ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 114 Matematyka - Fizyka z.5 1964

MARIAN PALEJ

O PEWNEJ KONSTRUKCJI KRZYWYCH STOPNIA DRUGIEGO

W oparciu o rozważania prostych jednorzutnych, tj. prostych, których obydwa rzuty na dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie π_1 i π_2 - w kierunkach p_1 i p_2 równoległych odpowiednio do π_2 i π_1 po rozwinięciu układu rzutni - ulegają zjednoczeniu - wyprowadzić można praktyczną konstrukcję stożkowej zadanej parą średnic sprzężonych.

Niech na przykład dana będzie elipsa określona parą średnic sprzężonych MN i PQ (rys.1).
Interpretując ją jako rzut utworu powstałego z przecięcia płaszczyzną powierzchni stożkowej prostych jednorzutnych o środku np. w punkcie M możemy uważać:

1) koniec średnicy sprzężonej z MN - punkt Q (lub P) za punkt węzłowy płaszczyzny tnącej φ,
2) prostą QM - za oś rzutów x,
3) prostą QN - za zjednoczone ślady płaszczyzny φ,
4) kierunki średnic sprzężonych za kierunki rzutów.

Rozważając pęk rzutów prostych jednorzutnych o środku M, punkty elipsy wyznaczymy jako rzuty punktów przebicia tymi prostymi płaszczyzny φ.

Weźmy pod uwagę prostą $a(a^1=a^2)$. W celu znalezienia punktu A^1 będącego rzutem punktu przebicia płaszczyzny φ prostą a poprowadźmy przez tę prostą płaszczyznę pomocniczą równoległą do jednego z kierunków rzutów. Ustalmy przy tym, że średnica PQ reprezentuje kierunek rzutów na π_1 tj. $PQ \parallel p_1$.
Niech: $a \in \alpha$, $\alpha \parallel p_2$

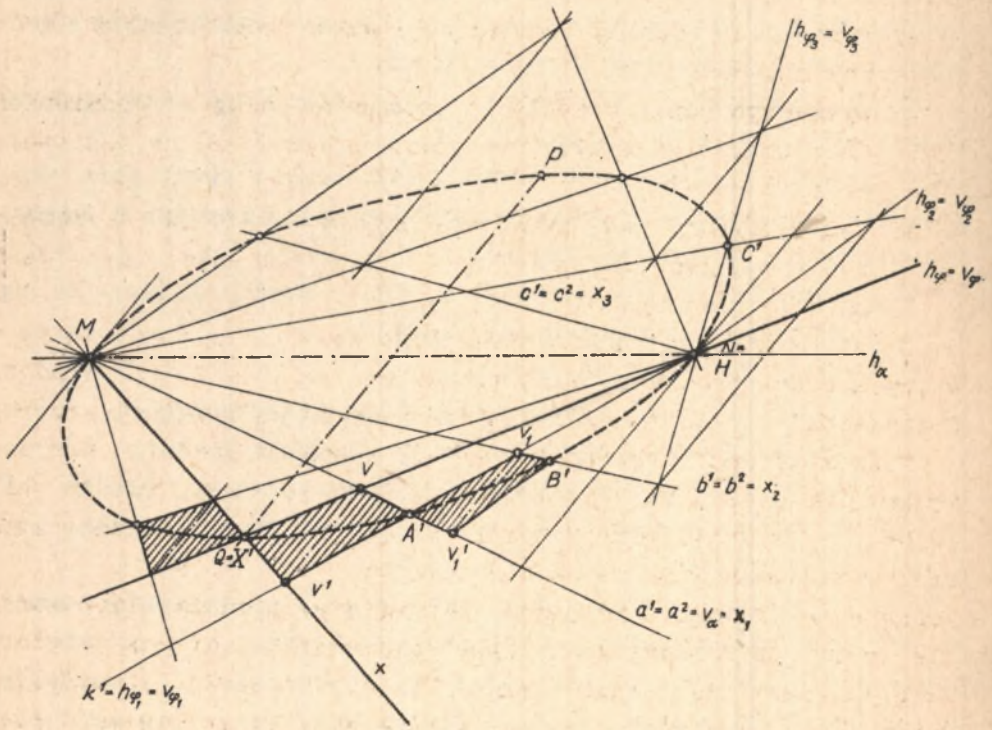
$$v_\alpha \; v_\varphi = V$$

$$h_\alpha \; h_\varphi = H$$

Wyznaczywszy V^1 jako przecięcie osi x prostą równoległą do PQ (kierunek rzutów na π_1) przechodzącą przez V kreślimy HV^1, tj. rzut pierwszy krawędzi $k = \alpha\varphi$. Szukany punkt przebicia w rzucie na π_1 otrzymujemy jako element wspólny k^1 i a^1.

