ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 114 Matematyka - Fizyka z. 5 1964

MARIAN PALEJ

PROSTE SZCZEGÓLNE W METODZIE RZUTÓW RÓWNOLEGŁYCH *)

Weźmy pod uwagę dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny π_1 i π_2 (rys. 1) i dwie dowolne proste p_1 ⋊ p_2 spełniające warunek:

$$p_1 \parallel \pi_2 \quad \text{i} \quad p_2 \parallel \pi_1$$

oraz

$$p_1 \sim \perp \pi_1 \quad \text{bądź} \quad p_2 \sim \perp \pi_2$$

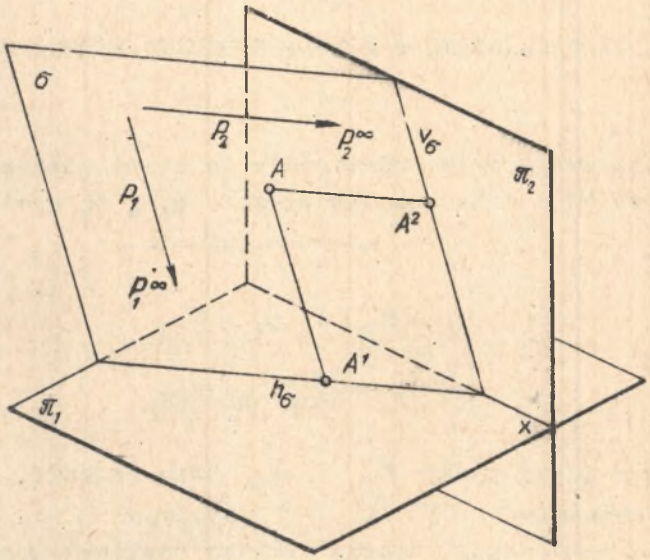
Traktując płaszczyzny π_1 i π_2 jako rzutnie, natomiast punkty niewłaściwe P_1^∞ i P_2^∞ prostych p_1 i p_2 jako kierunki rzutowania, możemy każdemu punktowi przestrzeni A przyporządkować jednoznacznie parę różnych bądź zjednoczonych ze sobą punktów A^1 i A^2 stanowiących jego rzuty na płaszczyzny π_1 i π_2.

Uwzględniając płaszczyznę σ przechodzącą przez punkt A i punkty P_1^∞ ; P_2^∞ stwierdzić można, że rzuty A^1 i A^2 znaleźć się muszą na śladach $h_\sigma = \sigma\pi_1$ i $v_\sigma = \sigma\pi_2$, czyli na prostych równoległych do p_2 i p_1 przecinających się z sobą w osi $x = \pi_1\pi_2$. Proste te nazywać będziemy ukośnymi odnoszącymi punktu A.

Jest oczywiste, że odpowiedniość rzutów A^1, A^2 i punktu A jest wzajemnie jednoznaczna, tzn., że dla dowolnie przyjętej pary punktów A^1 i A^2 na ukośnych odnoszących, znaleźć można jeden tylko punkt A jako przecięcie prostych rzucających $A^1 P_1^\infty$ i $A^2 P_2^\infty$. Rzutnie π_1 i π_2 oraz kierunki P_1^∞ i P_2^∞

*) Praca referowana na zjeździe pracowników Katedr Geometrii Wykreślnej w Wrocławiu w 1960 r.

stanowią więc aparat rzutowy umożliwiający jednoznaczne odwzorowanie przestrzeni na płaszczyźnie oraz jednoznaczną restytucję tej przestrzeni z odwzorowania płaskiego.



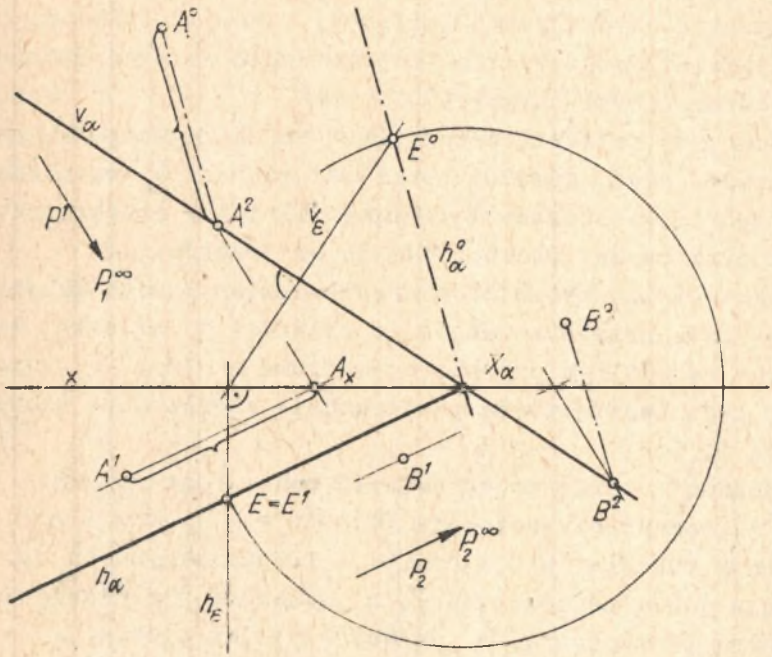
Rys.1

Wyżej zdefiniowane rzutowanie, które w krótkości określać będziemy metodą (S) (nazywając odpowiednio A^1 rzutem pierwszym punktu A - A^2 - rzutem drugim punktu A) interpretować można jako najprostsze uogólnienie metody Monge'a, w którym warunek prostopadłości prostej rzucającej do jednej rzutni zastąpiony został warunkiem ukośnokątności z pozostawieniem równoległości do drugiej rzutni.

Warto zauważyć, że ponieważ rzutnie π_1 i π_2 w metodzie (S) są identyczne z rzutniami poziomą i pionową w metodzie Monge'a, odwzorowania prostej i płaszczyzny przy pomocy śladów w obydwu metodach są identyczne.

Identycznie również przedstawiać się będzie konstrukcja kładu płaszczyzny na jedną z rzutni oparta o wyznaczanie kładu

jednego z jej śladów. Konstrukcję taką przedstawiono na rys.2 w odniesieniu do płaszczyzny $\alpha \parallel p_2$ *).



Rys.2

Wynika z niej bezpośrednio sposób wyznaczania kładu dowolnego punktu A płaszczyzny rzucającej ograniczający się w rozważanym przypadku do odmierzenia w kierunku h°_α od A^2 odcinka równego długości odnoszącej $(A^1 A_x)$. Odcinek ten w analogii do terminów używanych w metodzie Monge'a nazwiemy ukośną głębokością punktu A (konsekwentnie odcinek $A^2 A_x$ określić można jako ukośną wysokość punktu A w rozważanej metodzie rzutów).

*) Płaszczyznę taką nazywać będziemy krótko p_2 – rzucającą wprowadzając analogiczny termin płaszczyzny p_1 – rzucającej dla płaszczyzny spełniającej warunek równoległości do p_1.

Przeprowadzając porównanie metody (S) z metodą Monge'a warto zastanowić się nad niektórymi szczególnymi położeniami elementów przestrzeni.

Treścią niniejszego artykułu jest analiza prostych szczególnych, których obydwa rzuty (pierwszy i drugi) jednoczą się w rozwiniętym układzie rzutni. Proste takie nazywać będziemy prostymi jednorzutnymi (krytymi).

Wiadomo, że proste jednorzutne w metodzie Monge'a przechodzące przez jeden, dowolny punkt osi rzutów P' wyznaczają dwie płaszczyzny: płaszczyznę połowiącą II i IV obszar przestrzeni oraz płaszczyznę prostopadłą do osi rzutów.

Postawić można pytanie co utworzy zbiór takich prostych w metodzie (S). Proste rozumowanie prowadzi do wniosku, że proste takie w ogólnym przypadku nie leżą w dwóch płaszczyznach*), lecz tworzą pewną powierzchnię stożkową o wierzchołku w środku P.

Rozumowanie takie przeprowadzić można następująco: gdyby proste jednorzutne w metodzie (S) $a(a^1 = a^2)$, $b(b^1 = b^2)$... itd. o wspólnym punkcie $P \in x$ leżały w dwu płaszczyznach np. α i β (podobnie jak w metodzie Monge'a), wówczas przecięcie ich zbioru dowolną płaszczyzną φ dałoby w wyniku proste $k_1 = \varphi\alpha$ i $k_2 = \varphi\beta$. Zanalizujmy przekrój wiązki (P) prostych jednorzutnych dowolną płaszczyzną $\varphi \sim \in P$. Dla uproszczenia załóżmy, że płaszczyzna φ jest p_1 - i p_2 -rzucająca czyli, że jest ona identyczna z tzw. płaszczyzną główną $\sigma(\sigma \parallel p_1; \sigma \parallel p_2)$. Na rys.3 ilustrującym dalsze rozważania kierunek p_2 przyjęto jako prostopadły do π_2, a kierunek p_1 - dowolny, oczywiście z zachowaniem warunku $p_1 \parallel \pi_2$. Linię przekroju wiązki (P) płaszczyzną σ rozpatrzono w kładzie na π_2.

