ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 114 Matematyka - Fizyka z.5 1964

STANISŁAW OCHOŃSKI

RZUT PROSTOKĄTNY NA DWIE NIEPROSTOPADŁE RZUTNIE

Wstęp

W niniejszym artykule omówiono pewne uogólnienie metody Monge'a ograniczające się do podania zasady odwzorowania punktu, prostej i płaszczyzny[1].

1. Zasada odwzorowania

W trójwymiarowej przestrzeni wyróżnijmy dwie płaszczyzny π_1 i π_2 spełniające warunek:

a) $0^\circ < \vartheta < 180^\circ$, gdzie $\vartheta = \sphericalangle \pi_1 \pi_2$

Ponadto obierzmy dwa kierunki rzutów $k_1 \perp \pi_1$, oraz $k_2 \perp \pi_2$. Płaszczyznę π_1 wraz z kierunkiem k_1 $(i = 1,2)$ będziemy nazywali aparatem rzutowym. Ponieważ $k_i \perp \pi_i$ aparaty te nazwiemy normalnymi. Rozważana metoda odwzorowania jest uogólnieniem metody Monge'a polegającym na zastąpieniu pionowej rzutni, rzutnią nachyloną do rzutni π_1 pod kątem $\vartheta = \sphericalangle \pi_1 \pi_2$ spełniającym warunek "a".

Omawianą metodę oznaczymy krótko przez (B), a metodę Monge'a przez (M). Zespół dwu aparatów rzutowych spełniających warunki:

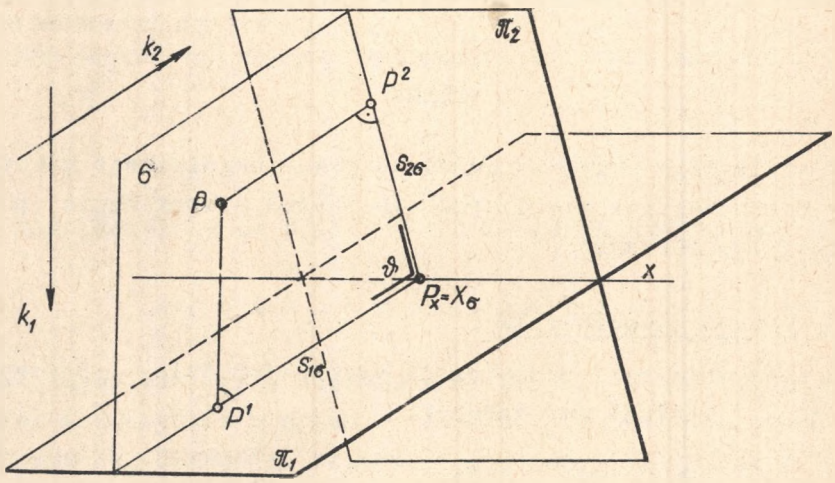
a) $0^\circ < \vartheta < 180^\circ$

b) $k_1 \perp \pi_1$, oraz $k_2 \perp \pi_2$ nazwiemy układem metody (B).

---

[1] Pracę tę autor referował na Konferencji Katedr Geometrii Wykreślnej odbytej w czerwcu 1961 roku w Rogowie.

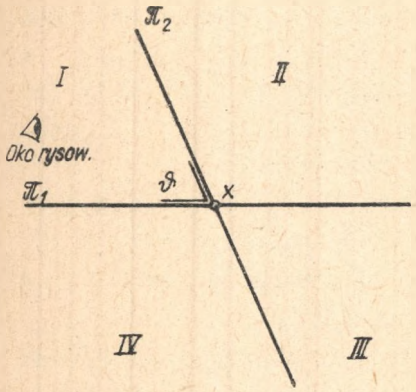
W takim układzie rzutnie determinują prostopadłe do nich kierunki rzutów, a więc układ jest wyznaczony przez przyjęcie dwóch płaszczyzn jako rzutni (rys. 1).
Płaszczyznę σ prostopadłą do krawędzi przecięcia się rzutni $x = \pi_1 \cdot \pi_2$ będziemy nazywali płaszczyzną główną jest ona równoległa do kierunków k_1 i k_2.