Postępując analogicznie z dalszymi prostymi jednorzutnymi otrzymuje się kolejne punkty krzywej.

Warto zauważyć, że założenia odnośnie osi x i płaszczyzny φ można zmieniać, byleby zawsze punkt węzłowy tej płaszczyzny był punktem krzywej, a zjednoczone ślady płaszczyzny przechodziły przez przeciwległy środkowi pęku koniec średnicy (punkt N).



Rys.1

Konstrukcja elipsy na rys. 1 oparta została właśnie o tak zmieniające się założenia.
Kolejno rozważono: x_1, φ_1; x_2, φ_2; x_3, φ_3 itd.
Dodatnia strona takiego postępowania polega na możliwości uniknięcia pewnych niedokładności powstających wówczas, gdy określone, stałe położenia osi x i śladów płaszczyzny φ wymagają rozważenia punktów przecięcia się prostych nachylonych pod kątem zbliżonym do 0^0, bądź też punktów nie mieszczących się w obrębie rysunku.

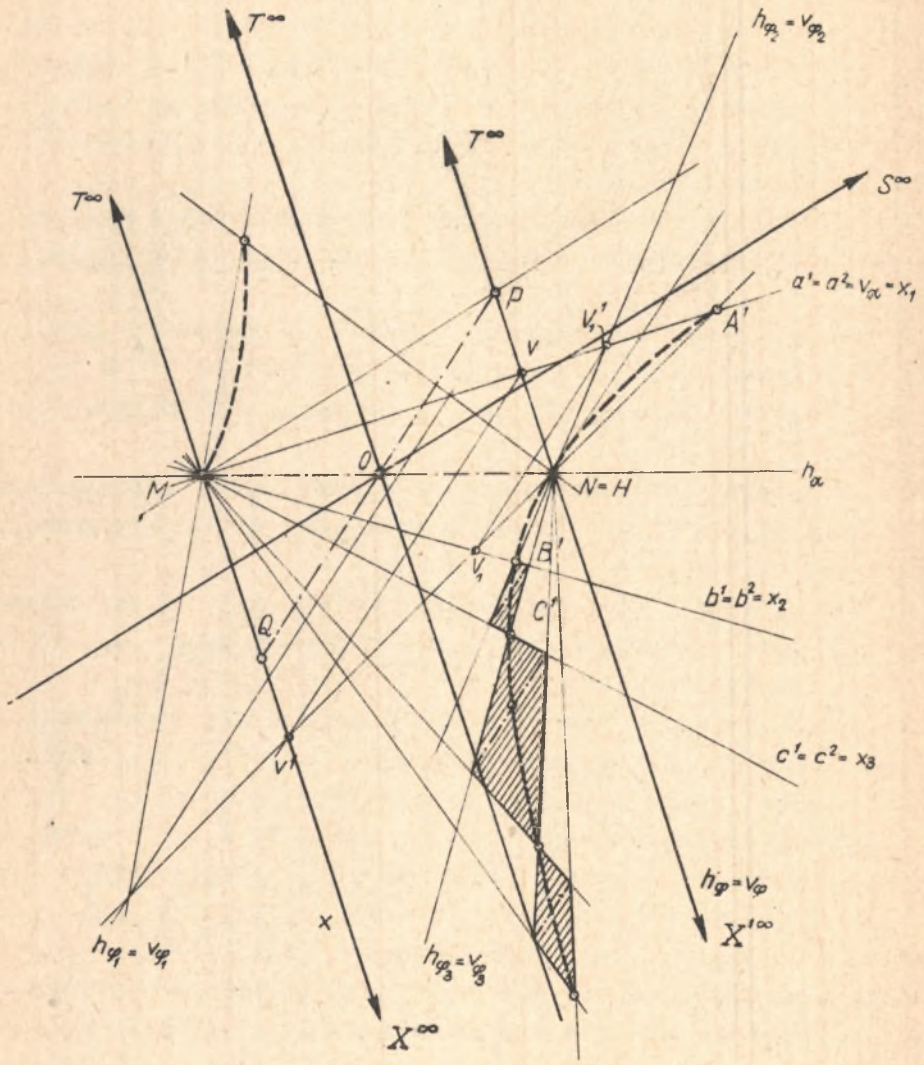
W praktyce, bez wnikania w uzasadnienie powyższej konstrukcji, wyznaczanie punktów elipsy należałoby realizować następująco:

a) koniec jednej z średnic np. punkt Q połączyć promieniami z końcami średnicy sprzężonej - punktami M i N,
b) wprowadzić dowolny promień a przez jeden z tych końców np. punkt M,
c) wyznaczyć punkt przecięcia promienia a z promieniem QN i rzucić go w kierunku równoległym do PQ na pozostały promień QM,
d) tak otrzymany nowy punkt połączyć z końcem N i rozważyć punkt przecięcia tej prostej z promieniem a. Jest to nowy punkt elipsy.