Z rys. 3 wynikają jasno następujące relacje:

$$z = m \cos \vartheta_1 - n \operatorname{ctg}(\alpha + \vartheta_1) = m \cos \vartheta_1 - n \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\vartheta_1 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\vartheta_1} \quad (1)$$

*) Wniosek ten nie jest ważny dla bardzo szczególnego przypadku metody (S), w którym po sprowadzeniu obydwu rzutni do wspólnej płaszczyzny rysunku ukośne odnoszące punktu są prostymi zjednoczonymi.

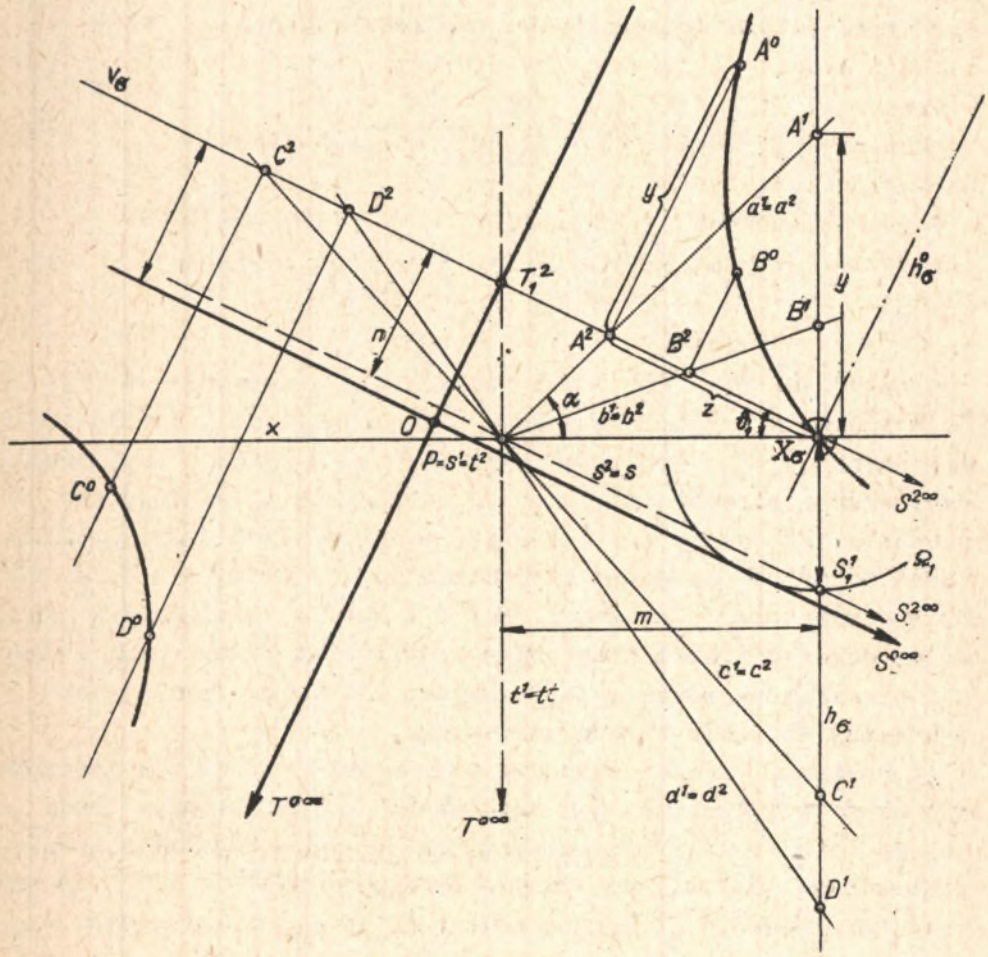
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{m}{y} \tag{2}$$

$$z = m \cos \vartheta_1 - n \cdot \frac{\frac{m}{y} \operatorname{ctg} \vartheta_1 - 1}{\frac{m}{y} + \operatorname{ctg} \vartheta_1} \tag{3}$$

Ponieważ odcinki m i n oraz kąt ϑ_1 są dla danych kierunków rzutów p_1 i p_2 wielkościami stałymi, przeto po przekształceniach równaniu (3) można nadać postać:

$$My + Nyz + Pz + Q = 0 \tag{4}$$

gdzie M, N, P i Q przedstawiają pewne stałe.



Jeżeli wielkości y i z traktować będziemy jako współrzędne punktów przecięcia prostych jednorzutnych a, b ... płaszczyzną główną σ w równaniu 4 rozpoznamy hiperbolę równoboczną odniesioną do osi współrzędnych równoległych do asymptot. Zbiór punktów A^0, B^0, C^0, ... $S^{0\infty}$, $T^{0\infty}$ tworzy więc hiperbolę równoboczną, której asymptotami są proste $OS^{0\infty}$ i $OT^{0\infty}$. Proste wiązki (P) są zatem tworzącymi powierzchni stożkowej o wierzchołku w punkcie P, a otrzymana hiperbola - kierującą tej powierzchni. Powierzchnia utworzona przez wiązkę prostych jednorzutnych w metodzie (S) jest powierzchnią stożkową stopnia drugiego. Rozważając zagadnienie dla tego przypadku metody (S), w którym żaden z kierunków nie jest prostopadły do rzutni, wyprowadzić można wnioski analogiczne.

Z rys. 4 ilustrującego taki przypadek wynika:

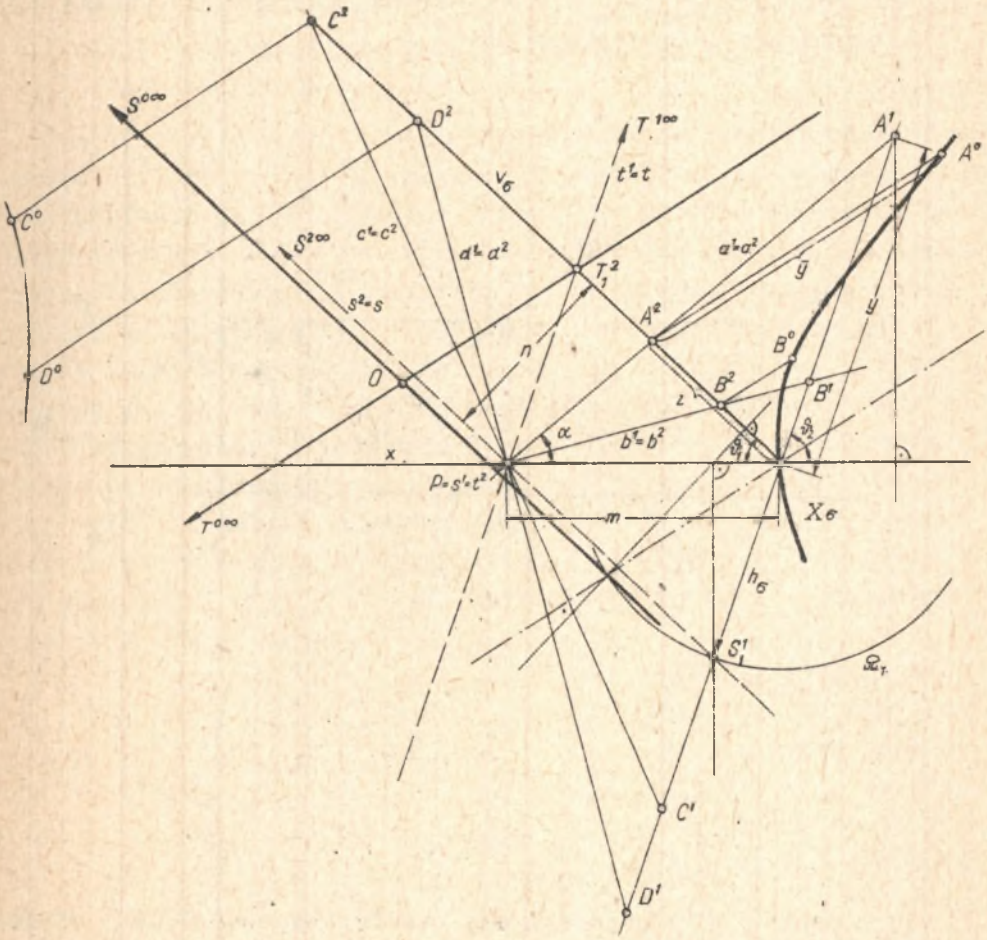
$$z = m \cos \vartheta_1 - n \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \vartheta_1 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \vartheta_1} \tag{1a}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{m + y \cos \vartheta_2}{y \cdot \sin \vartheta_2} = \frac{m}{y} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta_2} + \operatorname{ctg} \vartheta_2 \tag{2a}$$

