ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 94 Matematyka-Fizyka z.4 1963

JÓZEF WĄSOWSKI

O PEWNYM SPOSOBIE ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

W oparciu o metodę klasyczną, podano pewień sposób wyznaczania całek jednorodnych i niejednorodnych układów równań różniczkowych o stałych współczynnikach, spełniających z góry podane warunki początkowe. Różni się on tym od znanej metody klasycznej, że nie wymaga każdorazowego dodatkowego wyznaczania stałych z podanych warunków początkowych.

1. Niejednorodny układ liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach

Niech będzie dany układ równań różniczkowych (oznaczany dalej w skrócie r.r)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\, x_k' + b_{ik} x_k) = f_i, \qquad i = 1,2\ldots n \tag{1.1}$$

gdzie $f_i = f_i(t)$, $i = 1,2\ldots n$, są dowolnymi funkcjami posiadającymi pochodne ciągłe dostatecznie dużych rzędów w przedziale I zawierającym punkt zero, a a_{ik} i b_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots n$, są stałymi współczynnikami.

O układzie (1.1) zakładamy, że wyznacznik

$$|a_{ik}| \neq 0, \qquad i,k = 1,2,\ldots n \tag{1.2}$$

Sprowadzając układ (1.1) do r.r. odpowiednio wyższych rzędów [1], [2], otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)}, \quad i=1,2...n \qquad (1.3)$$

gdzie stałe A_k, $k = 1,2,...\ n$, oraz B_{ijk}, $i,j = 1,2,...\ n$, $k = 0,1,...\ (n-1)$, są całkowitymi funkcjami stałych a_{ik} oraz b_{ik}, przy czym warunek (1.2), ($|a_{ik}| = A_n$) gwarantuje, że równania (1.3) są jedynymi spośród r.r rzędu n, które są spełnione przez każdą funkcję $x_{i(t)}$, $i = 1,2,...n$, spełniającą układ (1.1)

Przyjmijmy dla układu (1.1) wartości początkowe

$$x_{i(0)} = 0 \qquad i = 1,2,...n \qquad (1.4)$$

Odnośnie wartości $x_{i(0)}^{(p)}$, $i = 1,2,...n$, $p = 0,1,2,...$ dla całek układu (1.1) o warunkach początkowych (1.4), a zatem i całek r.r (1.3), wiadomo, że: (por.[4], str.76)

$$x_{i(0)}^{(p)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{p} Q_{ijk} \cdot f_{j(0)}^{(p-q)}; \quad i = 1,2,...n; \ p=0,1,2,.. \qquad (1.5)$$

gdzie

$$Q_{ijo} = 0 \qquad (1.5a)$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[B_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk} A_{(n-q+k)}\right] \qquad (1.5b)$$

$$i,j = 1,2,...n; \quad q=1,2,...$$

przy czym $x_{i(0)}^{(o)} = x_{i(0)}$, $i = 1,2,...n$; $A_{v+k} = 0$ dla $v + k = 0,1,2,...n$ oraz $B_{ijv} = 0$ dla $v = 0,1,...(n-1)$.

Równania różniczkowe (1.3) z warunkami początkowymi (1.4), są równoważne układowi (1.1) z warunkami początkowymi (1,5).

Stosując metodę uzmiennienia stałych, szukamy naprzód całki ogólnej r.r. (1.3) i otrzymujemy zgodnie z [3], wzór (2.3), str.46

$$x_i = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t W_{r(\tau)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)}(\tau) \right) d\tau + \sum_{r=1}^{n} K_{ir} \varphi_r, \quad i=1,2..n; \tag{1.6}$$

gdzie

$$W_r = \frac{D_r}{D} \qquad r = 1,2,\ldots n \tag{1.6a}$$

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_1, & \varphi'_2 \ldots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}, & \varphi_2^{(n-1)} \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad D_r = \begin{vmatrix} \varphi_1 \ldots & \varphi_{r-1}, 0, & \varphi_{r+1} \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_1 \ldots & \varphi'_{r-1}, 0, & \varphi'_{r+1} \ldots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \ldots & \varphi_{r-1}^{(n-1)}, \varphi_1^{(n-1)}, & \varphi_{r+1}^{(n-1)} \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{1.6b}$$

a φ_r, $r = 1,2,\ldots n$, są całkami szczególnymi r.r. (1.3) gdy $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{ijk} f_j^{(k)}(t) \equiv 0$, o wyznaczniku Wrońskiego różnym od zera, a K_{ir}, $i,r = 1,2,\ldots n$, są to stałe.

