ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 114 Matematyka - Fizyka z. 5 1964

MARIAN PALEJ

O PEWNEJ WŁASNOŚCI PĘKU OKRĘGÓW

Rozważmy paraboloidę obrotową Φ o osi l prostopadłej do rzutni π_1 (rys. 1). Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 1.

Prostokątny rzut na π_1 każdej elipsy leżącej na paraboloidzie Φ jest okręgiem [1].

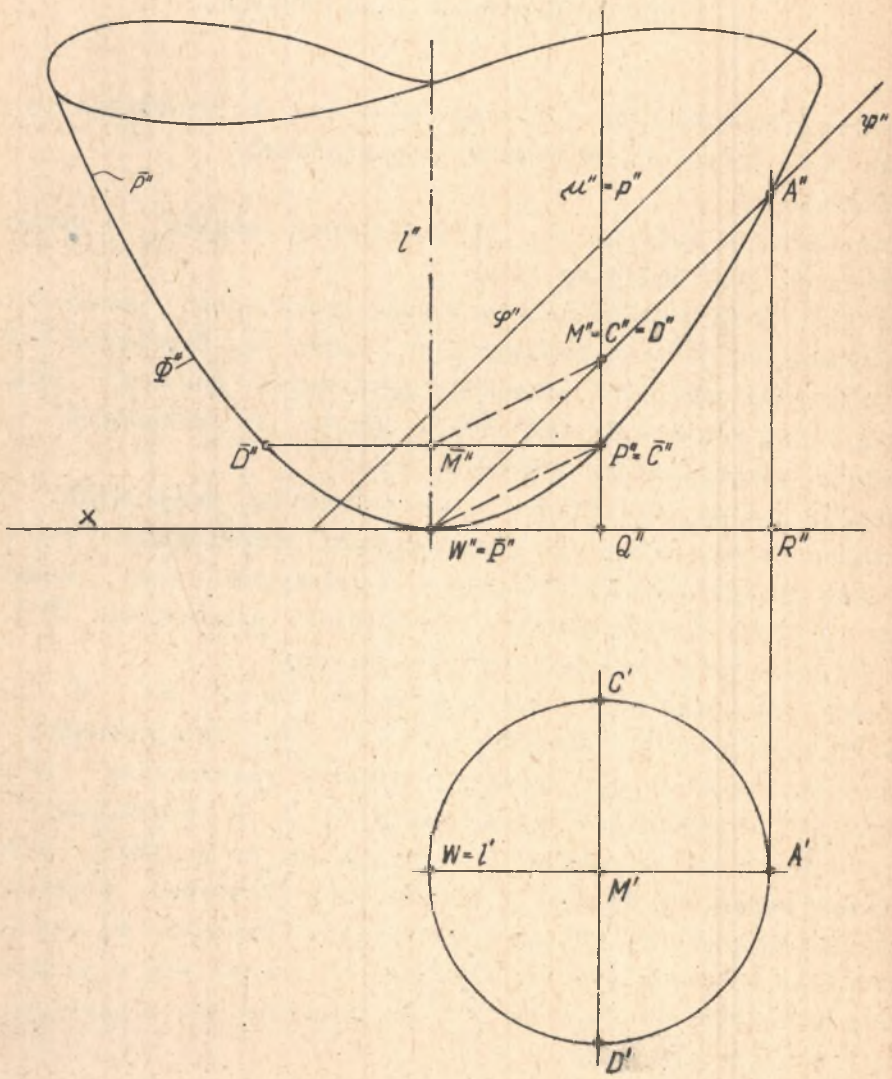
Weźmy pod uwagę dowolną elipsę będącą przekrojem paraboloidy Φ płaszczyzną pionowo-rzucającą φ (rys. 1). Przyjęcie takie nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż każdą dowolną płaszczyznę tnącą można w drodze obrotu dokoła l sprowadzić do położenia prostopadłego względem π_2.

Opierając się na twierdzeniu o podobieństwie przekrojów powierzchni stopnia drugiego płaszczyznami równoległymi [2], dowód nasz przeprowadzimy wykazując, że okręgiem jest prostokątny rzut na π_1 przekroju paraboloidy płaszczyzną $\psi \parallel \varphi$ przechodzącą przez wierzchołek paraboloidy.

Weźmy pod uwagę osie tego przekroju: CD i AW. W celu udowodnienia równości odcinków $\overline{C'D'} = \overline{A'W'}$ przeprowadźmy następującą konstrukcję: rozważmy przekrój paraboloidy płaszczyzną μ przechodzącą przez punkty C i D prostopadle do osi x. Będzie to parabola p przystająca do paraboli zarysu, ponieważ wszystkie przekroje paraboloidy obrotowej płaszczyznami równoległymi do osi są przystające. Przesuńmy tę parabolę równolegle tak, aby jej wierzchołek P pokrył się z punktem W a następnie obróćmy ją o kąt 90° do pokrycia się z parabolą zarysu w rzucie pionowym.