W rezultacie takiej konstrukcji otrzymuje się czworokąty, w których jedna przekątna jest równoległa do jednej z średnic. Przeciwległe wierzchołki czworokątów są punktami krzywej.

Przedstawione rozumowanie odnieść można do każdej krzywej stopnia drugiego. Na rys. 2 wykorzystano je w konstrukcji hiperboli. Dane są średnice sprzężone MN i PQ. Z danych tych wynika jednoznacznie położenie asymptot OS^∞ i OT^∞.
Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim wprowadza się promienie łączące znany punkt hiperboli z końcami średnicy sprzężonej MN. Znanym punktem hiperboli jest niewłaściwy punkt jednej z asymptot, w tym więc przypadku wyjściowe elementy: oś x i zjednoczone ślady płaszczyzny φ ($h_\varphi = X_\varphi$) są do siebie równoległe. Dalsza konstrukcja nie różni się niczym od omówionej wyżej konstrukcji elipsy.

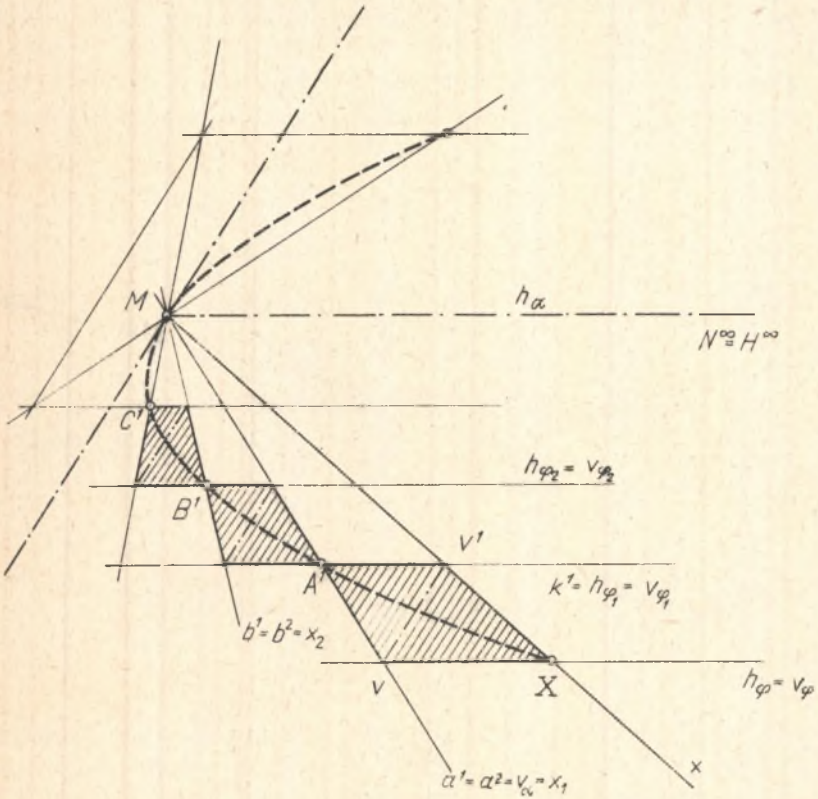
Na rys. 3 przedstawiono podobną konstrukcję dla paraboli danej średnicą, sprzężoną z nią styczną i dowolnym punktem. Po-



Rys.2

nieważ jeden z końców średnicy jest punktem niewłaściwym, ślady płaszczyzny φ są równoległe do średnicy. Sposób wyznaczania kolejnych punktów paraboli jest identyczny do tego, jaki podano dla elipsy i hiperboli. Również i w tym przypadku punkty

krzywej są przeciwległymi wierzchołkami czworokątów (na rysunku zaczernionych), w których jedna z przekątnych jest równoległa do stycznej.