Całkując przez części doprowadzamy (1.6) do postaci nie zawierającej pod znakiem całki pochodnych funkcji f_j, $j=1,2,\ldots n$

$$x_i = \frac{1}{A_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{k=p+1}^{n-1} (-1)^p B_{ijk} W_r^{(p)} f_j^{(k-p-1)} \right\} + \tag{1.7}$$

$$+ \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)}(\tau) f_j(\tau) d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_{ir} \varphi_r ;$$

gdzie P_{ir}, $i, r = 1,2,\ldots n$, są to nowe stałe.

Ponieważ zgodnie z [3], pierwszy z wzorów (1.7), mamy

$$(-1)^j \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} W_r^{(j)} = 0; \qquad p + j \leq n-2$$

zatem dla $p = 0$, $j = 0,1,\ldots(n-2)$, sumy występujące w nawiasach wężykowych wzoru (1.7) są równe zeru.

Otrzymujemy więc

$$x_i = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)}(\tau) f_j(\tau) d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_{ir} \varphi_r; \tag{1.8}$$

$$i = 1,2,\ldots n$$

Tutaj pod znakiem całki występują już tylko funkcje f_j, $j = 1,2,\ldots n$.

Obecnie wykażemy, że przy przyjętych warunkach początkowych (1.4) stałe P_{ir}, $i, r = 1,2\ldots n$, są równe zeru.

W tym celu różniczkujemy (1.8), $p = 1,2,\ldots n$-razy, otrzymując po uporządkowaniu według pochodnych f_j, $j = 1,2,\ldots n$.

$$x_i^{(p)} = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{\xi=0}^{p-1} \sum_{q=0}^{\xi} \binom{p-q-1}{\xi-q} \left[\varphi_r^{(q)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)}\right]^{(\xi-q)} f_j^{(p-\xi-1)} +$$

$$\frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(p)} \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)} f_j(\tau) d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_{ir} \varphi_r^{(p)}; \tag{1.9}$$

$$i, p = 1,2,\ldots n$$

W myśl [3] wzory (1.7), mamy przy nowych oznaczeniach

$$\begin{aligned}
&(-1)^k \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(q)} W_r^{(k)} = 0; && q + k \leq n - 2 \\
&(-1)^k \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(q)} W_r^{(k)} = 1; && q + k = n - 1 \\
&(-1)^k \sum_{r=1}^{n} \varphi_r^{(q)} W_r^{(k)} = R_\beta; && q + k = n + \beta - 1
\end{aligned} \tag{1.10}$$

gdzie

$$R_\beta = -\frac{1}{A_n}\sum_{\alpha=1}^{\beta} A_{n-\alpha}\cdot R_{\beta-\alpha}; \tag{1.10a}$$

Uwzględniając (1.10) w (1.9) otrzymujemy

$$x_i^{(p)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{p} Q_{ijq} f_j^{(p-q)} + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r^{(p)}\int_0^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)} f_j(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{r=1}^{n} P_{ir}\varphi_r^{(p)}; \tag{1.11}$$

gdzie

$$Q_{ijo} = 0$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[B_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk}\cdot A_{(n-q+k)}\right] \tag{1.11a}$$

$$i,j = 1,2,\ldots n; \quad p = 0,1,2\ldots \quad q = 1,2,\ldots$$

Zakładając $t = 0$ w (1.11) i uwzględniając tam jednocześnie (1.5), otrzymujemy

$$\sum_{r=1}^{n} P_{ir}\varphi_r^{(p)}(0) = 0; \quad i = 1,2,\ldots n; \quad p=0,1,2,\ldots(n-1) \tag{1.12}$$

Ponieważ wyznacznik Wrońskiego (1.6b) jest z założenia różny od zera, zatem z (1.12) wynika

$$P_{ir} = 0; \quad i,r = 1,2,\ldots n \tag{1.13}$$

c.b.d.d.

Całki układu r.r (1.1) spełniające warunki początkowe (1.4), a zatem i całki r.r (1.3) spełniające warunki początkowe (1.5), otrzymują po uwzględnieniu (1.12) w (1.8), następującą postać

$$x_i = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)}(\tau) f_j(\tau) d\tau \qquad i=1,2,\ldots n \tag{1.14}$$

gdzie wszystkie występujące tu wielkości zostały poprzednio określone.