Wynikowe równania (4) i (4a) (uzyskane z przekształceń (1a) i (2a) jak wyżej) różnić się będą jedynie stałymi i interpretacją zmiennych y, z. Traktując wartości y, z jako współrzędne ukośnokątne punktów A^0, B^0 .... równanie (4a) analogiczne do równania (4) należy również uznać za równanie hiperboli odniesione do osi współrzędnych równoległych do odcinków y, z, czyli równoległych do asymptot $OT^{0\infty}$ i $OS^{0\infty}$. Dowiedliśmy więc, że przekrojem wiązki prostych jednorzutnych płaszczyzną główną tj. płaszczyzną równoległą do obydwu kierunków rzutów jest w omawianej metodzie rzutów hiperbola.

Z rozważań powyższych można wyprowadzić praktyczną konstrukcję hiperboli wówczas, gdy dane są jej asymptoty oraz jeden z jej punktów. Należy jedynie odwrócić kolejność działań omówionych na rys. 3 i 4 i dla danych prostych $OS^{0\infty}$ i $OT^{0\infty}$ (asymptoty) oraz dowolnego punktu hiperboli szukać odpowiedniej wiąz

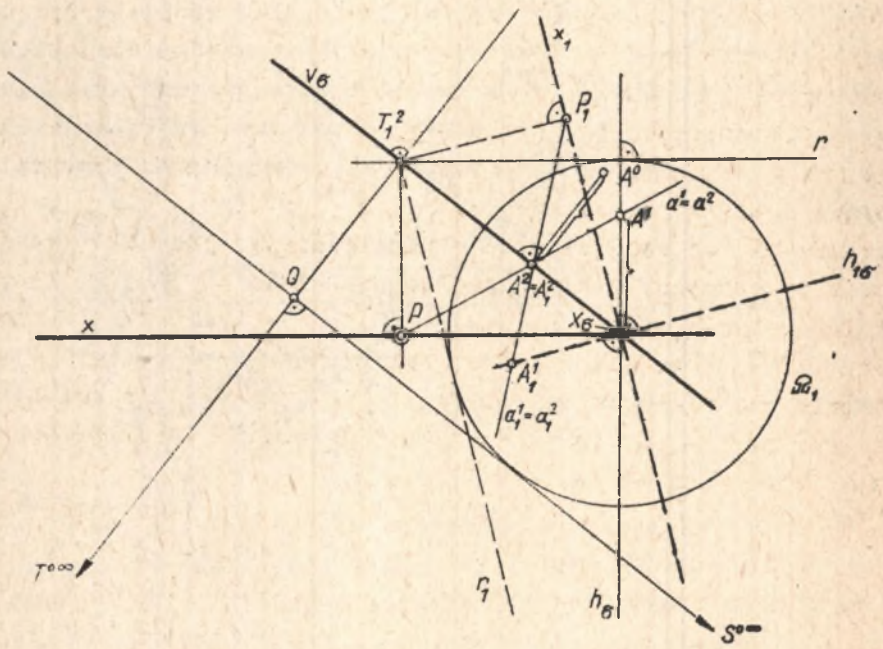
ki prostych jednorzutnych, osi x oraz śladów płaszczyzny głównej σ. Konstrukcję taką dla hiperboli równobocznej przedstawia rys. 5. Przyjmując dany punkt hiperboli za węzłowy punkt



Rys. 4

płaszczyzny głównej X_σ - pozostałe elementy konstrukcji w oparciu o rys. 3 wyznacza się następująco:

1. Przez punkt X_σ prowadzi się prostą v_σ równoległą do asymptoty $OS^{0\infty}$ i znajduje się jej punkt przecięcia z asymptotą $OT^{0\infty}$ - T_1^2.
2. Z punktu X_σ jako środka zatacza się łuk okręgu Ω_1 stycznego do asymptoty $OS^{0\infty}$.

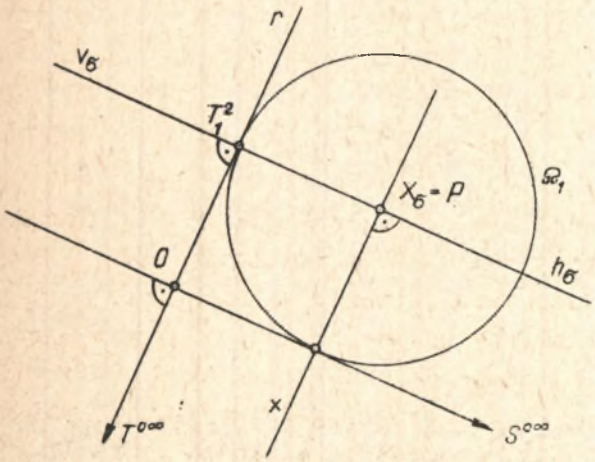


Rys. 5

3. Z punktu T_1^2 prowadzi się prostą styczną r do okręgu Ω_1, a następnie przez punkt X_σ kreśli się do niej prostopadłą h_σ. Wyznaczone w ten sposób proste h_σ i v_σ są śladami płaszczyzny głównej z rys. 3, a zatem ustalają kierunki rzutów, za pomocą których wiązce prostych jednorzutnych a, b, c .... przyporządkowuje się zbiór punktów A^0, B^0, C^0 .... tworzących szukaną hiperbolę i stanowiących kłady elementów wspólnych $a\sigma = A$, $b\sigma = B$ itp.

4. Przez punkt X_σ prowadzi się prostą równoległą do stycznej r, stanowiącą odpowiednik osi x z rys. 3.
Punkt przecięcia tej prostej (osi x) z prostą poprowadzoną przez T_1^2 równolegle do h_σ jest środkiem P wiązki prostych jednorzutnych a, b, c ....
Dysponując elementami: x, X_σ, h_σ, v_σ, P można wyznaczyć dowolnie wiele punktów rozważanej hiperboli powtarzając konstrukcję z rys. 3.

Odnośnie działania 3, należy zauważyć, że obok stycznej r z punktu T_1^2 do okręgu Ω_1 można poprowadzić również styczną r_1. Uwzględnienie jej w miejsce stycznej r prowadzi do innych położeń prostych h_σ i x oraz punktu P ($h_{1\sigma}$, x_1, P_1) symetrycznych prostokątnie względem v_σ. Na rys. 5 zaznaczono je liniami kreskowanymi. Jest widoczne, że na skutek symetrii z obydwu układów parametrów x, h_σ, v_σ, P oraz x_1, $h_{1\sigma}$, v_σ, P_1, otrzyma się tę samą hiperbolę uwzględniając jedynie właściwy obrót płaszczyzny σ przy dokonywaniu kładu na π_2. Kierunek obrotu ustalony jest wzajemnym położeniem punktu P i asymptoty $OS^{0\infty}$. Jeżeli w jednym przypadku są one po tej samej stronie osi w drugim natomiast (linie kreskowe) po przeciwnych jej stronach - obroty płaszczyzny σ w obydwu tych przypadkach winny być różne (przeciwne).