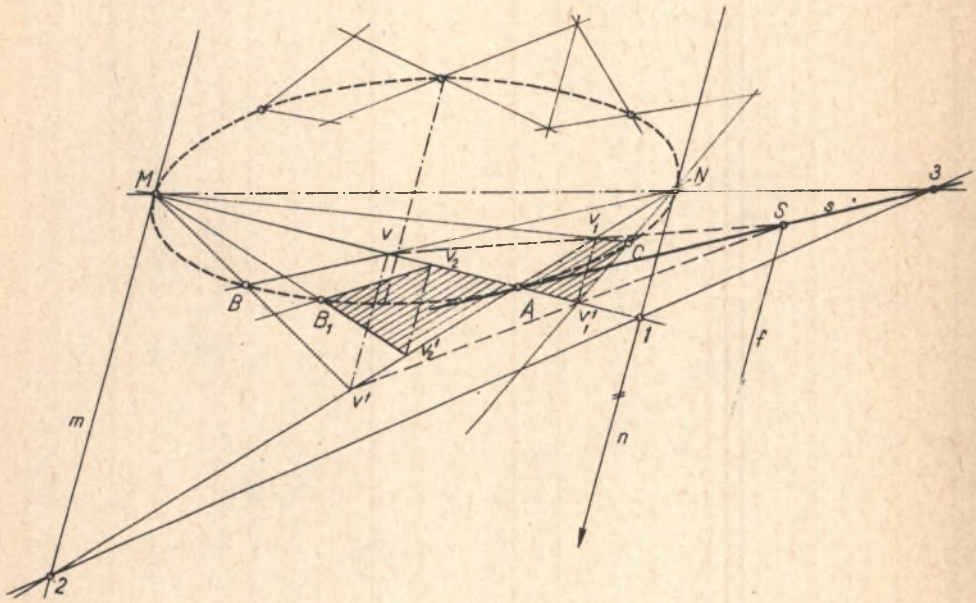


Rys.3

Rozważając bliżej czworokąty powstałe przy wyznaczaniu kolejnych punktów krzywej znajdujemy, że mogą one jednocześnie służyć do konstruowania stycznych. Zanalizujmy to na przykładzie elipsy (rys. 4). Z twierdzenia Pascala wyprowadza się znaną konstrukcję stycznej do stożkowej w punkcie A gdy dane są jej styczne m i n wraz z punktami styczności (M i N) [1]. W konstrukcji tej łączy się punkty M i N z punktem A i rozważa przecięcie prostej MA z styczną n w punkcie 1 oraz prostej NA z styczną m w punkcie 2. Prosta 12 przecina

prostą MN w takim punkcie 3, który jest elementem szukanej stycznej.

Zauważmy, że pomiędzy trójkątami AM2 i AN1 oraz trójkątami AVV^1 i $AV_1V_1^1$ zachodzi podobieństwo środkowe o środku



Rys.4

w punkcie A. Wynika stąd, że prosta A3 = s dzieli bok VV^1 i $V_1V_1^1$ w tym samym stosunku co boki M2 i N1. Ponieważ A3 jest przekątną czworokąta zupełnego MN12 i ponieważ M2 // N1 - prosta A3 połowi odcinki M2 i N1.

Rozważając czworokąt zupełny $VV^1V_1V_1^1$, w którym zachodzi: VV^1 // $V_1V_1^1$ stwierdzamy więc, że para boków VV_1, $V^1V_1^1$ przecina się w punkcie S leżącym na prostej s, gdyż ta właśnie prosta przechodzi przez środki boków równoległych VV^1 i $V_1V_1^1$.

Tak więc na to, aby skonstruować styczną do elipsy w punkcie A, można skorzystać z czworokątów $AVBV^1$ i $AV_1CV_1^1$ łącząc odpowiednio ich przeciwległe wierzchołki i uwzględniając punkt wspólny tak otrzymanych prostych - S. Z rys. 4 jasno wynika, że wybór czworokątów o wspólnym wierzchołku w rozważanym punkcie nie wpływa na wynik konstrukcji (np. w miejsce czworokąta $AVBV^1$ można było rozważać czworokąt $AV_2B_1V_2^1$). Ta sama konstrukcja ważna jest również dla paraboli i hiperboli.

LITERATURA

[1] Plamitzer A.: Elementy geometrii rzutowej. Lwów 1927. Wydawn. K. S. Jakubowskiego, str.210.

О НЕКОТОРОМ ПОСТРОЕНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Содержание

Основываясь на рассуждениях прямых, которых параллельные проекции в развернутом системе плоскостей проекции накрываются выведено единое построение эллипса, параболи и гиперболи; показано также метод построения касательных к этим кривым.

ÜBER EINE KONSTRUKTION DER KURVEN ZWEITER ORDNUNG

Zusammenfassung

Auf Grund der Betrachtungen von Sondergeraden, deren Projektionen in einem abgewickelten Projektionsebenesystem zusammenfallen, hat man eine einheitliche Konstruktion der Kurven zweiter Ordnung abgeleitet; es ist auch eine Konstruktion der Tangenten an diesen Kurven angegeben worden.