2. Całka jednorodnego układu liniowych r.r o stałych współczynnikach

Rozważmy układ

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} x_k' + b_{ik} x_k) = 0; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.1}$$

przy warunku

$$|a_{ik}| \neq 0 \qquad i,k = 1,2,\ldots n \tag{2.2}$$

Równanie (1.3) ma teraz postać

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_i^{(k)} = 0; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.3}$$

Przyjmijmy dla układu r.r. (2.1) wartości początkowe

$$x_i(0) = x_{oi}; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.4}$$

Równolegle z układem (2.1) rozważmy układ r.r (por.[4], str.81)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} x_k' + b_{ik} x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \psi_k'; \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{2.5}$$

gdzie funkcje $\psi_k = \psi_k(t)$, $k = 1,2,\ldots n$, są różniczkowalne dostateczną ilość razy w przedziale I, zawierającym punkt zero.

Dla układu (2.5) przyjmujemy te same warunki początkowe (2.4) co dla układu (2.1).

Sprowadzając układ (2.5) do r.r. wyższych rzędów otrzymamy (por.rozdz.1).

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\,\psi_j^{(k)}; \quad i = 1,2,\ldots n \tag{2.6}$$

Z [4], wzory (2.15), (2.15a), (2.16a), str.89 i 90, wynika, że

$$x_{i(0)}^{(p)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=0}^{p-1} Q_{ijq}\,\psi_{j(0)}^{(p-q)} + \sum_{j=1}^{n} Q_{ijp} x_{oj}$$

$$i = 1,2,\ldots n \qquad p = 1,2,\ldots \tag{2.7}$$

gdzie

$$Q_{ijo} = \frac{C_{ijn}}{A_n}; \qquad \begin{array}{lll} C_{ijn} = A_n & \text{gdy} & i = j = 1,2,\ldots n \\ C_{ijn} = 0 & \text{gdy} & i \neq j = 1,2,\ldots n \end{array} \tag{2.7a}$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[C_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk}\cdot A_{n-q+k}\right]; \quad i,j=1,2,\ldots n; \tag{2.7b}$$

$$q = 1,2,\ldots$$

Podobnie dla wartości $x_i^{(p)}(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, $p = 0,1,2..$ całek układu (2.1) o warunkach początkowych (2.4), mamy, ([4], wzory (2.7), (2.7a), (2.7b), str.83).

$$x_i^{(p)}(0) = \sum_{j=1}^{n} Q_{ijp}\, x_{oj}; \quad i = 1,2,\ldots n, \quad p = 0,1,2.. \tag{2.8}$$

gdzie

$$Q_{ijo} = \frac{C_{ijn}}{A_n}; \quad \begin{array}{ll} C_{ijn} = A_n & \text{gdy} \quad i = j = 1,2...n \\ C_{ijn} = 0 & \quad\quad\;\; i \neq j = 1,2...n \end{array} \tag{2.8a}$$

$$Q_{ijq} = \frac{1}{A_n}\left[C_{ij(n-q)} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_{ijk} \cdot A_{n-q+k}\right]; \quad i,j=1,2,...n; \; q=1,2... \tag{2.8b}$$

przy czym $x_i^{(o)} \equiv x_i(o)$, $i = 1,2,...n$; $A_{v+k} = 0$ dla $v + k = 0,1,...n$, oraz $C_{ijv} = 0$ dla $v = 0,1,..(n-1)$.

Obecnie szukamy całek ogólnych r.r. (2.6).

Stosując metodę uzmiennienia stałych, jak na str.2, otrzymamy

$$x_i = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t W_r(\tau)\Big(\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\psi_j^{(k)}(\tau)\Big)\,d\tau + \sum_{r=1}^{n} K_{ir}\varphi_r; \quad i = 1,2,...n \tag{2.9}$$

gdzie W_r, D, D_r, K_{ir}, $i,r = 1,2,...n$, mają znaczenie jak we wzorze (1.6).

