieszczą się między krzywą $y = 1/B - 1$ i $B = 1$. W tym przypadku amplituda $\bar{A}$ jest zależna od wielkości: a, B, $\Delta t_1/\Delta t_3$ i $\Delta t_2/\Delta t_3$. Aby więc nie otrzymać wartości sprzecznych, możemy wyznaczyć amplitudę $\bar{A}$ na podstawie wzoru (9), by na podstawie wzoru (12) wyznaczyć wielkości $\Delta t_1/\Delta t_3$ i $\Delta t_2/\Delta t_3$



Rys.3. Wykres pomocniczy do graficznego rozwiązania równania (12)

przez dobór odpowiedniej krzywej, której własności są uzależnione od tych dwu wielkości.

Jeżeli możemy przyjąć w przybliżeniu, podobnie jak to uczyniono w poprzednim przypadku, że B jest przedstawialne w postaci (10) z analogicznymi założeniami co do wielkości ΔB, wtedy możemy równanie (12) sprowadzić do następującej postaci

$$2\,\bar{A}/a = \Delta B(1 + \Delta t_1/\Delta t_2) \tag{13}$$

W tym przypadku oblicza się prosto wielkość

$$\Delta y_2/a = 2\,\bar{A}/a - \Delta y_1/a = \Delta B \cdot \Delta t_1/\Delta t_2 \tag{14}$$

W ogólnym przypadku wielkość Δy_2 wyznaczamy również z równania (6) znając a, $\bar{A}$, Δy_1.

Można również zadanie odwrócić dobierając na podstawie rysunku 2 i 3 do danego $2\,\bar{A}/a$ tę samą B i stąd wyznaczyć trzy stosunki czasów

$\Delta t_1/\Delta t_3$, $\Delta t_2/\Delta t_3$, $\Delta t_4/\Delta t_3$ następnie zaś wielkości Δy_1 i Δy_2.

Rękopis złożono w Redakcji w kwietniu 1963 r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ЭКСПОНЕНЦИЯЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИМЕЮЩИХ ПРЕРИВНУЮ ПЕРВУЮ ПРОЙЗВОДНУЮ

С о д е р ж а н и е

В работе рассматриваются периодические установившиеся колебания с кривой состоящей из двоих экспонеыциялльных кривых (1) и (2), которых экстремумы попадают на начальные точки. Амплитуда колебаний определена двумя способоми и дастся ее связь с ординатой отношения и временами $\Delta t_i, i=1...4$, принадлежащими к экстремальным значениям кривых. Результаты могут быть использованы при проектировке аппаратов с данной амплитудой колебаний.

DETERMINATION OF THE AMPLITUDE OF EXPONENTIAL OSCILLATIONS WITH A NON-CONTINUOUS FIRST DERIVATIVE

S u m m a r y

Periodic stationary oscillations were discussed, the curve of which is composed of two exponential curves (1) and (2), the extremes coinciding with the initial values of the partial curves. The amplitude of the oscillations, defined in two ways, is related to: a reference ordinate and four times Δt_i, i = 1,..4 for the extreme values of the extreme values of the curves.

The results can be of importance for designing apparatus with a given oscillation amplitude.