W wyniku takich operacji środek elipsy M przejdzie w położenie $\bar{M}$, a końce osi C i D w położenia $\bar{C}$ i $\bar{D}$ (rys. 1).

Należy udowodnić, że jeden z punktów C, D po opisanym przesunięciu i obrocie pokryje się z wierzchołkiem paraboli p w wyjściowym położeniu, czyli że zachodzić będzie $\bar{C}'' = P''$ lub $\bar{D}'' = P$.



Rys. 1

W takim przypadku spełniona musi być równość:

$$\overline{C''P''} = \overline{P''Q''} \tag{1}$$

której wykazanie oznacza zakończenie naszego dowodu.

Zauważmy jednak, że równość (1) wynika z przynależności punktu P'' do paraboli określonej wierzchołkiem W'', styczną x w wierzchołku W'' i punktem A'', gdyż zachodzi:

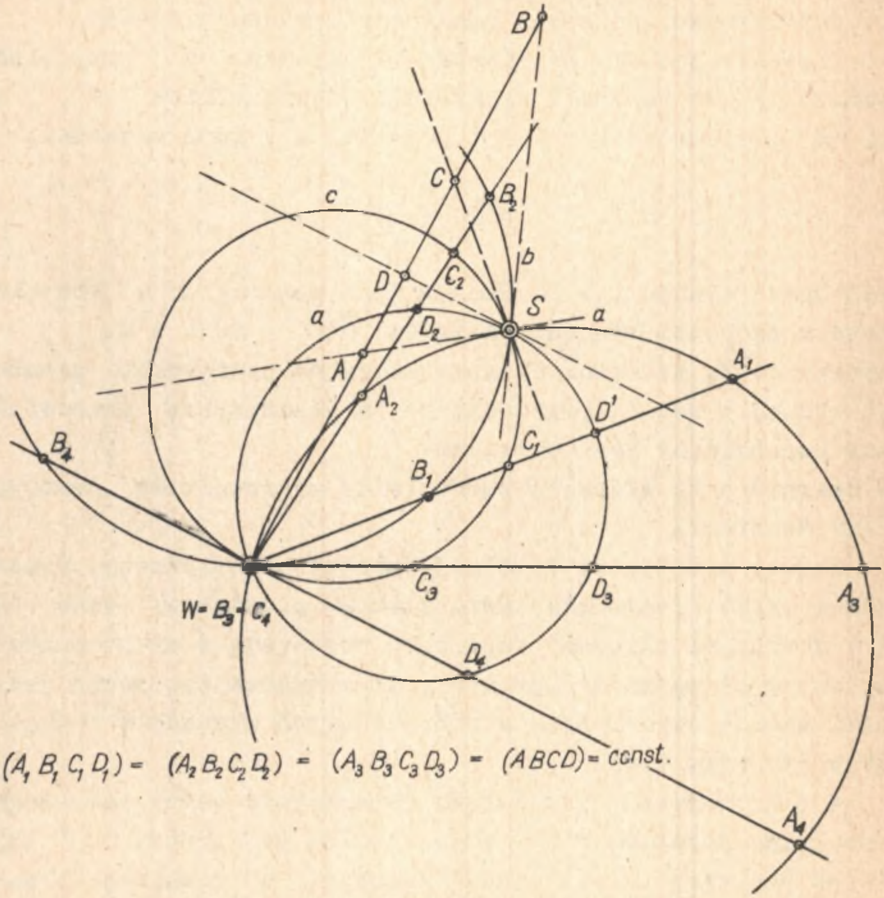
$$\overline{W''Q''} = \overline{Q''R''} \tag{2}$$

Tak więc relacja (1) spełniona jest zawsze, a w konsekwencji zawsze zachodzi równość odcinków $\overline{M''C''} = \overline{MC} = \overline{W''Q''}$.
Wynika stąd, że każda elipsa leżąca na powierzchni paraboloidy obrotowej w rzucie prostokątnym na płaszczyznę prostopadłą do osi paraboloidy jest okręgiem.
W oparciu o tę własność paraboloidy wyprowadzimy następujące:
Twierdzenie 2.

Punkty przecięcia dowolnej prostej przechodzącej przez jeden i tylko jeden rzeczywisty punkt podstawowy pęku okręgów z 4 dowolnymi okręgami tego pęku pozostają w dwustosunku niezależnym od położenia prostej; dwustosunek ten równy jest temu, jaki tworzą odpowiednie styczne do tych okręgów w punkcie podstawowym pęku (rys. 2).