Całkując przez części doprowadzamy (2.9) do postaci nie zawierającej pod znakiem całki pochodnych funkcji $\psi_j(t)$, $j = 1,2,...n$.

$$x_i = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{n} (-1)^p C_{ijk} W_r^{(p)} \psi_j^{(k-p-1)} + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r \int_0^t \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{ijk} W_r^{(k)}(\tau)\psi_j(\tau)d\tau + \sum_{r=1}^{n} P_{ir}\varphi_r; \quad i = 1,2,...n \tag{2.10}$$

gdzie P_{ir}; i $r = 1,2,...n$, są to nowe stałe.

Korzystając z pierwszych dwóch wzorów (1.10), dostajemy

$$x_i = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} C_{ijn}\psi_j + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r\int_0^t\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{ijk}W_r^{(k)}(\tau)\psi_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{r=1}^{n} P_{ir}\varphi_r; \quad i = 1,2,\ldots n \tag{2.11}$$

Obecnie wykażemy, że przy przyjętych warunkach początkowych (2.4), gdy pod znakiem całki nie występują już pochodne funkcji $\psi_j(t)$, $j = 1,2,\ldots n$, stałe P_{ir}, $i, r = 1,2,\ldots n$, są równe zeru.

W tym celu różniczkujemy (2.11), $p = 0,1,\ldots n$-razy, otrzymując po uporządkowaniu według pochodnych ψ_j, $j = 1,2,\ldots n$

$$x_i = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} C_{ijn}\psi_j^{(p)} +$$

$$+\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{\xi=0}^{p-1}\sum_{q=0}^{\xi}\binom{p-q-1}{\xi-q}\left[\varphi_r^{(q)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{ijk}W_r^{(k)}(\tau)\right]\psi_j^{(\xi-q)}(p-\xi-1)+$$

$$+\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_r^{(p)}\int_0^t\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{ijk}W_r^{(k)}(\tau)\right]\psi_j(\tau)\,d\tau + \sum_{r=1}^{n}P_{ir}\varphi_r^{(p)};$$

$$i,p = 1,2,\ldots n \tag{2.12}$$

Postępując teraz podobnie jak w rozdz. 1, wzór (1.9) tzn. uwzględniając tutaj wzory (1.10), a następnie zakładając $t = 0$, otrzymujemy

$$\sum_{r=1}^{n} P_{ir}\varphi_r^{(p)} = 0; \quad i, p = 1,2,\ldots n \tag{2.13}$$

Stąd, z uwagi na to, że Wrońskian jest tu z założenia różny od zera, dostajemy

$$P_{ir} = 0; \quad i,r = 1,2,\ldots n \tag{2.14}$$

Uwzględniając teraz (2.14) w (2.11), otrzymujemy

$$x_i = \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} C_{ijn}\psi_j + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{ijk} W_r^{(k)}(\tau)\psi_j(\tau)d\tau$$

$$i = 1,2,\ldots n \qquad (2.15)$$

Aby znaleźć całki szczególne układu r.r. (2.1), spełniające warunki początkowe (2.4) wystarczy założyć w (2.5), (2.6),(2.7) i (2.15)

$$\psi_j(t) \equiv x_{oj} = \text{const}\ ; \quad j = 1,2,\ldots n \qquad (2.16)$$

Wówczas układ r.r. (2.5) staje się identyczny z układem r.r. (2.1), a r,r. (2.6) z r.r.(2.3). Warunki początkowe (2.7) odnoszące się do układu r.r (2.5) przechodzą w warunki początkowe (2.8) odnoszące się do r.r. (2.3), a całki (2.15) r.r. (2.6) spełniające warunki początkowe (2.7) stają się całkami r.r. (2.5) spełniającymi warunki początkowe (2.8).

Uwzględniając więc (2.16) w (2.15) gdzie uwzględniamy również (2.8) dla p = 0, dostajemy

$$x_i = x_{oi} + \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{ijk} W_r^{(k)} X_{oj} d\tau\ ;$$

$$i = 1,2,\ldots n \qquad (2.17)$$

Wykonując wskazane całkowania, dostajemy

$$x_i = x_{oi} + \frac{1}{An}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{ijk}\, \varphi_r x_{oj}\left[W_r^{(k-1)} - W_{r(0)}^{(k-1)}\right]$$

$$i = 1,2,\ldots n$$

Uwzględniając tutaj pierwsze dwa związki z (1.10) oraz (2.8) mamy, że:

$$\frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{ijk} \varphi_r W_r^{(k-1)} \cdot X_{oj} = - x_{oi}$$

Wobec tego

$$x_i = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot C_{ijk} X_{oj} W_{r(0)}^{(k-1)} \cdot \varphi_r ;$$

$$i = 1,2,\ldots n \qquad (2.18)$$

gdzie znaczenie wszystkich wyrazów zostało poprzednio podane.