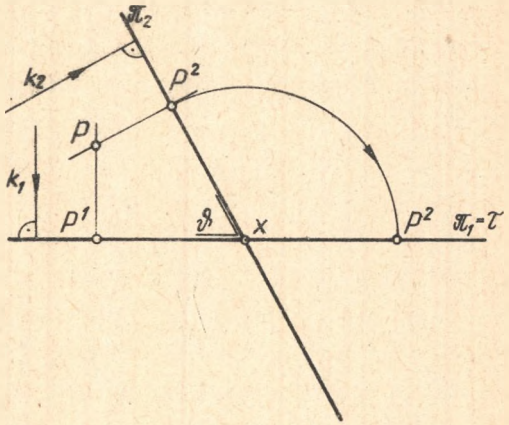
Rys. 1

Rzutnie układu metody (B) dzielą przestrzeń na cztery obszary, które wyznaczają cztery kąty dwuścienne parami równe.
Wielkości tych kątów ujawnimy przecinając rzutnie π_1 i π_2 układu (B) płaszczyzną główną σ.
Poszczególne obszary oznaczamy symbolami I, ... IV, zakładając że oko rysownika względnie obserwatora znajduje się w obszarze pierwszym (rys. 2).
Ślady płaszczyzn α, β, na rzutniach π_1 i π_2 oznaczać będziemy odpowiednio: $S_{1\alpha}$, $S_{1\beta}$ ....., oraz $S_{2\alpha}$, $S_{2\beta}$ .....
Parę śladów $S_{1\sigma}$, $S_{2\sigma}$ płaszczyzny głównej σ nazwiemy parą odnoszących układu (B); są one prostopadłe do osi x.
Analogicznie jak w metodzie (M) sprowadzamy rzutnie układu (B) do jednej płaszczyzny rysunku, przez obrót dookoła osi x jednej z rzutni do pokrycia się z pozostałą rzutnią zakładając

przy tym, że obrót ten odbywa się w obszarze II i IV oraz że jedna z rzutni jest identyczna z płaszczyzną rysunku (rys. 3).

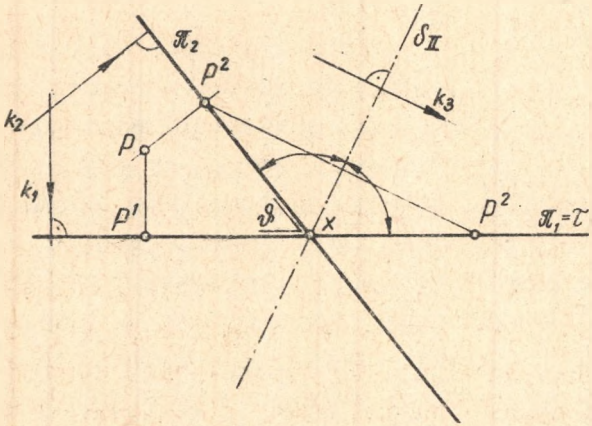


Rys. 2



Rys. 3

Można oczywiście zastosować tu i drugą interpretację sprowadzenia rzutni układu (B) do jednej płaszczyzny rysunku, przez rzut punktów płaszczyzny π_2 w kierunku k_3 prostopadłym do płaszczyzny symetrii kąta dwuściennego obszarów II i IV na rzutnię π_1, co przedstawia schematycznie rysunek 4.

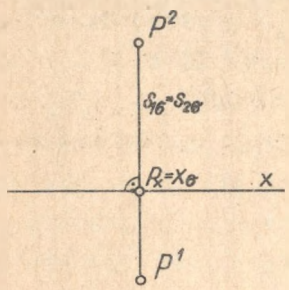


Rys. 4

1.1. Odwzorowanie punktów

Każdemu punktowi P w przestrzeni E_3 możemy przy pomocy aparatów rzutowych (π_1, k_1) i (π_2, k_2) przyporządkować parę rzutów prostokątnych $P^1 \epsilon \pi_1$ i $P^2 \epsilon \pi_2$ przynależnych odpowiednio do pary odnoszących $S_{1\sigma}$, $S_{2\sigma}$ (rys. 1).
Twierdzenie odwrotne jest również słuszne, a więc jeżeli dwa punkty P^1 i P^2 spełniają warunek: $P^1 \epsilon S_{1\sigma}$ i $P^2 \epsilon S_{2\sigma}$, a proste $S_{1\sigma}$ i $S_{2\sigma}$ tworzą parę odnoszących, to istnieje jeden i tylko jeden punkt P w przestrzeni dla którego dane punkty P^1 i P^2 są parą rzutów w układzie B.
Warunek $P^1 \epsilon S_{1\sigma}$ i $P^2 \epsilon S_{2\sigma}$ jest zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym dla odwzorowania punktu P w układzie (B).

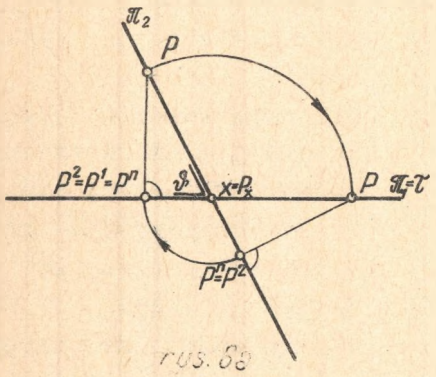
Punkt P^1 będziemy nazywali rzutem pierwszym punktu P, a punkt P^2 odpowiednio rzutem drugim punktu P.
Po sprowadzeniu rzutni układu (B) do jednej płaszczyzny rysunku otrzymujemy rozwinięcie, albo inaczej rysunek roboczy przedstawiony na rys. 5.
Odnoszące $S_{1\sigma}$ i $S_{2\sigma}$ jako proste prostopadłe do osi x, po rozwinięciu wzajemnie pokrywają się tworząc jedną prostą prostopadłą do osi x, którą krótko nazwiemy odnoszącą. Jednakże na podstawie rys. 5 nie można w sposób jednoznaczny odtworzyć położenia punktu P w przestrzeni, ponieważ rysunek ten nie pozwala odtworzyć wzajemnego położenia rzutni układu.