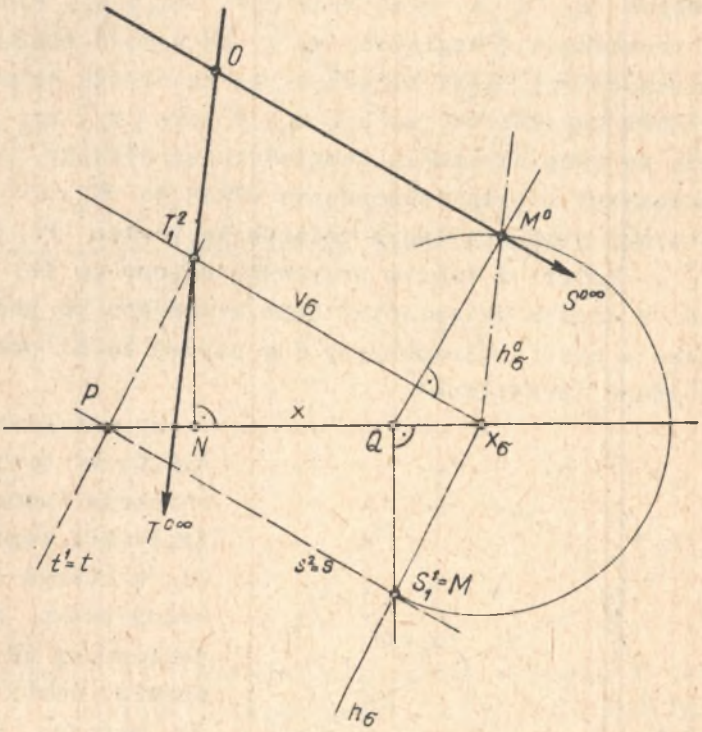


Rys. 6

Należy jeszcze zauważyć, że powyższa konstrukcja ważna jest jedynie dla tego przypadku, w którym dany, dowolny punkt hiperboli jest różny od jej wierzchołka. Gdyby bowiem za X_σ przyjąć wierzchołek hiperboli - w wyniku działań 1 ÷ 4 otrzymalibyśmy ślady płaszczyzny głównej σ prostopadłe do osi x (rys. 6). Kierunki rzutów by-

łyby wówczas prostopadłe do rzutni, czyli mielibyśmy do czynienia z rzutami Monge'a. Jest oczywiste, że rozważona metoda konstrukcji hiperboli w tym przypadku zawodzi, gdyż proste jednorzutne w rzutach Monge'a leżą na dwóch płaszczyznach (a nie na powierzchni stożkowej) i w przecięciu z płaszczyzną główną tworzą dwie krawędzie proste*).

W celu omówienia konstrukcji hiperboli nierównobocznej, tj. związanej z dowolnymi kierunkami rzutów, nieprostopadłymi do rzutni - na rys. 7 powtórzono sposób wyznaczenia asymptot hiperboli z rys. 4, dokonując dla większej przejrzystości kładu



Rys. 7

*) Można przyjąć, że powierzchnia stożkowa utworzona przez proste jednorzutne - w metodzie Monge'a i w bardzo szczególnym przypadku metody (S) (str. 6) degeneruje się do dwóch płaszczyzn. Odnośna hiperbola zniekształca się wówczas do dwóch przecinających się prostych.

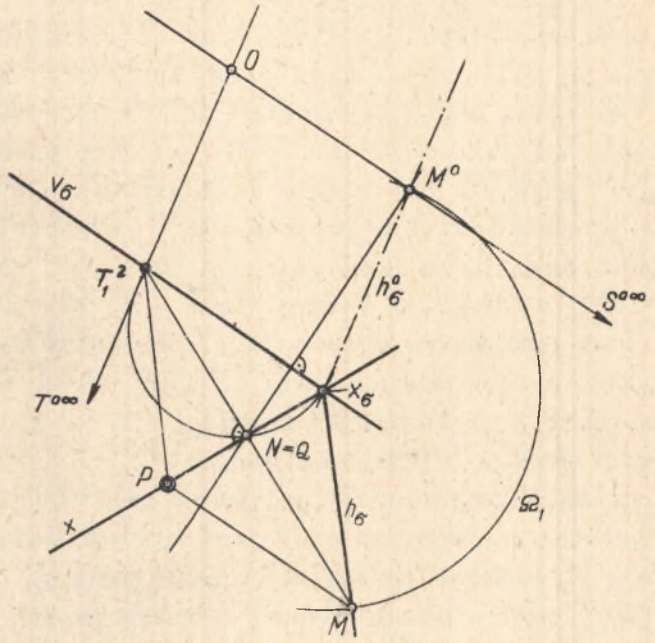
płaszczyzny w przeciwnym kierunku. Jak widać z rysunku znalezienie wiązki prostych jednorzutnych i płaszczyzny głównej, których elementy wspólne utworzą hiperbolę o danych asymptotach $OS^{0\infty}$, $OT^{0\infty}$ i punkcie X_σ wymaga następujących operacji:

1) wyznaczenia śladu v_σ jako prostej przechodzącej równolegle do $OS^{0\infty}$ przez dany punkt hiperboli X_σ. Prosta v_σ przecina się z asymptotą $OT^{0\infty}$ w punkcie T_1^2,
2) wyznaczenia kładu śladu h_σ - h_σ^0 jako prostej przechodzącej przez X_σ równolegle do asymptoty $OT^{0\infty}$. Prosta h_σ^0 przecina się z asymptotą $OS^{0\infty}$ w punkcie M^0,
3) skonstruowania na podstawie $\overline{X_\sigma T_1^2}$ równoległoboku $X_\sigma MPT_1^2$ takiego, w którym $\overline{X_\sigma M} = \overline{X_\sigma M^0}$ przy czym punkt M jest oryginałem punktu M^0. Przekątna tego równoległoboku przechodząca przez X_σ jest osią x, natomiast wierzchołek przeciwległy punktowi X_σ - P - środkiem wiązki prostych jednorzutnych.

Trudność całej konstrukcji polega na realizacji zagadnienia 3). W przypadku kiedy punkt dany jest wierzchołkiem hiperboli konstrukcję 3) rozwiązuje się stosunkowo prosto, gdyż równoległobok $X_\alpha MPT_1^2$ jest wówczas rombem, a zatem proste MQ i T_1^2N prostopadłe do osi x pokryją się z sobą (rys. 8) tworząc przekątną MT_1^2 prostopadłą do $X_\sigma P$. Aby więc znaleźć prostą x wystarczy na odcinku $X_\sigma T_1^2$ opisać półokrąg i wyznaczyć punkt, w którym przecina go prosta prostopadła do v_σ przechodząca przez M^0. Punkt ten jest punktem Q z rys. 7 zjednoczonym z punktem N i wraz z zadanym punktem X_α hiperboli ustala położenie osi x. Ślad h_σ jest wówczas oczywiście prostą symetryczną do v_σ względem osi x.

Należy zauważyć, że podobnie jak dla hiperboli równobocznej i ta konstrukcja ma ograniczone zastosowanie. Nie da się jej używać mianowicie w przypadku, gdy asymptoty są prostopadłe (wówczas rys. 8 przechodzi w rys. 6) oraz w przypadku, gdy asymptoty tworzą z sobą po stronie hiperboli kąt rozwarty. Fakt ten łatwo jest uzasadnić sprzecznością wymagań stawianych konstrukcji. Żądanie bowiem, by kąt $M^0OT_1^2$ (rys. 8) był kątem rozwartym, jest równoznaczne z żądaniem, by płaszczyzna główna σ była płaszczyzną dwuwidną (tj. taką, aby jeden z śladów płaszczyzny tworzył z danym kierunkiem

osi x kąt rozwarty wówczas, gdy drugi ślad tworzy z tym samym kierunkiem kąt ostry). Wynika to stąd, że asymptoty są równoległe do kładów śladów płaszczyzny głównej, a zatem w naszym



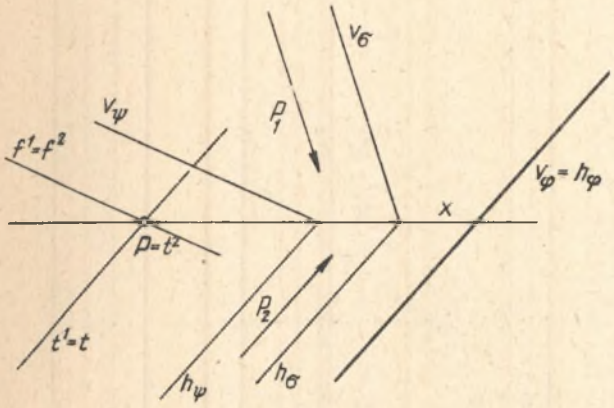
Rys. 8

przypadku musi zachodzić $\sphericalangle M^o X_\sigma T_1^2 > 90^o$. Nie trudno zaś stwierdzić, że nie jest to możliwe w omawianej konstrukcji, gdyż oś x jako przekątna rombu, którego dwa boki leżą na śladach h_σ i v_σ musi zawierać z tymi śladami kąty sobie równe. Z dyskusji tej można więc dodatkowo wywnioskować, że w przypadku równoległości obydwu kierunków rzutów do płaszczyzny dwuwidnej powstająca z przecięcia wiązki prostych jednorzutnych płaszczyzną główną hiperbola jest zawsze położona w ten sposób, że jej wierzchołki są punktami różnymi od punktu węzłowego płaszczyzny głównej.