3. Całka niejednorodnego układu r.r. o dowolnych warunkach początkowych

Niech będzie dany układ r.r. (1.1) gdzie zakładamy warunki początkowe (2.4).

Szukane całki układu r.r. (1.1) spełniające warunki początkowe (2.4) są sumą całek (1.14) i (2.18), tzn.

$$x_i = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{ijk} W_r^{(k)}(\tau) \cdot f_j(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_{ijk} X_{oj} W_{r(0)}^{(k-1)} \cdot \varphi_r ;$$

$$i = 1,2,\ldots n, \qquad (3.1)$$

gdzie znaczenie wszystkich wyrazów jak we wzorach (1.14) i (2.18).

4. Wzory praktyczne

Wzór (3.1) przekształcamy w dalszym ciągu, doprowadzając go do postaci nadającej się lepiej do rachunku.

Niech równanie charakterystyczne

$$\sum_{k=0}^{n} A_k s^k = 0 \tag{4.1}$$

posiada n_q - krotny pierwiastek s_q, gdzie $q = 1,2,\ldots v$, razem pierwiastków n, tzn. $n_1 + n_2 + \ldots + n_v = n$.

Występujące we wzorze (3.1) funkcje $W_r(t), r = 1,2,\ldots n$ oraz ich pochodne, jak również wartości ich dla $t = 0$, zostały podane w pracy [3], wzory (4.3) i (4.3a) str.50.

Mieliśmy tam

$$W_r^{(p)}(t) = \frac{A_n}{(r_q - 1)!} \sum_{q=1}^{v} \sum_{\xi=0}^{n_q - r_q} (-1)^{p+\xi} \cdot \frac{1}{\xi!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{s} s_q^{p-k} \cdot$$

$$\cdot K_q(n_q - k - \xi - r_q + 1) \cdot t^{\xi} \cdot e^{-s_q t}$$

$$W_r^{(p)}(0) = A_n \sum_{q=1}^{v} (-1)^p \cdot \frac{1}{(r_q - 1)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} K_q(n_q - r_q - k + 1)$$

gdzie

$$p = 0,1,\ldots(n-1)$$

$$r = r_1, (n_1 + r_2), (n_1 + n_2 + r_3), \ldots (n_1 + n_2 + \ldots n_{v-1} + r_v)$$

$$r_q = 1,2,\ldots n_q; \qquad q = 1,2,\ldots v.$$

Wobec tego z (3.1), otrzymujemy po uporządkowaniu

$$x_i = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \frac{t^{r-1} e^{s_q t}}{(r-1)!} \int_0^t \sum_{\xi=0}^{n_q-1} \sum_{\mu=\xi}^{n_q-1} (-1)^{\xi-r+1} f_j(\tau) \cdot$$

$$\cdot \frac{K_q(n_q-\mu)}{(\xi-r+1)!} B_{i(s_q)}^{(\mu-\xi)} \tau^{\xi-r+1} \cdot e^{-s_q t} d\tau +$$

$$+ \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{k=0}^{n_q-r} \frac{K_q(n_q-r-k+1)}{k!(r-1)!} \cdot \frac{C_{i(s_q)}^{(k)}}{s_q} t^{r-1} e^{s_q t};$$

$$i = 1,2,\ldots n, \tag{4.2}$$

gdzie

$$K_{q1} = \frac{n_q!}{A_{(s_q)}^{(n_q)}}; \qquad q = 1,2,\ldots v$$

$$K_{q\mu} = -K_{q1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_{(s_q)}^{(n_q+k)}}{(n_q+k)!} \cdot K_q(\mu-k); \qquad \mu = 1,2,\ldots n_q \tag{4.2a}$$

$$A(s) = \sum_{k=0}^{n} A_k s^k = A_{n_{q-1}} \prod^{v} (s-s_q)^{n_q}$$

$$B_i(s) = \sum_{k=0}^{n=1} B_{ik} s^k; \quad B_{ik} = \sum_{j=1}^{n} B_{ijk}; \quad i=1,2,\ldots n \quad k=0,1,\ldots(n-1)$$

$$C_i(s) = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} s^k; \quad C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} C_{ijk} X_{oj}; \quad i,k=1,2,\ldots n \tag{4.2b}$$