W wyprowadzeniu powyższego twierdzenia weźmy pod uwagę paraboloidę obrotową o osi prostopadłej do rzutni $l \perp \pi$ (rys. 3) i pęk prostych $S(a,b,c,d..)$ leżących w dowolnej płaszczyźnie τ. Rzućmy pęk S z wierzchołka paraboloidy W na powierzchnię paraboloidy. Otrzymamy w ogólnym przypadku zbiór elips a_1, b_1, c_1, d_1 .... przecinających się w punktach W i S_1, gdzie S_1 jest punktem przebicia paraboloidy prostą WS. Przyjmijmy dowolną płaszczyznę λ przechodzącą przez oś paraboloidy (rys. 3). Płaszczyzna ta przecina proste pęku S w kolejnych punktach A, B, C, D, ..., a elipsy a_1, b_1, c_1, d_1 .. – w punktach A_1, B_1, C_1, D_1, ... oraz w punkcie W. Punkty A_1, B_1, C_1, D_1,.... – leżą przy tym jednocześnie na paraboli p_1, w której płaszczyzna λ przecina paraboloidę. Zauważmy, że punkty A_1, B_1, C_1, D_1 .... są rzutami na parabolę z punktu W punktów A, B, C, D, ...

Rozważając bowiem proste WA_1, WB_1, WC_1, WD_1, stwierdzamy, że leżą one w płaszczyznach rzucających z punktu W poszczególne



$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2) = (A_3B_3C_3D_3) = (ABCD) = const.$

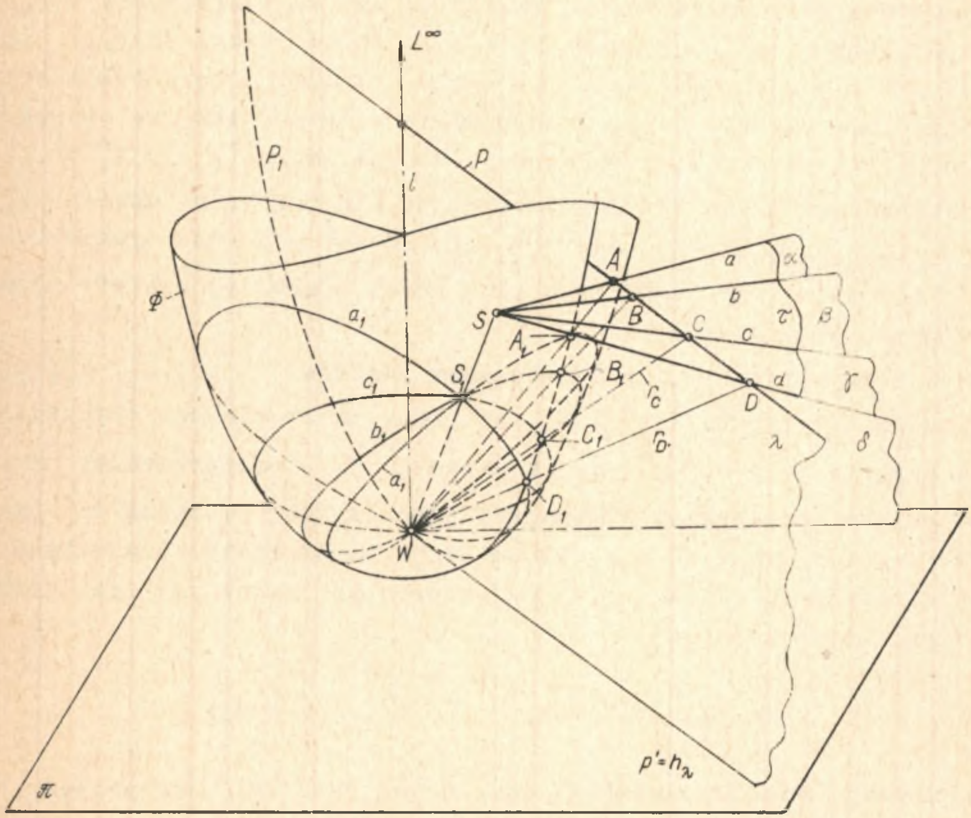
Rys. 2

proste pęku S(a,b,c,d ...), a jednocześnie przynależą do płaszczyzny rzucającej z punktu W wszystkie elementy płaszczyzny λ. Wynika stąd, że są to proste rzucające z punktu W elementy wspólne płaszczyzny λ i prostych pęku S, czyli punkty A,B,C,D. Wprowadźmy oznaczenia: $WA = r_A$, $WB = r_B$, $WC = r_C$, $WD = r_D$.