Ponieważ wiązka prostych jednorzutnych w metodzie (S) tworzy powierzchnię stożkową, można by również rozważyć konstrukcję paraboli i elipsy jako krzywych przecięcia tej wiązki odpowied

nimi płaszczyznami. Należy jedynie znaleźć warunki, którym odpowiadać muszą odnośne płaszczyzny tnące.

W przypadku paraboli - płaszczyzna tnąca winna być równoległa do jednej tylko prostej jednorzutnej. Łatwo zauważyć, że warunku tego nie spełnia w żadnym przypadku płaszczyzna główna, jak również - ogólnie - płaszczyzna rzucająca o dowolnie przyjętym jednym śladzie. Rozważania wyjaśnia rys. 9, na którym przedstawiono dowolną płaszczyznę ψ - p_2 - rzucającą. Jest widoczne, że oprócz równoległości do prostej f spełniającej relację $f^2 \parallel v_\psi$ płaszczyzna ta jest również równoległa do szczególnej prostej t, bowiem zachodzi $t \parallel h_\psi$.



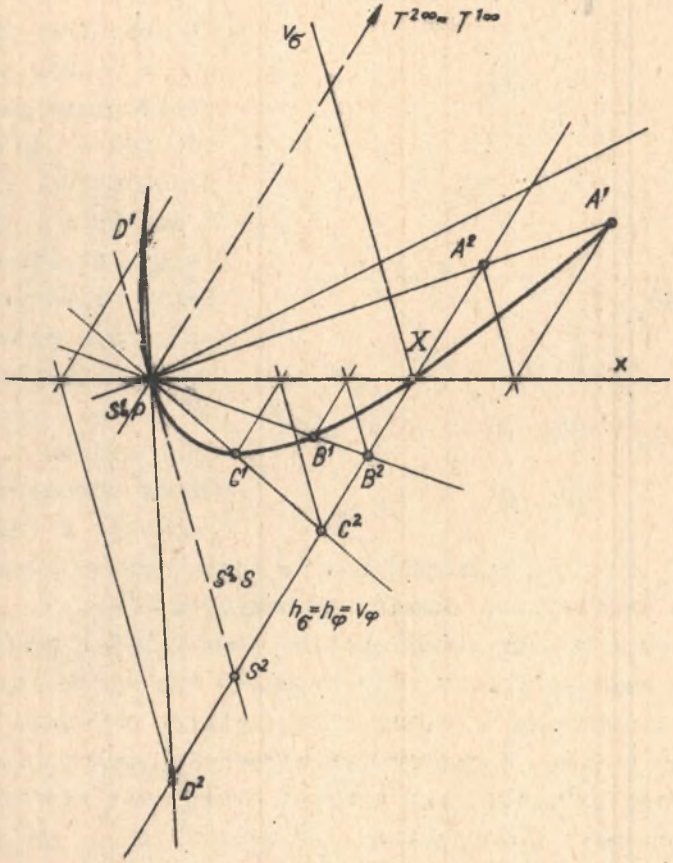
Rys. 9

Aby płaszczyzna ψ była równoległa do jednej tylko prostej jednorzutnej - obydwie proste f i t winny się zjednoczyć, a zatem ślady płaszczyzny ψ winny w rozwiniętym układzie rzutni pokrywać się z sobą. Warunkom tym odpowiada płaszczyzna φ.

Konstrukcję paraboli jako krzywej przecięcia wiązki prostych jednorzutnych płaszczyzną φ przedstawiono na rys. 10. Graficznie konstrukcja ta jest analogiczna do znanej konstrukcji paraboli wówczas, gdy dane są jej dowolne dwa punkty (S^1, X) oraz styczna i średnica przynależna do jednego z tych punktów (s, S^1 $T^{1\infty}$). Rozważania powyższe można by więc rozumieć jako dodatkowe uzasadnienie tej konstrukcji.

Przechodząc do omówienia przekroju wiązki prostych jednorzutnych w elipsie należy zanalizować warunki wykluczające równoległość płaszczyzny tnącej do jakiejkolwiek prostej tej wiązki. Ponieważ płaszczyzna równoległa do pewnej prostej zawiera proste równoległe do tej prostej, oznacza to, że płaszczyzna tnąca wiązkę prostych jednorzutnych w elipsie nie może przechodzić przez żadną prostą, której obydwa rzuty są do siebie równoległe.

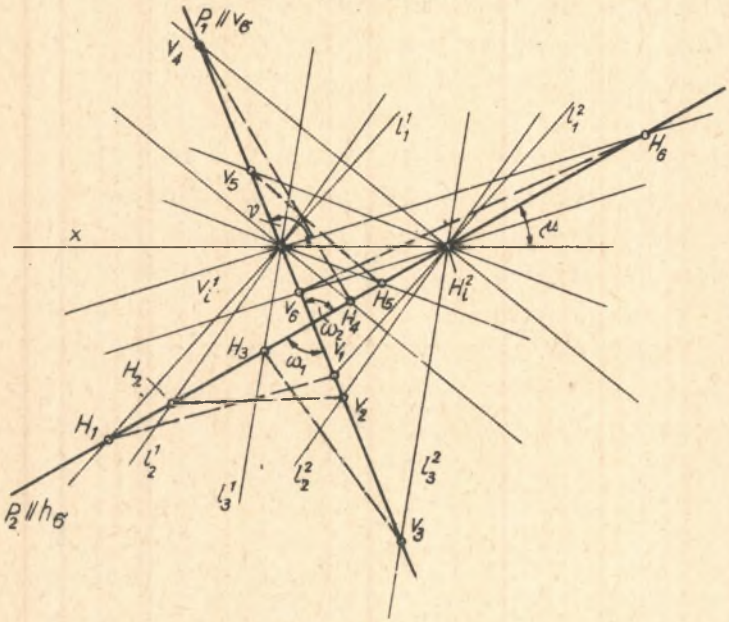
Rozważmy na rys. 11 dowolne kierunki rzutów p_1 i p_2 przechodzące przez dwa dowolne punkty osi x – V_1^1 i H_1^2. Zbadajmy jakim warunkom muszą odpowiadać płaszczyzny przechodzące przez



Rys. 10

proste, których obydwa rzuty są równoległe. W tym celu obierzmy pary dowolnych prostych równoległych $l_1^1 \parallel l_1^2$, $l_2^1 \parallel l_2^2$, $l_3^1 \parallel l_3^2$ .... itd. przechodzących odpowiednio przez punkty V_1^1 i H_1^2 i traktujmy je jako rzuty prostych l_1, l_2, l_3 .... równoległych do odpowiednich prostych jednorzutnych. Z warunków przynależności rzutów pierwszych do punktu V_1^1 i rzutów drugich do H_1^2 wynika, że ślady tych prostych H_1, V_1, H_2, V_2, H_3, V_3 itd. leżą odpowiednio na prostych p_2, p_1. Szeregi punktów $p_1(V_1, V_2$

V_3 ...) i $p_2(H_1, H_2, H_3$ .....) są rzutowe, gdyż powstały z przecięcia tych prostych przystającymi pękami prostych H_1^2 (l_1^2, l_2^2 ....) i $V_1^1(l_1^1, l_2^1$ ....), proste $H_1 V_1$, $H_2 V_2$, $H_3 V_3$... itp. są więc styczne do pewnej stożkowej, którą w naszym przypadku