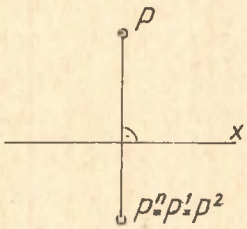
Rys. 5

Najprościej można zdeterminować wzajemne położenie obu rzutni przez podanie kąta nachylenia rzutni π_2 do π_1.
Ponieważ płaszczyzna główna σ jest prostopadła do obu rzutni, przeto jej ślady wyznaczają cztery kąty płaskie odpowiednio równe kątom dwuściennym wyznaczonym przez cztery obszary. W celu uniknięcia wieloznaczności, oznaczmy przez ϑ kąt wyznaczony przez obszar I. (rys. 1). Ustawienie rzutni π_2 względem rzutni π_1 możemy też jednoznacznie ustalić przez podanie na jednej z rzutni, pewnego punktu nieleżącego na osi x oraz jego rzutu prostokątnego na pozostałą rzutnię (rys. 6a, 6b).

Oznaczmy ów wybrany punkt przez P, a jego rzut normalny przez P^n, co oznacza, że $P^n = P^1$, lub $P^n = P^2$, w zależności od tego czy oryginał P przynależny do rzutni π_2, czy też do rzutni π_1.



Rys.6a



Rys.6b

Z rysunku 6a czytamy, że stosunek $\overline{PP_x}$: $\overline{P^nP_x}$ = constans, dla danego kąta ϑ.

Ponadto należy tu zwrócić uwagę na następujące bardzo istotne szczegóły:

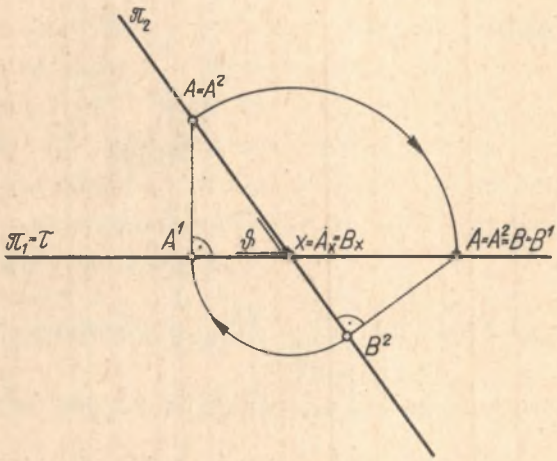
a) Dla każdego położenia punktu P odcinek $\overline{P^nP_x}$ jest rzutem prostokątnym odcinka PP_x wobec czego spełniona musi być następująca nierówność:

$$(\overline{PP_x}) > (\overline{P^nP_x} \qquad (1)$$

b) Przez sprowadzenie rzutni układu (B) do jednej płaszczyzny rysunku τ, uzyskujemy dwa układy osiowo powinowate złączone dwoma różnymi związkami powinowactwa pochodzącymi z odwzorowania rzutni π_2 na rzutnię π_1 przez rzut równoległy w kierunku k_1 oraz z odwzorowania rzutni π_1 na rzutnię π_2 w kierunku k_2.

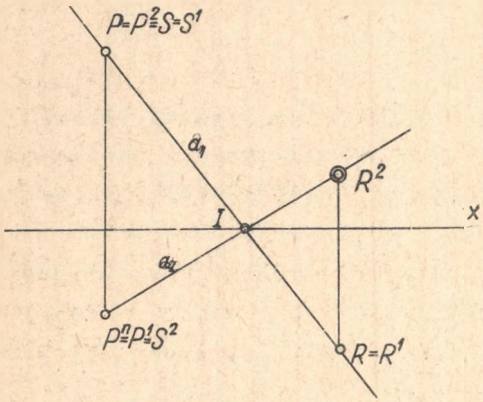
c) Każdy punkt płaszczyzny rysunku, może być uważany za punkt przynależny do układu π_1 lub do układu π_2. Jeżeli np. założymy, że $A \in \pi_2$ i wykreślimy na mocy rów-

ności $\overline{PP_x} : \overline{P^nP_x} = c$ jego rzut A^1, to kładąc $A = B$, ale $B \in \pi_1$ otrzymamy jego rzut B^2 identyczny z rzutem A^1 punktu A (rys. 7). Wynika stąd, że jeżeli jest dana jedna taka para punktów, a mianowicie oryginał P na jednej rzutni i jego rzut ortogonalny P^n na pozostałą rzutnię, to obierając dowolnie punkty $R \in \pi_1$, $Q \in \pi_2$ możemy wykreślić ich rzuty tak jak to pokazano na rysunku 8 i 9.