Jest oczywista relacja:

$$p(A,B,C,D \ldots) \barwedge W(r_A, r_B, r_C, r_D, \ldots) \barwedge p_1, (A_1, B_1, C_1, D_1)$$

Jeżeli punkty A_1, B_1, C_1, D_1 .... rzucimy z dowolnego punktu paraboli p_1 otrzymamy pęk prostych rzutowy względem



Rys. 3

$W(r_A, r_B, r_C, r_D, \ldots)$. Dokonajmy rzutu z środka paraboli, tj. z punktu L^∞. Będą to rzuty prostokątne względem π, czyli: $L^\infty A_1 = A_1'$, $L^\infty B_1 = B_1'$ .... itp., przy czym zgodnie z powyższym zachodzić będzie:

$$L^\infty(A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' \ldots) \barwedge W(r_A, r_B, r_C, \ldots)$$

Wynika stąd że:

$$(A_1'B_1'C_1'D_1') = (\Gamma_A \Gamma_B \Gamma_C \Gamma_D) = (ABCD)$$

Zauważmy, że relacja ta nie zależy od wyboru płaszczyzny λ,tj. od położenia na π prostej $p' = h_\lambda$. Jeżeli uwzględnimy, że rzutami z punktu L^∞ na π, czyli rzutami prostokątnymi elips a_1, b_1, c_1, d_1 .... są zgodnie z dowiedzioną na wstępie własnością paraboloidy obrotowej, okręgi a_1', b_1', c_1', d_1' ..... przechodzące przez W i przecinające się z sobą w punkcie S_1' - z przynależności punktów A_1', B_1', C_1', D_1' .... do tych okręgów i prostej p' wnosimy o słuszności pierwszej części rozważanego twierdzenia.

W celu wykazania, że dwustosunek punktów A_1', B_1', C_1', D_1' leżących na prostej $p' \in W$ jest równy dwustosunkowi stycznych do okręgów a_1', b_1', c_1', d_1', w punkcie S_1', przeprowadźmy następujące rozważanie. Wprowadźmy płaszczyznę σ styczną do paraboloidy w punkcie S_1. Płaszczyzna ta przetnie płaszczyzny poszczególnych elips $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ w prostych stycznych do tych elips, które nazwijmy:

$$\alpha\sigma = a_2, \quad \beta\sigma = b_2, \quad \gamma\sigma = c_2, \quad \delta\sigma = d_2$$

Z perspektywiczności pęków $(S_1) \,\bar{\wedge}\, (S)$ wynika: $(a_2b_2c_2d_2) = (abcd)$. W rzucie prostokątnym na π styczne a_2, b_2, c_2, d_2 będą stycznymi do okręgów a_1', b_1', c_1', d_1' w punkcie S_1'.

Ponieważ zachodzi: $(A_1'B_1'C_1'D_1') = (ABCD) = (abcd)$ - relacja $(A_1'B_1'C_1'D_1') = (a_2b_2c_2d_2)$ jest zawsze spełniona i część druga naszego twierdzenia jest również prawdziwa. Na zakończenie wspomnijmy o tym jednym położeniu prostej p', które wyklucza się w twierdzeniu tj. o przypadku $p' = WS_1'$. Jest oczywiste, że wówczas punkty A_1', B_1', C_1', D_1' pokrywają się z sobą i dwustosunek tej czwórki przyjmuje wartość nieoznaczoną. Przypadek ten jest analogią do przecięcia pęku prostych prostą przechodzącą przez środek tego pęku.

Rękopis złożono w Redakcji 15.I.64 r.

LITERATURA

[1] Kounovský J., Vyčichlo F.: Deskriptivni geometrie. Praha 1953. Nakladatelstvi Česko-slovenské Akademie VED. str.442.

[2] Otto E.: Geometria wykreślna. Wydanie 2. Warszawa 1954. PWN. str. 165.

О НЕКОТОРОМ СВОЙСТВЕ ПУЧКА ОКРУЖНОСТЕЙ

С о д е р ж а н и е

Основываясь на некоторых свойствах параболоида вращения доказано теорему: точки пересечения произвольной прямой проходящей через одну действительную, базисную точку пучка окружностей с четырьмя произвольными окружностями этого пучка образуют сложное отношение, величина которого независима от положения прямой.

ÜBER EINE KREISBÜSCHELSEIGENSCHAFT

Z u s a m m e n f a s s u n g

Auf Grund der Drehparaboloidseigenschaften hat man folgendes bewiesen: die Punkte, in denen eine beliebige, mit einem der wirklichen Kreisbüschelsgrundpunkte inzidierende Gerade vier beliebige Kreise dieses Büschels schneidet, bilden ein Deppelverhältnis, das nicht von der Lage der Gerade abhängig ist.