5. Przykłady

Przykład 1. Dany jest układ r.r.

$$3x_1' - 8x_1 - x_2' + 6x_2 - 4x_3' + 10x_3 = 0$$
$$4x_1' - 4x_1 - 8x_2' + 8x_2 - 7x_3' + 10x_3 = 0$$
$$x_1' + x_1 - 2x_2' + x_2 - x_3' - x_3 = 0$$

o następujących warunkach początkowych

$$x_1(0) = x_{01} = -2; \quad x_2(0) = x_{02} = 0; \quad x_3(0) = x_{03} = 0$$

Szukamy funkcji $x_1 = x_1(t)$

Rozwiązanie. Tworzymy nowy układ r.r.

$$3x_1' - 8x_1 - x_2' + 6x_2 - 4x_3' + 10x_3 = 3\psi_1'$$
$$4x_1' - 4x_1 - 8x_2' + 8x_2 - 7x_3' + 10x_3 = 4\psi_1'$$
$$x_1' + x_1 - 2x_2' + x_2 - x_3' - x_3 = \psi_1'$$

Szukając x_1 sprowadzamy powyższy układ do r.r.

$$15x_1''' - 60x_1'' + 90x_1' - 60x_1 = 15\psi_1''' - 65\psi_1'' + 10\psi_1'$$

Równanie charakterystyczne

$$A(s) = 15s^3 - 60s^2 + 90s - 60 = 0$$

posiada pierwiastki

$$s_1 = 1 + j; \quad s_2 = 1-j; \quad s_3 = 2.$$

Zgodnie z wzorem (4.2), gdzie

$$v = 3 \quad n_q = 1 \quad q = 1,2,3, \quad f_{j(\tau)} \equiv 0$$

$$i = 1 \quad r = 1 \quad k = 0$$

otrzymujemy

$$x_1 = \sum_{q=1}^{3} K_{q1} \frac{C_1(s_q)}{s_q} e^{s_q t}$$

Zgodnie z wzorem (7.2a)

$$K_{q1} = \frac{n_q!}{A^{(n_q)}(s_q)} = \frac{1}{A'(s_q)}; \quad C_1(s_q) = (15s^3-65s^2+10s)x_{01}$$

i

$$x_1 = \sum_{q=1}^{3} \frac{C_1(s_q)}{s_q \cdot A'(s_q)} e^{s_q t}$$

Obliczamy

$$A'(s_1) = -30 - j30 \qquad \frac{C_1(s_1)}{s_1} = 110 + j70$$

$$A'(s_2) = -30 + j30 \qquad \frac{C_1(s_2)}{s_2} = 110 - j70$$

$$A'(s_3) = +30 \qquad \frac{C_1(s_3)}{s_3} = 120$$

Zatem

$$x_1 = \frac{110 + j70}{-30 - j30} e^{(1+j)t} + \frac{110 - j70}{-30 + j30} e^{(1-j)t} + \frac{120}{30} e^{2t}$$

$$x_1 = -\left(\frac{4}{3} \sin t + 6 \cos t\right) e^{t} + 4 e^{2t}$$

Przykład 2. Dany jest układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}
-6x_1' + 8x_1 - 3x_2' + 3x_2 + 3x_3' - x_3 &= f \\
-11x_1' + 12x_1 - 3x_2' + x_2 + 4x_3' + x_3 &= 0 \\
-14x_1' + 22x_1 - 6x_2' + 10x_2 + 4x_3' - 4x_3 &= 0
\end{aligned}$$

o następujących warunkach początkowych

$$x_{01} = 1; \quad x_{02} = 2; \quad x_{03} = 3;$$

Szukamy funkcji $x_1 = x_1(t)$

Rozwiązanie. Tworzymy nowy układ r.r.

$$\begin{aligned}
-6x_1' + 8x_1 - 3x_2' + 3x_2 + 3x_3' - x_3 &= f - 6\psi_1' - 3\psi_2' + 3\psi_3' \\
-11x_1' + 12x_1 - 3x_2' + x_2 + 4x_3' + x_3 &= -11\psi_1' - 3\psi_2' + 4\psi_3' \\
-14x_1' + 22x_1 - 6x_2' + 10x_2 + 4x_3' - 4x_3 &= -14\psi_1' - 6\psi_2' + 4\psi_3'
\end{aligned}$$