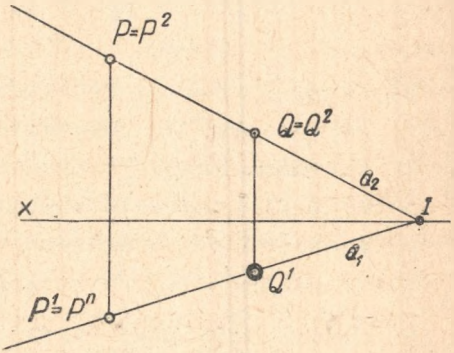


Rys. 7

Aby bardziej poglądowo wyjaśnić konstrukcję kąta ϑ, należy wykonać kład płaszczyzny głównej na płaszczyznę rysunku τ. (rys. 10). Przyjmijmy, że dany jest punkt $A \in \pi_2$ nieleżący na osi x oraz że punkt A^1 jest rzutem prostokątnym punktu A na rzutnię π_1. Jeżeli obrócimy płaszczyznę główną σ dokoła śladu $S_{1\sigma}$ o kąt 90^0 to prosta

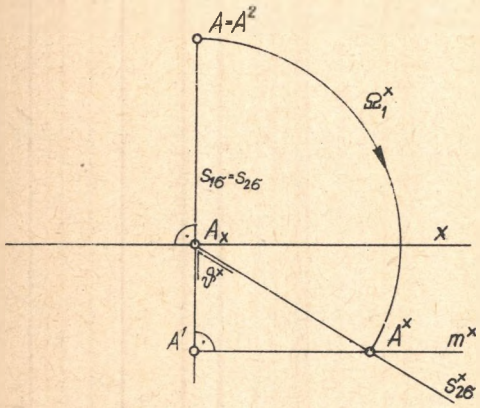


Rys. 8



Rys. 9

m^x przechodząca przez punkt A^1 i prostopadła do śladu $S_{1\sigma}$ jest kładem normalnej do rzutni π_1 przechodzącej przez oryginał A. Występujący na rzutni π_2 w naturalnej wielkości odcinek $\overline{A_xA}$ wystąpi w niezmienionej długości i w kładzie, a więc należy wykreślić okrąg Ω_1^x o środku w punkcie A_x i promieniu $\overline{A_xA}$. Okrąg ten wyznaczy na prostej m^x kład A^x punktu A. Prosta $A_xA^x = S^x_{2\sigma}$ jest kładem śladu $S_{2\sigma}$ i wraz ze śladem $S_{1\sigma}$ wyznacza kąt $\vartheta = \sphericalangle S_{1\sigma} S_{2\sigma}$.



Rys. 10

Aby rozważana konstrukcja posiadała sensowne rozwiązanie musi być spełniony warunek:

$$\varrho\,|A^1 A_x| < \varrho\,|A A_x|$$

Okrąg Ω_1^x przecina prostą m^x w dwu punktach – co wyraża, że płaszczyznę główną σ można położyć na rzutnię π_1 przez obrót dokoła $S_{1\sigma}$ o kąt 90° na dwa różne sposoby.
Ponadto umowa, że ϑ oznacza kąt wyznaczony obszarem I wyróżnia jednoznacznie ten kąt spośród czterech kątów wierzchołkowych wyznaczonych przez proste $S_{1\sigma}$ i $S^x_{2\sigma}$.

Jeżeli rzut pierwszy A^1 punktu A jest punktem wewnętrznym odcinka $A_x A$, to kąt ϑ jest kątem rozwartym (rys. 11). Kładąc natomiast płaszczyznę główną σ na rzutnię π_2 przez obrót dokoła śladu $S_{2\sigma}$ o kąt 90° (rys. 12), to trójkąt $A_xA^{1x}A$ zbudujemy przy pomocy półkola Ω_2 i łuku okręgu Ω_3.
Jest też widoczne, że istnieje rozwiązanie czyli punkt przecięcia się okręgów Ω_2 i Ω_3 jeżeli leżący na zewnątrz odcinka $\overline{AA_x}$ punkt A^1 spełnia warunek: $/AA_x/ > /A^1A_x/$, lub jeżeli punkt A^1 leży wewnątrz odcinka $\overline{A_xA}$.

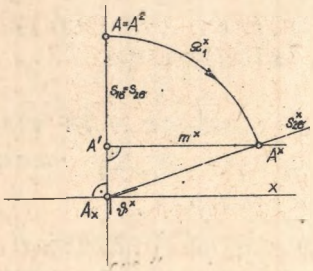
Należy zauważyć, że dla układu (B), w którym rzutnie π_1 i π_2 zawierają kąt $\vartheta \neq 90^0$ – dla każdego punktu $S_2 \in \pi_2$ i dla każdego punktu $S_1 \in \pi_1$ zachodzi związek:

$$\frac{\overline{S_2 S_x}}{S_2^1 S_x} = \frac{\overline{S_1 S_x}}{S_1^2 S_x} = \frac{\overline{PP_x}}{P^n P_x} = \text{constans}$$

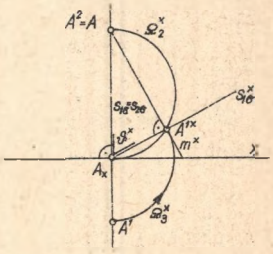
a w konsekwencji w rozwinięciu otrzymujemy następującą relację:

$$(S_2 S_2^1 ; S_x) = (S_1 S_1^2 ; S_x) = (P P^n ; P_x) = \text{constans}$$

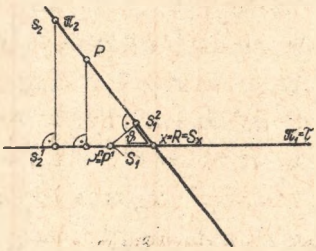
przy czym jest to własność charakterystyczna tylko dla punktów przynależnych do rzutni układu (B) rys. 13.
Szczegół ten został dlatego tak zaakcentowany, ponieważ na podstawie tych związków będziemy wykreślali ślady prostych określonych przez ich rzuty.