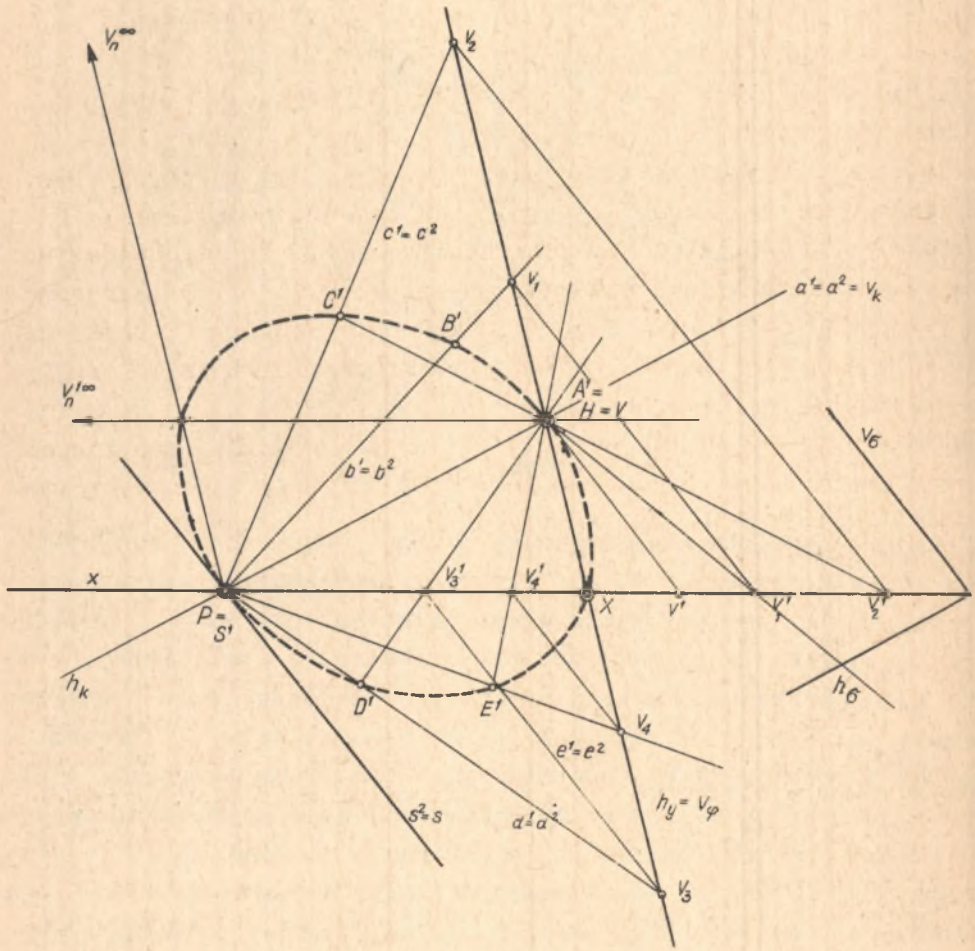


Rys. 11

stanowi hiperbola o asymptotach p_1, p_2. Jest zatem oczywiste, że żadna z prostych $H_1 V_1$ nie może przechodzić równocześnie przez obydwa obszary kątów wierzchołkowych $\omega_1 = \omega_2$, (wykluczając położenie pokrywające się z ramionami tych kątów), czyli nie może tworzyć z osią x kąta λ spełniającego nierówność: $\mu < \lambda < \nu$, w której μ i ν stanowią kąty utworzone przez proste p_1 i p_2 z osią x, mierzone analogicznie jak $\sphericalangle\lambda$.

Należy zauważyć, że wniosek powyższy jest niezależny od odległości dowolnie przyjętych w założeniu punktów H_1^2 i V_1^1. Wynika stąd zatem, że aby wyznaczyć ślady płaszczyzny φ, na której nie da się obrać prostej równoległej do jakiejkolwiek prostej jednorzutnej wystarczy przyjąć je np. jako zjednoczone z dowolną prostą m zawierającą z osią x kąt λ. Warunek ten wykorzystano w rys. 12 ilustrującym przekrój wiązki prostych jednorzutnych w elipsie.

Konstrukcja elipsy jest tu wielokrotną konstrukcją punktów przebicia płaszczyzny φ prostymi jednorzutnymi: $a(a^1 = a^2)$, $b(b^1 = b^2)$ .... Dla uproszczenia rysunku wyznaczono jedynie rzut pierwszy elipsy posługując się w konstrukcji punktów przebicia płaszczyznami pomocniczymi p_2 - rzucającymi przechodzącymi przez poszczególne proste jednorzutne, tj. płaszczyznami pęku o osi $h_{\varkappa}$.



Rys. 12

Z konstrukcji wynika, że równoległe do siebie proste: s^2 i HV^1 (jako równoległe do v_σ) są stycznymi do elipsy*). Ponieważ podstawowymi danymi do konstrukcji były: punkt P i prosta s (jako równoległa do założonego śladu v_σ) oraz punkt X i prosta $h_\varphi = v_\varphi$, na której leży punkt A ograniczający wraz z P jedną średnicę elipsy (w punkcie tym styczna jest równoległa do s) - przeto konstrukcję z rys. 12 można uważać za konstrukcję elipsy danej dwoma dowolnymi punktami i przynależnymi do jednego z nich styczną i średnicą (jako odcinkiem) tej krzywej. Warunki te są identyczne do tych, jakie rozważaliśmy przy omawianiu paraboli. Identycznie również przebiega konstrukcja jeżeli tylko uwzględnić, że odpowiednikiem punktu A^1 elipsy był punkt niewłaściwy $T^{1\infty}$ paraboli.

Wspólne cechy konstrukcji paraboli (rys. 10) i elipsy (rys. 12) skłaniają do przeanalizowania analogicznej konstrukcji hiperboli. Zagadnienie takie rozważono na rys. 13 wprowadzając dla dowolnie przyjętej płaszczyzny głównej σ - płaszczyznę φ taką, dla której w rozwiniętym układzie rzutni zachodzi $h_\varphi = v_\varphi$, przy czym proste te tworzą z osią x kąt różny od określonego wyżej kąta λ .

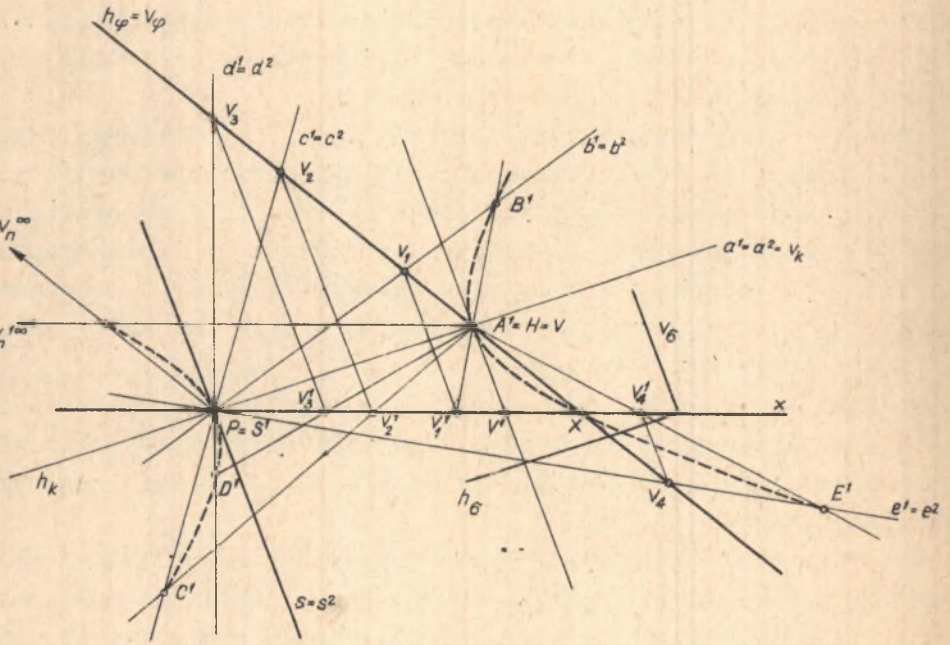
Podobnie jak w poprzednich przykładach konstrukcję ograniczono do wyznaczenia rzutu pierwszego hiperboli przyjmując przez poszczególne proste jednorzutne płaszczyzny p_2 - rzucające, tj. pęk płaszczyzn o osi $h_\varkappa \parallel h_\sigma$.

Proste s i $A^1 V^1$ są styczne do hiperboli i jednocześnie wzajemnie równoległe. Oznacza to, że punkty styczności A^1 oraz $P \in x$ leżą na jednej średnicy tej hiperboli. Analogicznie zatem jak w przypadku paraboli i elipsy konstrukcja przedstawiona na rys. 13 jest konstrukcją hiperboli danej dwoma punktami oraz styczną i średnicą (jako odcinkiem) przynależną do jednego z tych punktów, bowiem elementy te są równoważne układowi za

*) W dowodzie na to wystarczy zauważyć, że pęk prostych HV^1, o środku H jest rzutowy z pękiem prostych jednorzutnych o środku P. Tak więc prostej jednorzutnej $a(a^1 = a^2)$ odpowiada w pęku (H) prosta styczna do elipsy. Ponieważ jednak: $H = V = A^1$ - prostą styczną jest prosta HV^1, a ta z założenia musi być równoległa do s , gdyż jest to kierunek rzutów $p_1 \parallel v_\sigma$.