Szukając x_1 sprowadzamy powyższy układ r.r. do r.r.

$$36x_1''' - 108x_1'' + 72x_1' = (12f'' - 18f' - 14f) + (36\psi_1''' - 66\psi_1'' + 6\psi_1') + \\ + 12\psi_2' + (6\psi_3'' - 18\psi_3')$$

Równanie charakterystyczne

$$A(s) = 36s^3 - 108s^2 + 72s$$

posiada pierwiastki

$$s_1 = 1; \quad s_2 = 2; \quad s_3 = 0;$$

Zgodnie z wzorem (4.2), gdzie

$$v = 3 \quad n_q = 1 \quad q=1,2,3; \; f_j = f$$

$$i = 1 \quad r = 1 \quad k = 0$$

otrzymujemy

$$x_1 = \sum_{q=1}^{3} e^{s_q t} \int_0^t f(\tau) K_{q1} \, B_1(s_q) \, e^{-s_q \tau} d\tau + \sum_{q=1}^{3} K_{q1} \frac{C_1(s_q)}{s_q} e^{s_q t}$$

W myśl wzorów (4.2a) i (42b) mamy

$$K_{q1} = \frac{1}{A'(s_q)}$$

$$B_1(s) = 12s^2 - 18s - 14$$

$$C_1 = 6x_{01} + 12x_{02} - 18x_{03} = -24$$

$$C_2 = -66x_{01} + 6x_{03} = -48$$

$$C_3 = 36x_{01} = 36$$

$$\frac{C_1(s)}{s} = 36s^2 - 48s - 24$$

Wzór na x_1 otrzymuje zatem postać

$$x_1 = \sum_{q=1}^{3} \frac{B_1(s_q)}{A'(s_q)} e^{s_q t} \int_0^t f(\tau) e^{-s_q \tau} d\tau + \sum_{q=1}^{3} \frac{C_1(s_q)}{s_q A'(s_q)} e^{s_q t}$$

Obecnie obliczamy

$$A'(s) = 108s^2 - 216s + 72$$

$$A'(s_1) = -36; \quad A'(s_2) = 72; \quad A'(s_3) = 72$$

$$\frac{C_1(s_1)}{s_1} = -36; \quad \frac{C_1(s_2)}{s_2} = 24; \quad \frac{C_1(s_3)}{s_3} = -24;$$

$$B_1(s_1) = -20; \quad B_1(s_2) = -2; \quad B_1(s_3) = -14;$$

Podstawiając powyższe do wzoru na x_1 otrzymujemy

$$x_1 = \frac{5}{9} e^t \int_0^t f(\tau) e^{-\tau} d\tau - \frac{1}{36} e^{2t} \int_0^t f(\tau) e^{-2\tau} d\tau - \frac{7}{36} \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{3}$$

Rękopis złożono w Redakcji 12.5.63 r.

LITERATURA

[1] E. Kamke - Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig 1944.

[2] W.W. Stiepanow - Równania różniczkowe. Warszawa 1956. Wydanie polskie opracował i przypisami uzupełnił T. Ważewski.

[3] J. Wąsowski - O pewnym sposobie rozwiązywania liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Matematyka-Fizyka Z.2 Gliwice 1963.

[4] J. Wąsowski - Wyznaczanie wartości początkowych pochodnych całek układów liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Matematyka-Fizyka Z.2. Gliwice 1963.

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Содержание

В предлагаемой работе излагается, исходя из классического метода, способ нахождения однородного и неоднородного интеграла систем дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Этот способ отличается от классического метода тем, что он не требует каждый раз вычислять постоянные по заданным начальным условиям.

ÜBER EINE GEWISSE ART DER LÖSUNG VON SYSTEMEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Zusammenfassung

Im Anschluss an die klassische Methode wurde die Art vom Herausfinden des Integrals der Systeme Differentialgleichungen mit konstaten Koeffizienten, das im voraus die gegebenen Anfangswerte erfüllt, angegeben.

Die Art der Auflösung unterscheidet sich von der in der Literatur angegebenen klassischen Methode dadurch, dass die jedesmal hinzufügliche Bestimmung der Konstanten mit den agegebenen Anfangswerten nicht erforderlich ist.