Rys. 11



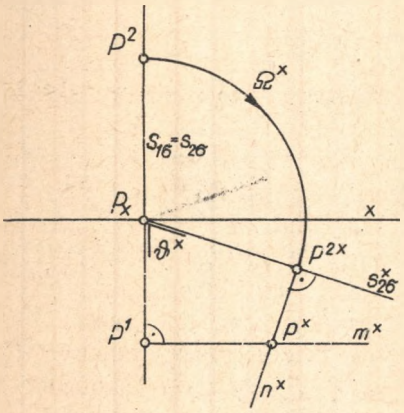
Rys. 12



Rys.13

1.2. Odtwarzanie punktów

Aby odtworzyć w sposób jednoznaczny położenie punktu P względem układu (B), którego rzuty P^1 i P^2 są dane w rozwinięciu tym układzie, to musimy założyć, że znany jest jeszcze kąt ϑ. Znając kąt ϑ wykreślamy kład $S^x_{2\sigma}$ śladu $S_{2\sigma}$ płaszczyzny głównej σ przechodzącej przez odtwarzany punkt P. Okrąg Ω $(P_x, \overline{P_x P^2})$ wyznaczy na prostej $S^x_{2\sigma}$ kład P^{2x} rzutu P^2 punktu P na rzutnię π_1 (rys. 14). Prosta $m^x \in P^1$ i $m^x \perp S_{1\sigma}$ oraz prosta $n^x \in P^{2x}$ i $n^x \perp S^x_{2\sigma}$ przecinają się w punkcie P^x, który jest kładem oryginału P. Należy zaznaczyć, że istnieje zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie P^x dla każdej pary rzutów P^1 i P^2 przynależnej do odnoszącej.



Rys. 14

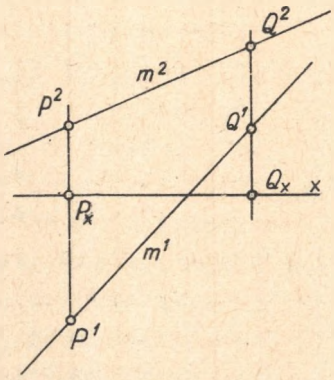
Odcinek $\overline{P^1P^x}$ wyraża odległość oryginału P od rzutni π_1, zaś odcinek $\overline{P^{2x}P^x}$ odległość punktu P od rzutni π_2.

Jeżeli przyjmiemy proste $S_{1\sigma}$ i $S^x_{2\sigma}$ jako osie kartezjańskiego układu odniesienia na płaszczyznie głównej σ, to punkty P^1 i P^{2x} wyznaczają współrzędne kowariantne punktu P. Posługując się tym kładem możemy wskazać położenie oryginału względem płaszczyzny rysunku w ten sposób, że "podniesiemy" położoną płaszczyznę główną σ w jej pierwotne położenie.

1.3. Odwzorowanie prostych

W układzie (B) obierzmy dwa różne punkty $P(P^1, P^2)$ i $Q(Q^1, Q^2)$ zakładając, że nie leżą one w tej samej płaszczyźnie głównej σ. Punkty te wyznaczają prostą $m = PQ$, której rzutami są proste: $m^1 = P^1Q^1$ i $m^2 = P^2Q^2$. Z przynależności punktów P i Q do dwu różnych płaszczyzn głównych wynika, że żaden z rzutów m^1 i m^2 nie jest prostopadły do osi x. Na odwrót, jeżeli rzuty m^1 i m^2 spełniają powyższy warunek, to istnieje jedna i tylko jedna prosta m w przestrzeni, dla której proste

m^1 i m^2 są rzutami. Dla dowodu wystarczy proste m^1 i m^2 przeciąć dwiema różnymi odnoszącymi, które wyznaczą dwa różne punkty $P(P^1, P^2)$ i $Q(Q^1, Q^2)$, a więc jedną tylko prostą $m = PQ$ (rys. 15).



Rys. 15

1.4. Ślady prostej

Punkty przebicia rzutni przez prostą nazywają się śladami tej prostej. Punkt $S_{1m} = m \cdot \pi_1$ nazwiemy śladem pierwszym prostej m, zaś punkt $S_{2m} = m \cdot \pi_2$ śladem drugim owej prostej.