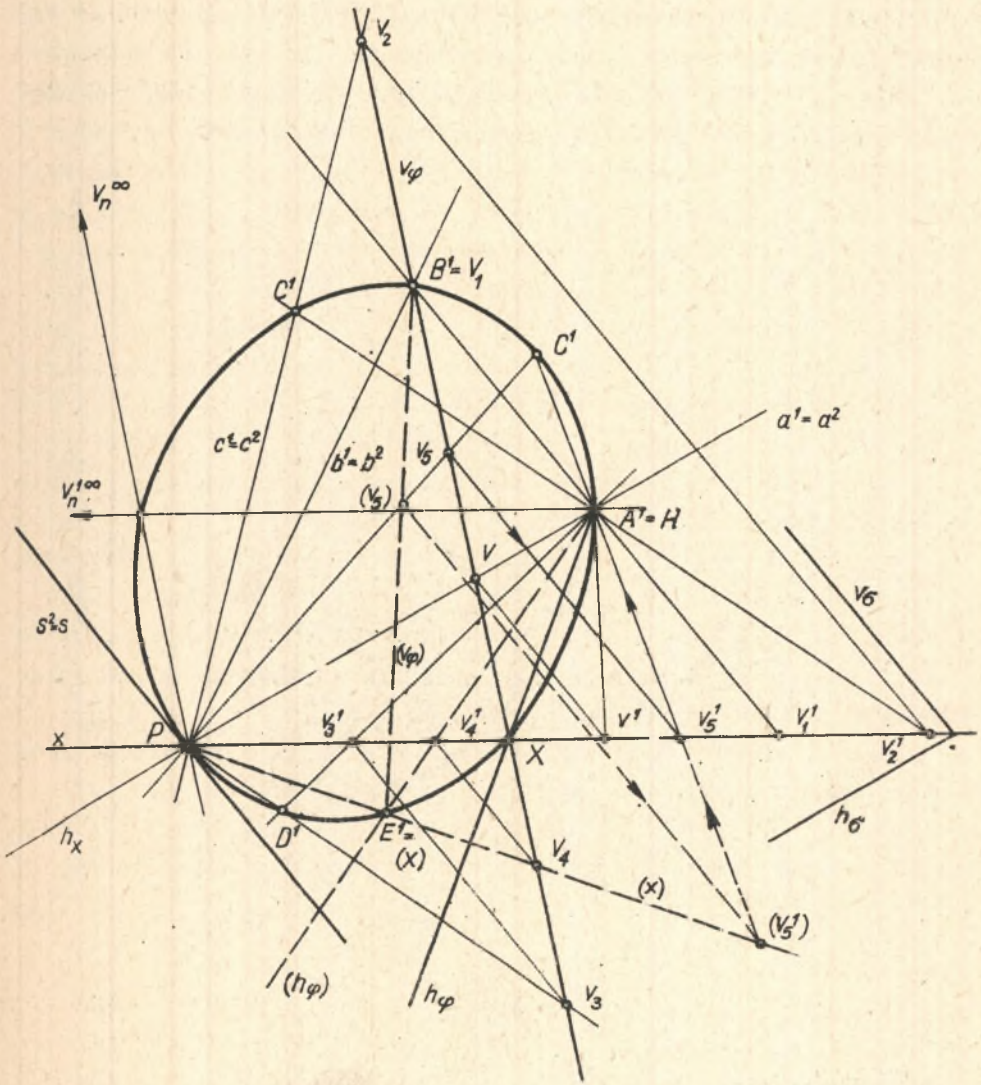
łożeń przyjętych w rys. 13 (przez dane dwa punkty hiperboli P i X przechodzi oś x, równolegle do stycznej s przechodzi ślad v_σ, równolegle do średnicy PA^1 prosta h_σ, punkt X oraz punkt A^1 ograniczający znaną średnicę ustala położenie śladów $h_\varphi = v_\varphi$).

Rozważania powyższe można również rozszerzyć na przypadek, w którym stożkowa dana jest czteroma dowolnymi punktami i styczną przynależną do jednego z nich. Odnośny przykład wyznaczenia



Rys. 13

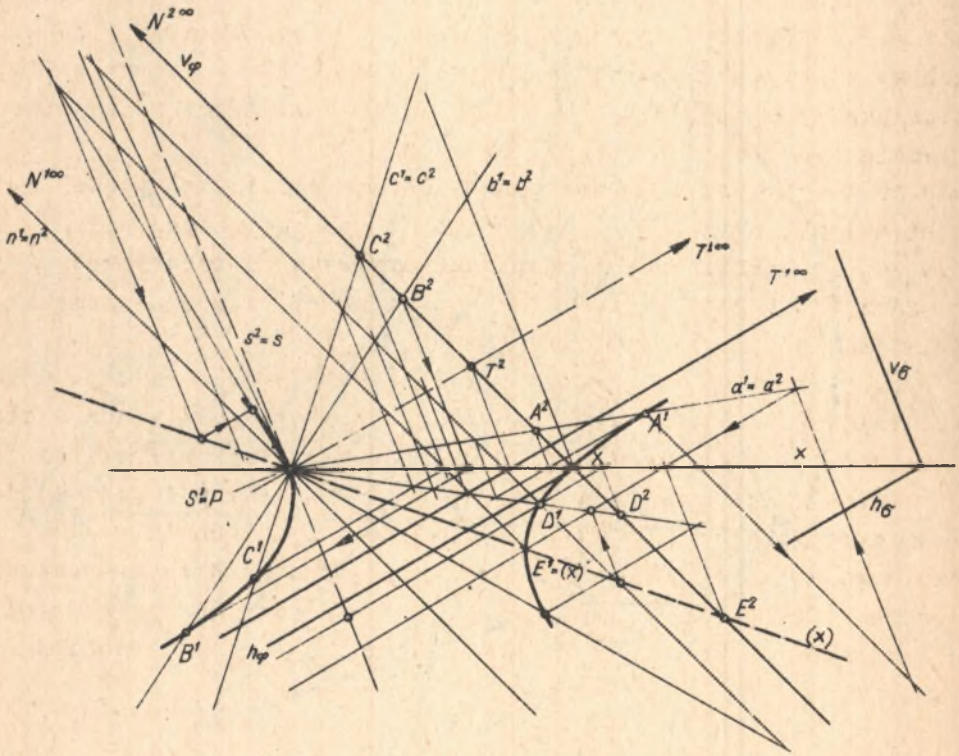
elipsy przedstawiono na rys. 14. W interpretacji rozważań elipsy jako przekroju wiązki prostych jednorzutnych przykład ten miałby następujące założenia: dane są kierunki rzutów równoległe do śladów płaszczyzny głównej σ. Dana jest również pewna


V_2
V_φ
V_n^∞
$B^1 = V_1$
C^1
C^1
$a^1 = a^2$
$c^1 = c^2$
$b^1 = b^2$
V_5
$V_n^{1\infty}$
(V_5)
$A^1 = H$
V
V_6
$s^2 = s$
(V_φ)
x
P
V_3^1
V_4^1
V^1
V_5^1
V_1^1
V_2^1
X
h_6
h_x
D^1
$E^1 =$
(X)
V_4
(x)
(V_5^1)
(h_φ)
h_φ
V_3

Rys. 14

płaszczyzna φ tnąca dowolną wiązkę prostych jednorzutnych w elipsie, przy czym ślady tej płaszczyzny w rozwiniętym układzie rzutni nie pokrywają się z sobą ($h_\varphi \neq v_\varphi$) *). Wyznaczyć krzywą przekroju.

Konstrukcję w rysunku 14 ograniczono również do wyznaczenia rzutu pierwszego elipsy. Analogicznie jak na rys. 12 poszczególne punkty elipsy znaleziono jako punkty przebicia płaszczyzny φ prostymi jednorzutnymi, przy czym jako płaszczyzny pomocnicze