W praktyce rysunkowej najchętniej posługujemy się dla odwzorowania prostej jej śladami, pod warunkiem, że są to dwa różne punkty, a więc z wyłączeniem prostych przecinających oś x. Aby jednak obrane dowolnie punkty S_{1m} (S_{1m}, S^2_{1m}) i $S_{2m}(S_{2m}, S^1_{2m})$ były istotnie śladami pewnej prostej m należy zagwarantować przynależność $S_{1m} \in \pi_1$ i $S_{2m} \in \pi_2$. Z równości $\overline{PP_x} : \overline{P^{II}P_x} =$ = const. wynika, że przynależność ta będzie spełniona jeżeli zachowamy

$$(S_{1m}, S^2_{1m}; S_{xm}) = (S_{2m}, S^1_{2m}, S_{xm})$$

Dla śladów nieprzynależnych do wspólnej odnoszącej $S_{1\sigma} = S_{2\sigma}$ powyższy warunek jest równoważny żądaniu, aby pomocnicze proste $S_{1m}\,S_{2m}$ i $S^2_{1m}\,S^1_{2m}$ przecinały się w punkcie I leżącym na osi x co przedstawiono na rysunku 16.

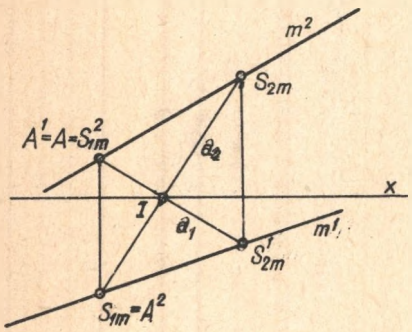
Gdy prosta przynależy do płaszczyzny głównej, to posiada ona jedno z trzech wzajemnie wykluczających się położeń:

1) $a \parallel k_1$ i wówczas $a^1 = S_{1a}$, $a^2 \perp x$, $S_{2a} \in a^2$

2) $b \parallel k_2$ i wówczas $b^2 = S_{2b}$, $b^1 \perp x$, $S_{1b} \in b^1$

3) $k_1 \nparallel C \nparallel k_2$ i wówczas $C^1 = C^2 \perp X$

W przypadku trzecim rzuty prostej nie wyznaczają prostej w przestrzeni. Aby odwzorowanie to było doskonałym należy podać rzuty dwu różnych punktów owej prostej.



Rys.16

Każda inna kombinacja dwu rzutów p^1 i p^2 nie objęta powyższymi przypadkami nie przedstawia prostej w przestrzeni, dla której dane w rozwinięciu proste p^1 i p^2 stanowiłyby parę rzutów. Jeżeli dane są rzuty prostych przynależnych do płaszczyzny głównej (położenia od 1-3), to ich ślady realizujemy przy pomocy kładu płaszczyzny głównej σ o kąt 90° dokoła jednego z jej śladów na płaszczyznę rysunku. Jeżeli prosta nie leży w płaszczyźnie głównej σ, to jej ślady wyznaczymy na podstawie następującego rozumowania:

Niech rozważana prosta nazywa się "m".

Szukane ślady S_{1m} i S_{2m} prostej spełniać muszą następujący układ warunków:

a) ., $S_{1m} \in m$

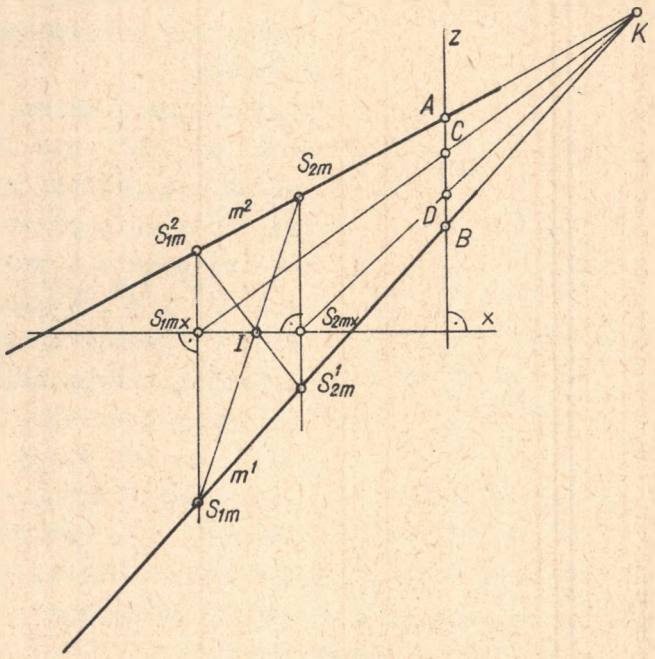
b) ., $S_{2m} \in m$

c) ., $(S_{1m}\,S^2_{1m},\ S_{1mx}) = (S_{2m}\,S^1_{2m},\ S_{2mx}) = \text{constans}.$

Na rysunku 17 odwzorowano prostą m za pomocą dwu rzutów m^1 i m^2. Poprowadźmy pomocniczą prostą $z \perp x$, która na rzutach m^1 i m^2 wyznacza odcinek $\overline{AB}$, a następnie podzielmy ten odcinek przy pomocy punktów C i D tak, aby zachodziła równość:

$$(AB, C) = (BA, D) = \text{constans}.$$

Oznaczmy punkt przecięcia prostych m^1 i m^2 przez K.