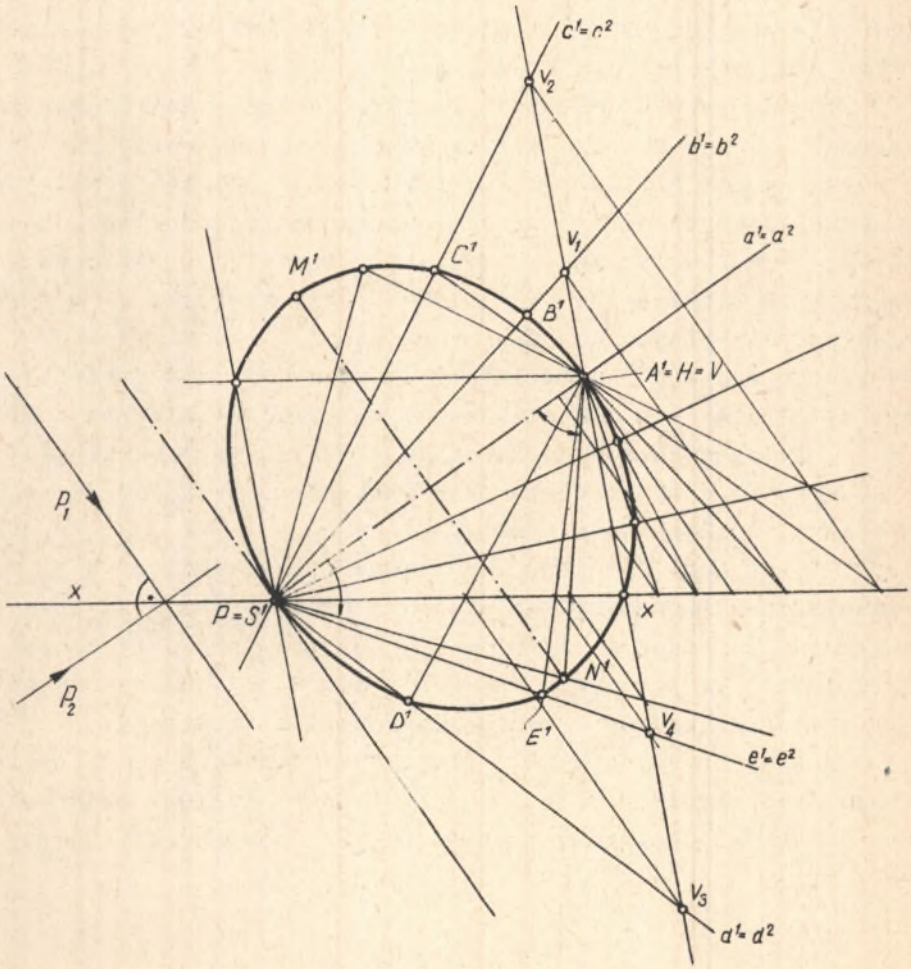
Rys. 15

*) Aby uniknąć doboru takiej płaszczyzny, która przecinałaby wiązkę prostych jednorzutnych w krzywej nie będącej elipsą, wystarczy, jak to wynika z rysunku 11 przyjąć ślady h_φ i v_φ tak, aby kąty utworzone przez nie z osią x odpowiadały warunkom stawianym kątowi λ ze str.17.

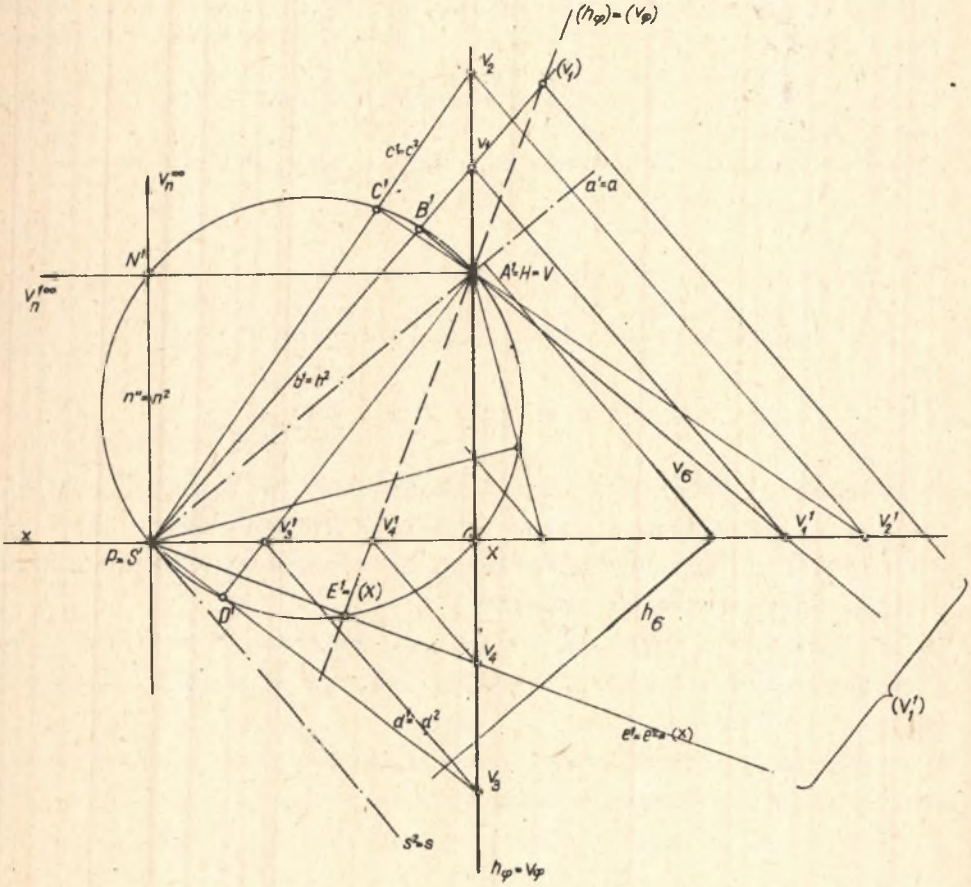
przechodzące przez te proste wprowadzono płaszczyzny p_2 - rzucające, czyli płaszczyzny pęku o osi $h_\varkappa // h_\sigma$. Przy zmianie jednego z punktów danych np. z X na $E^1 = (X)$ zasadniczy tok konstrukcji pozostanie ten sam, należy jedynie uwzględnić nowe położenie osi $(x) = PE^1$ i śladów płaszczyzny φ (obowiązują wówczas analogiczne oznaczenia w nawiasach).

Przy podobnych założeniach na rys. 15 rozważono konstrukcję hiperboli. W rysunku tym płaszczyznę tnącą φ przyjęto jako p_2 - rzucającą. W rezultacie interpretacja założeń jako elementów określających hiperbolę oznaczałaby dane: dowolne punkty krzywej P i X, styczną do krzywej w punkcie P (styczna $s // v_\sigma$) oraz punkty niewłaściwe $N^{1\infty}$ i $T^{1\infty}$, tj. kierunki asymptot równoległych kolejno do v_φ oraz h_φ.
Nie trudno zauważyć, uwzględniając odpowiedniość pomiędzy punktami elipsy A^1 i B^1 a niewłaściwymi punktami hiperboli $T^{1\infty}$ i $N^{1\infty}$, że konstrukcje obydwu tych krzywych są identyczne.

Na rys. 16 i 17 przedstawiono szczególne przypadki przekroju wiązki prostych jednorzutnych.
Z rys. 16 czytamy, że jeżeli pomiędzy kierunkami p_1 i p_2 w rozwiniętym układzie rzutni zachodzi prostopadłość, wówczas dla przekroju płaszczyzną φ $(h_\varphi = v_\varphi)$ otrzymujemy osie elipsy jako odcinki: $PA^1 // p_2$ i $M^1N^1 // p_1$. Podobna sytuacja zachodzić będzie dla przekrojów w postaci paraboli i hiperboli.
Aby otrzymać przekrój wiązki prostych jednorzutnych w postaci okręgu, płaszczyznę φ $(h_\varphi = v_\varphi)$ należy przyjąć prostopadle do osi rzutów. Szczegóły i uzasadnienie konstrukcji wynikają z rys. 17.



Rys. 16


$(h_\varphi)=(v_\varphi)$
V_2
(V_1)
$c^1=c^2$
V_4
V_n^{∞}
C'
B'
$a^1=a$
N'
$A^1=H=V$
V_n^{∞}
$b^1=h^2$
$n''=n^2$
v_6
x
V_3'
V_4'
V_1'
V_2'
$P=S'$
X
$E^1=(X)$
D'
h_6
V_4
(V_1')
$d^1=d^2$
$e^1=e^2=(X)$
V_3
$s^1=s$
$h_\varphi=v_\varphi$

Rys. 17

ПРЯМЫЕ ОСОБЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ В МЕТОДЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Содержание

Работа касается одного метода параллельного проектирования на две перпендикулярные плоскости. В методе рассмотрено прямые, которых проекции накрываются в развернутой системе плоскостей проекции.
Доказано, что множество этих прямых инцидентных с одной точкой оси проекции образует коническую поверхность.
Рассмотрено сечения этой поверхности в эллипсе, параболе и гиперболе.

SONDERGERADEN IN EINER PARALLELPROJEKTIONMETHODE

Zusammenfassung

Erwägungen betreffen eine Methode des Parallelprojezierens auf zwei senkrechten Ebenen. In dieser Methode betrachtet man Sondergeraden, deren Projektionen in einem abgewickelten Projektionsebenesystem zusammenfallen.
Es ist bewiesen, dass die Gesamtheit solcher, mit einem Projektionsachsenpunkt inzidierenden Geraden eine Kegelfläche bildet.
Man hat eine Ellipse, eine Parabel und Hyperbel als Durchschnitte dieser Fläche betrachtet.