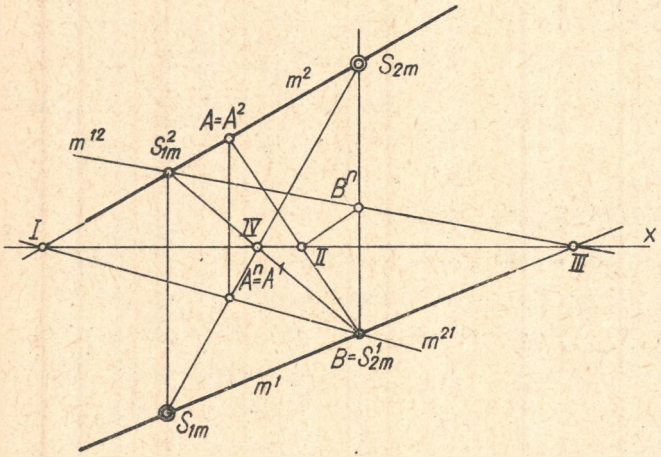
Rys. 17

Proste KC i KD przetną oś x w punktach S_{1mx} i S_{2mx}, a przeprowadzone przez te punkty odnoszące wyznaczą ślady danej prostej gdyż: $(AB,C) = (S^2_{1m}\ S_{1m},\ S_{1mx}) = (S^1_{2m}\ S_{2m}\ S_{2mx}) = (BA,D)$. Punkt przecięcia się pomocniczych prostych $S_{1m}\ S_{2m}$ i $S^2_{1m}\ S^1_{2m}$ leżący na osi x jest sprawdzianem poprawności przeprowadzonej konstrukcji.

Dyskusja przeprowadzonej konstrukcji.

1. Jeżeli $C = A$ wówczas $\vartheta = 90^\circ$, gdzie $\vartheta = \sphericalangle \pi_1 \pi_2$.
2. Jeżeli punkt C jest wewnętrznym punktem odcinka AB wówczas kąt $\vartheta < 90^\circ$.
3. Jeżeli punkt $C = S$, gdzie $S = 1/2\ \overline{AB}$ wówczas kąt $\vartheta = 0$.
4. Jeżeli punkt C jest zewnętrznym punktem odcinka AB to kąt $\vartheta > 90^\circ$.

Rysunek 18 jest ilustracją nieco innego sposobu wyznaczenia śladów prostej gdy znane są jej rzuty. Aby jednak wyznaczyć owe ślady musimy uprzednio jednoznacznie zdeterminować położenie



Rys. 18

rzutni π_2 względem rzutni π_1 - co czynimy przez wyróżnienie pewnego punktu $A^2 \in m^2 \in \pi_2$ i jego rzutu prostokątnego A^n na rzutnię π_1. Prosta $m^{2,1}$ łącząca punkt $I = m^2 x$ i punkt A^n jest rzutem pierwszym rzutu drugiego prostej m. Po prowadzona przez punkt $S^1_{2m} = m^{2,1}\ m^1$ - rzut pierwszy śladu drugiego prostej m odnosząca przecina prostą m^2 w punkcie S_{2m} - szukanym śladzie drugim prostej m.

Zakładając, że $S^1_{2m} = B^1 \in m^1 \in \pi_1$, wyznaczamy następnie rzut normalny B^n punktu B na rzutnię π_2, korzystając ze

związku powinowactwa osiowego pochodzącego z odwzorowania rzutni π_1 na π_2 przez rzut równoległy w kierunku k_2 oraz z odwzorowania rzutni π_2 na π_1 przez rzut równoległy w kierunku k_1 (rys. 8). Punkty III i B^n wyznaczają rzut drugi rzutu pierwszego prostej m. Proste $m^{1,2}$ i m^2 przecinają się w punkcie S^2_{1m}, który jest rzutem drugim śladu pierwszego prostej m.
Poprowadzona przez ten punkt odnosząca przecina prostą m^1 w punkcie S_{1m} - śladzie pierwszym rozważanej prostej.

Podobnie jak poprzednio punkt przecięcia się pomocniczych prostych S_{2m} S_{1m} i S^1_{2m} S^2_{1m}, leżący na osi x jest sprawdzianem poprawności przeprowadzonego rozumowania, a wyznaczone w ten sposób ślady spełniają następujący układ warunków:

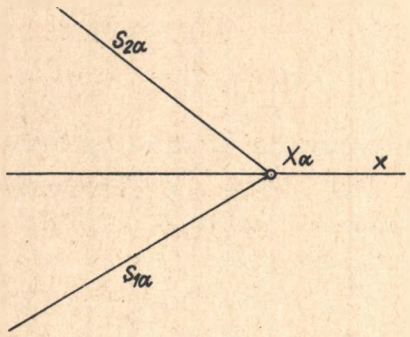
a) ., $S_{1m} \in m$

b) ., $S_{2m} \in m$

c) ., $(S_{1m}\, S^2_{1m},\, S_{1mx}) = (S_{2m}\, S^1_{2m},\, S_{2mx})$ = constans

1.4. Odwzorowanie płaszczyzn

Podobnie jak w metodzie odwzorowania (M) najprościej odwzorowuje się płaszczyznę w układzie (B) przy pomocy jej śladów. Pomijając przypadek płaszczyzny przechodzącej przez oś x, ślady płaszczyzny są dwiema prostymi przynależnymi do tej płaszczyzny i wyznaczają w sposób jednoznaczny jej położenie, oczywiście przy założeniu, że znany jest kąt $\vartheta = \sphericalangle \pi_1 \pi_2$.



Rys. 19

Ten sposób odwzorowania płaszczyzn posiada jeszcze i tę zaletę, że w pewnych szczególnych przypadkach można bezpośrednio z rysunku roboczego odczytać położenie danej płaszczyzny względem układu. Jeżeli płaszczyzna α nie jest równoległa do osi x, to trójka płaszczyzn α, π_1, π_2 musi mieć wspólny punkt, a

więc ślady dowolnej płaszczyzny α muszą się przeciąć w punkcie X_α; punkt ten nazywamy punktem węzłowym płaszczyzny (rys. 19).

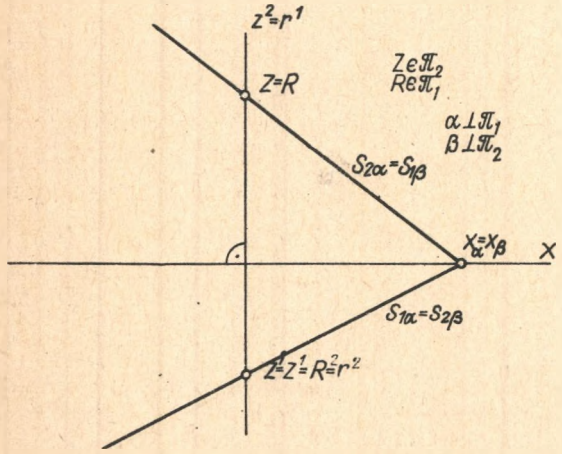
W szczególności dla płaszczyzn równoległych do jednej rzutni układu zachodzą relacje:

a) ., $\beta \parallel \pi_1 = S_{2\beta} \parallel x$, $\beta \cdot \pi_1 = S^{\infty}_{1\beta}$

b) ., $\gamma \parallel \pi_2 = S_{1\gamma} \parallel x$, $\gamma \cdot \pi_2 = S^{\infty}_{2\gamma}$

Ślady płaszczyzny γ równoległej do osi x są równoległe do osi x.

Na szczególną uwagę zasługują płaszczyzny prostopadłe do rzutni tzw. płaszczyzny rzucające. Płaszczyzny prostopadłe do rzutni π_1 albo π_2 nazywamy odpowiednio poziomo względnie ukośnie rzucającymi. Jeżeli rzutnia π_2 jest pionowa, to płaszczyznę prostopadłą do π_2 nazywamy pionowo rzucającą. Jeżeli $Z \in \pi_2$ i Z non $\in x$, to prosta $ZZ^1 = z$ jest prostopadła do rzutni π_1, a więc każda płaszczyzna pęku z $(\alpha, \beta, \ldots)$ jest prostopadła do rzutni π_1 (rys. 20).



Rys. 20

Kładąc $Z = R \in \pi_1$, (R non $\in$ x) uzyskamy prostą $RR^2 = r \perp \pi_2$. Każda płaszczyzna pęku płaszczyzn $r(\alpha, \beta, \ldots)$ jest prostopadła do rzutni π_2 (rys. 20).

W szczególności z warunku $\sigma \perp x$ wynika $\sigma \perp \pi_1$ i $\sigma \perp \pi_2$ oraz $S_{1\sigma} = S_{2\sigma} \perp x$.

Ponadto płaszczyzny odwzorujemy podając rzuty:

1) trzech punktów nieleżących na jednej prostej,

2) dwóch prostych przecinających się,

3) dwóch prostych równoległych.

4) punktu i prostej nieprzechodzącej przez punkt.

Rękopis złożono w Redakcji 16.12.63 r.

ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКЦИИ

Содержание

В работе рассмотрено метод проекции (изображения) являющийся некоторым обобщением метода Монжа. Обобщение состоит в замене вертикулярной плоскости проекции наклонною плоскостью.

Построение основных проекции произведено при использовании родственных соответствии в преобразовании проекции.

В работе обсуждено изображение точки, прямой и плоскости.

ORTHOGONALPROJEKTIONEN AUF ZWEI NICHTSENKRECHTEN PROJEKTIONSEBENEN

Zusammenfassung

Die im vorliegenden Artikel vorgenommenen Erwägungen betreffen eine Methode des Projezierens, das eine Verallgemeinerung der Mongemethode ist.

Diese Verallgemeinerung beruht auf dem Ersetzen der Vertikalprojektionsebene durch eine geneigte Projektionsebene.

Die Konstruktion der Grundprojektionen wird mit Hilfe einer Seitenrissebene und auch der projektiven Affinität gelöst.

Es sind die Projektionen der Punkte, der Geraden und der Ebenen erörtert worden.